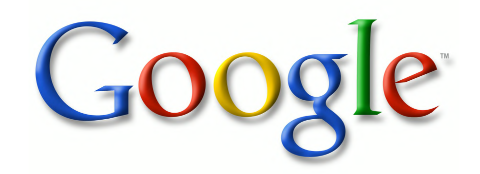


This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at http://books.google.com/



5167

Soc. 1642 d. 49/7

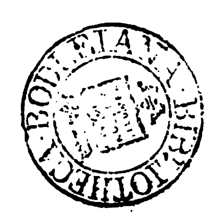
ANNALES

DE

L'OBSERVATOIRE IMPÉRIAL DE PARIS.

PARIS. — IMPRIMERIE DE MALLET-BACHELIER, RUE DE SEINE-SAINT-GERMAIN, 10, PRÈS L'INSTITUT.

ANNALES



DE

L'OBSERVATOIRE IMPÉRIAL DE PARIS,

PUBLIÉES

PAR U.-J. LE VERRIER,

DIRECTEUR DE L'OBSERVATOIRE.

MÉMOIRES.

TOME VII.

10

PARIS,

MALLET-BACHELIER,

IMPRIMEUR-LIBRAIRE DE L'OBSERVATOIRE IMPÉRIAL DE PARIS,

QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55.

—

1863.

TABLE DES MATIÈRES

CONTENUES DANS LE TOME SEPTIÈME.

RECHERCHES SUR LE MOUVEMENT ET LA COMPENSATION DES CHRONOMÈTRES; PAR A.-J. YVON VILLARCEAU.

MÉMOIRE SUR LES INÉGALITÉS A LONGUES PÉRIODES DU MOUVEMENT DES PLANÈTES; PAR V. PUISEUX.

RECHERCHES MAGNÉTIQUES; PAR P. DESAINS ET R. CHARAULT.

MÉMOIRE SUR LE CALCUL DES DIVERS TERMES DU DÉVELOPPEMENT DE LA FONCTION PERTURBATRICE ET DE SES DÉRIVÉES; PAR J. BOURGET.

ÉTUDE SUR LE MOUVEMENT DE ROTATION DE LA LUNETTE MÉRIDIENNE; PAR A.-J. YVON VILLARCEAU.

DÉTERMINATION DE L'ORBITE DE LA PLANÈTE EUGÉNIE; PAR M. LOEVY.

MÉMOIRE SUR L'APPLICATION DES PHÉNOMÈNES CAPILLAIRES A LA CONSTRUCTION DE DIVERS THERMOMÉTROGRAPHES; PAR E. BARBIER.

PLANCHES.

ANNALES

DE

L'OBSERVATOIRE IMPÉRIAL DE PARIS.

RECHERCHES

SUR

LE MOUVEMENT ET LA COMPENSATION DES CHRONOMÈTRES,

PAR A.-J. YVON VILLARCEAU.

INTRODUCTION.

Au milieu des autres arts industriels, l'horlogerie offre de nos jours un contraste frappant. Alors que toutes les industries mettent à profit les conquêtes de la science, l'horlogerie, comme si elle oubliait son histoire, semble abandonner le guide qui lui a fait faire de si grands progrès. Dans le courant du siècle dernier, des artistes illustres, en empruntant à la physique et à la mécanique les principes de leur art, l'ont élevé au premier rang des arts mécaniques. Est-ce à dire que l'horlogerie n'ait pas fait de progrès depuis lors? Non assurément; car la précision du travail, sans laquelle les plus belles conceptions de la théorie seraient comme lettres mortes, a été portée à un degré qu'il paraîtrait difficile de surpasser. La théorie aurait-elle dit son dernier mot, ou serait-elle impuissante à donner la solution de problèmes imparfaitement résolus? On le croirait, en voyant les efforts que font nos officiers de marine, pour introduire dans la navigation l'étude des irrégularités de la marche de leurs chronomètres, à l'effet d'en corriger les indications de ces précieux instruments.

Depuis les solutions du problème élémentaire des oscillations des pendules et balanciers, on était resté longtemps sans voir se produire de recherches théoriques intéressant spécialement l'art des horlogers, lorsque M. Phillips, ingénieur des mines, a publié un intéressant travail sur les conditions d'isochronisme du ressort spiral.

La théorie de la compensation des chronomètres ne paraît avoir été l'objet d'aucune publication sérieuse; du moins, nous ne saurions en mentionner une seule. Nous pensons donc faire une chose utile en publiant un Mémoire où se trouve la solution d'un problème qui intéresse à un si haut degré la sécurité des navigateurs.

A l'exemple des auteurs qui se sont occupés de la compensation des pendules, nous avions abordé le problème de la compensation des chronomètres, sans nous préoccuper de l'action des pièces de l'échappement sur le balancier. Mais il nous a paru nécessaire de justifier l'hypothèse que les frottements, la résistance de l'air et les chocs de la roue d'échappement peuvent être négligés dans le problème de la compensation. C'est pourquoi nous avons entrepris l'étude des mouvements du balancier sous l'influence de ces actions diverses, la température ne variant pas.

La première Partie de ce Mémoire contient l'exposé de nos recherches sur le mouvement des chronomètres soumis à une température constante. Notre point de départ est l'isochronisme du ressort spiral, soit qu'il résulte des règles proposées par M. Phillips, soit qu'on l'obtienne par tout autre procédé. En admettant la loi de la résistance de l'air proportionnelle au carré de la vitesse, nous trouvons que les diverses résistances ne produisent, dans l'intervalle de deux battements consécutifs, que des altérations du deuxième ordre de petitesse, sauf une seule qui s'élève au premier ordre : cette altération est en raison inverse du carré des amplitudes, et proportionnelle, à la fois, à la résistance des pivots et à l'angle compris entre la position d'équilibre du balancier et celle qu'il occupe à l'instant où il reçoit le choc de la roue d'échappement. Nous faisons connaître les relations statiques et dynamiques qui s'établissent entre le balancier et la roue d'échappement, quand le chronomètre atteint son régime permanent; certaines règles pratiques concernant l'échappement s'en déduisent.

Dans la deuxième Partie, le problème de la compensation est traité en négligeant d'abord les termes dépendant des carrés des variations de température; la théorie des lames bi-métalliques y est exposée avec détails.

Revenant ensuite sur les termes négligés, nous formons l'équation de condition relative à l'anéantissement de ces termes, et nous discutons les différents moyens d'y satisfaire suivant les cas. Afin de fixer les idées sur l'importance des termes dont il s'agit, nous présentons une évaluation numérique de ceux que fournit le balancier, les seuls que l'on puisse évaluer sans le secours de l'expérience.

Nous terminons par quelques considérations sur les formules empiriques propres à représenter la marche de chronomètres plus ou moins imparfaitement compensés.

PREMIÈRE PARTIE.

ÉTUDES CONCERNANT LE MOUVEMENT DU BALANCIER.

1. Dans cette première Partie, nous ferons abstraction des variations de température : il nous serait facile de faire l'hypothèse de l'invariabilité de la température, et de limiter les conséquences à ce cas abstrait en apparence ; mais les principaux résultats que nous obtiendrons conviendront encore à l'état réel des choses, car il nous suffira d'étudier le mouvement pendant une ou deux oscillations seulement, et il est clair que, dans un aussi court intervalle, la température peut être considérée comme ne variant pas.

Nous traiterons en conséquence le balancier comme un système de pièces rigides, formant un corps solide, assujetti à la seule condition que son centre de gravité coïncide avec l'axe de rotation. (Dans la deuxième Partie de ce Mémoire, la composition du balancier sera présentée avec les détails nécessaires.)

La force principale qui produit les oscillations du balancier, provient de l'action d'un ressort en acier dit *spiral*, mais ayant plutôt la forme héliçoïdale dans la plus grande partie de son étendue. L'une des extrémités du ressort est fixée au balancier, l'autre au châssis dans lequel sont engagés les tourillons ou *pivots* du balancier. Il existe une position du balancier dans laquelle le ressort n'exerce aucune action pour le faire tourner : c'est la position d'équilibre qui aurait lieu s'il n'existait aucun frottement dans l'appareil. Lorsque le balancier prend toute autre position, le ressort s'enroule ou se déroule, et les différentes tranches perpendiculaires à son axe de figure, sont soumises à des efforts de traction ou de compression.

Quand un spiral est *réussi*, le moment des efforts qu'il exerce sur le balancier, autour de son axe de rotation, est sensiblement proportionnel à l'écart angulaire du balancier autour de sa position d'équilibre, tant d'un côté que de l'autre de cette position. Les conditions de réussite ne consistent pas dans une grande perfection de la forme héliçoïdale ; elles n'exigent pas seulement une parfaite égalité des sections normales à l'axe et l'égale élasticité du métal dans toute l'étendue du ressort, chose déjà très-difficile à obtenir dans l'opération de la trempe : il faut encore que le ressort ait une certaine longueur déterminée, et que ses deux extrémités affectent une forme notablement différente de la forme héliçoïdale.

Pierre Leroy est le premier qui ait reconnu que l'isochronisme pouvait s'obtenir en donnant au ressort une certaine longueur qu'il a lui-même indiquée. Dans ces derniers temps, un habile ingénieur, M. Phillips, s'est occupé de la forme à donner au spiral : ses résultats ont été communiqués à l'Académie des Sciences; mais l'auteur n'avait point encore publié son travail, quand nous avons entrepris les présentes recherches ; il nous était impossible de mettre à profit son analyse. Nous ne reprendrons pas, pour l'instant, la question qu'il a traitée.

Acceptant comme un fait acquis la possibilité d'obtenir l'isochronisme dans le mouvement des balanciers de chronomètre, soit qu'il résulte de l'application des formules de M. Phillips, soit qu'on l'obtienne en employant tout autre moyen, nous considérerons le ressort spiral comme exerçant sur le balancier, *dans l'état de mouvement,* des forces dont le moment est proportionnel à l'écart angulaire du balancier par rapport à sa position d'équilibre (*) ; nous reconnaîtrons que, dans les divers cas que l'on peut avoir à considérer, ce mode d'action réalise effectivement l'isochronisme.

(*) Si tel était effectivement le mode d'action du ressort dans l'*état de repos du balancier*, on ne devrait s'attendre à le voir se réaliser encore dans l'*état de mouvement* qu'autant que la masse du ressort serait comme insensible vis-à-vis de celle du balancier ; or, comme il ne paraît pas à priori qu'il en soit tout à fait ainsi, on peut se demander si la longueur et la forme du ressort auxquelles les artistes sont parvenus par voie de tâtonnement, n'auraient pas pour résultat de corriger les effets du défaut de proportionnalité qui aurait lieu à l'état statique. Si cela était, il en faudrait conclure que la propriété du ressort spiral de produire des oscillations isochrones, n'aurait lieu que relativement à des balanciers ayant le même moment d'inertie. En effet, imaginons qu'on adapte un tel ressort à un balancier dont le moment d'inertie soit assez grand pour que les oscillations ne s'effectuent qu'avec une extrême lenteur ; alors les actions que développera le ressort seront sensiblement les mêmes qu'à l'état statique, et comme par hypothèse ces forces, à l'état statique, ne seront plus proportionnelles aux écarts angulaires, l'isochronisme ne sera pas obtenu avec le nouveau balancier comme avec le balancier primitif.

Dans la Note (*Comptes rendus*, t. XLVIII, p. 984) qui accompagne la présentation de son Mémoire, M. Phillips annonce avoir « fait, à différents points de vue, un grand nombre d'expériences qui » sont toujours venues vérifier la théorie aussi exactement qu'il était permis de l'espérer. » Or, il ne paraît pas que l'auteur du Mémoire ait eu égard à la différence des actions que le ressort exerce sur le balancier à l'état de mouvement et à l'état de repos. Si, parmi les expériences dont il est question, il en est qui se rapportent à l'observation de la durée des oscillations, et que le résultat se soit trouvé conforme à la théorie, il faudra en conclure que l'inertie du ressort est sans influence sensible : autrement nous serions portés à croire qu'on obtiendrait un accord sensiblement satisfaisant, pour toute amplitude, en ajoutant, dans les formules, au moment d'inertie du balancier, une petite quantité que l'expérience ferait connaître, ou en diminuant d'une quantité convenable le coefficient qui représente l'action du ressort.

Ceci entendu, nous traiterons successivement diverses questions, en suivant l'ordre de leur simplicité.

2. *Mouvement du balancier en négligeant les diverses résistances qu'il peut éprouver.* — Les lois du mouvement rectiligne ou angulaire d'un corps, lorsqu'il est soumis à une force dont l'intensité ou le moment est proportionnel à la distance linéaire ou angulaire de sa position d'équilibre, sont connues depuis fort longtemps : nous nous dispenserions de les exposer, si nous ne devions rapprocher les résultats que nous obtiendrons dans les numéros suivants, de ceux qui sont relatifs au présent cas.

Soient : u la quantité angulaire dont le balancier est écarté de sa position d'équilibre à l'instant t;

$\varkappa$ le moment des forces que le ressort spiral exerce lorsque l'écart u acquiert une valeur égale à l'unité angulaire abstraite;

M la masse du balancier;

MI^2 son moment d'inertie autour de l'axe de rotation;

Le moment des forces développées par le ressort sera $\varkappa u$, et le sens de ce moment sera toujours opposé à celui de l'angle u.

Appliquant le principe des aires, ou l'équation des forces vives différentiée et débarrassée du facteur du, on a

$$(1) \qquad MI^2 \frac{d^2 u}{dt^2} = -\varkappa u.$$

Multipliant par du et intégrant, il vient

$$(2) \qquad MI^2 \frac{du^2}{dt^2} = \varkappa (u_0^2 - u^2),$$

u_0 étant une constante arbitraire.

On conclut de cette formule, que la vitesse angulaire $\frac{du}{dt}$ s'annule lorsque u acquiert l'une des deux valeurs $+u_0$ et $-u_0$: comme d'ailleurs $\frac{du}{dt}$ ne reste réel que pour toute valeur de u comprise entre les limites $\pm u_0$, il s'ensuit que le balancier oscillera entre les deux positions correspondantes, et qui sont symétriques par rapport à sa position d'équilibre.

Il reste à obtenir la valeur de u en fonction de t, ou inversement. En vertu des limites de u, on peut poser

$$(3) \qquad u = u_0 \cos\varphi,$$

d'où

$$\frac{du}{dt} = -u_0 \sin\varphi \frac{d\varphi}{dt}; \tag{4}$$

ces valeurs étant substituées dans l'équation (2), il vient simplement

$$\mathrm{MI}^2 \frac{d\varphi^2}{dt^2} = \varkappa.$$

Posons, pour plus de commodité,

$$\lambda = \sqrt{\frac{\varkappa}{\mathrm{MI}^2}}, \tag{5}$$

il viendra

$$d\varphi = \pm \lambda\, dt,$$

d'où

$$\varphi = \lambda t.$$

Nous n'écrivons pas le double signe, attendu qu'il disparaît de l'expression (3) de u en fonction de φ : en outre, nous n'avons pas ajouté de constante, parce que nous prenons ici, pour origine du temps, l'instant où u est égal à $+u_0$. L'expression de u en fonction du temps est donc

$$u = u_0 \cos\lambda t, \tag{6}$$

et celle de la vitesse

$$\frac{du}{dt} = -\lambda u_0 \sin\lambda t. \tag{7}$$

La vitesse s'annulera pour toutes les valeurs de t qui satisferont à l'équation $\sin\lambda t = 0$, d'où $\lambda t = i\pi$, i étant un nombre entier et π le rapport de la circonférence au diamètre; en sorte que la durée T de l'oscillation simple aura pour expression

$$\mathrm{T} = \frac{\pi}{\lambda}, \tag{8}$$

ou, en vertu de l'équation (5),

$$\mathrm{T} = \pi \sqrt{\frac{\mathrm{MI}^2}{\varkappa}}. \tag{9}$$

En outre, il est visible que les valeurs de u et $\frac{du}{dt}$ reviendront les mêmes, toutes

les fois que l'angle λt croîtra de $2i\pi$; ce qui donne, pour la durée d'une oscillation complète, $\frac{2\pi}{\lambda}$, quelle que soit l'origine de cette oscillation.

Mais ce qui est plus important, c'est que la durée des oscillations est indépendante de l'amplitude. En effet, la valeur de T ne dépend pas de u_0.

On remarquera aisément l'égalité des temps écoulés entre le passage du balancier par sa position d'équilibre et les passages par deux positions symétriques par rapport à cette dernière : les vitesses correspondantes à ces deux positions sont égales et de même sens dans une même oscillation simple ; etc.

Nous avons suivi un mode en apparence différent de celui qu'on a l'habitude de pratiquer dans le cas d'équations de la forme (2), non-seulement parce que l'ambiguïté de signe a été facilement levée, mais plus particulièrement à cause de la nécessité où nous serons de faire usage du premier dans les numéros suivants.

3. *Mouvement du balancier en ayant égard à la résistance qu'éprouvent les pivots.* — Les pivots sont exposés à des résistances de trois sortes, quand on fait abstraction du mouvement de translation ou de rotation auquel est exposé le chronomètre : 1° le frottement au contact du plan horizontal sur lequel s'appuie l'extrémité inférieure du balancier : d'après les notions admises sur les frottements, cette résistance est indépendante de la vitesse, ou constante durant un grand nombre d'oscillations consécutives ; 2° le frottement provenant d'une pression latérale produite par le ressort spiral : or il paraît, d'après les recherches de M. Phillips, que cette pression peut être annulée au moyen de dispositions spéciales que cet auteur recommande ; mais, d'autre part, on peut l'éviter, en faisant agir sur le balancier deux ressorts semblables, au lieu d'un seul, et les établissant convenablement : nous pouvons donc faire abstraction de cette résistance ; 3° la résistance provenant d'un défaut de fluidité parfaite des huiles qui lubrifient les pivots : eu égard à la faible masse des molécules d'huile entraînées dans le mouvement de rotation et à la faible vitesse qu'elles peuvent prendre, on peut encore considérer cette résistance comme constante.

Les diverses résistances que nous venons d'énumérer donnent lieu à un moment constant dont le sens est nécessairement opposé à celui de la vitesse ; soit $f\varkappa$ la valeur absolue de ce moment, l'équation du mouvement du balancier sera, en conservant les notations du numéro précédent,

$$(10) \qquad \mathrm{MI}^2 \frac{d^2 u}{dt^2} = -\varkappa(u \pm f);$$

le signe supérieur convient au cas où $\frac{du}{dt}$ est positif, et le signe inférieur au cas

contraire. Il suffit de comparer l'équation précédente à l'équation (1), pour reconnaître que ses intégrales s'obtiendront en changeant simplement, dans celles correspondantes à cette dernière, u en $u \pm f$ et u_0 en $u_0 \pm f$. On aura donc

$$u \pm f = (u_0 \pm f)\cos \lambda t, \tag{11}$$

$$\frac{du}{dt} = -\lambda (u_0 \pm f)\sin \lambda t \tag{12}$$

et

$$T = \frac{\pi}{\lambda} = \pi \sqrt{\frac{MI^2}{\varkappa}}. \tag{13}$$

Ainsi, la durée des oscillations simples, considérée comme étant le temps écoulé entre deux positions consécutives pour lesquelles la vitesse s'annule, est indépendante des résistances constantes représentées par f. Mais toutes les autres conséquences obtenues quand nous avons fait abstraction des résistances, sont loin de subsister.

Pour faciliter la discussion, nous conviendrons de changer l'origine du temps à la fin de chaque oscillation, de manière que cette origine coïncide toujours avec le commencement de l'oscillation actuelle. Il suit de là que λt restera compris entre o et π, et, par suite, que le signe de $\frac{du}{dt}$ sera toujours contraire à celui de $u_0 \pm f$.

En premier lieu, pour qu'il y ait mouvement, il est nécessaire que u varie avec le temps ; ce qui entraîne la condition $u_0 \pm f \gtrless 0$.

Considérons le cas des signes supérieurs, lequel correspond à $\frac{du}{dt}$ positif; le signe de cette quantité devant être contraire à celui de $u_0 + f$, on aura

$$u_0 + f < 0, \qquad \text{ou} \quad -u_0 > f.$$

Dans le cas des signes inférieurs ou de $\frac{du}{dt}$ négatif, on aura, par le motif qui vient d'être énoncé,

$$u_0 - f > 0, \qquad \text{ou} \quad +u_0 > f.$$

Ces deux conditions sont exprimées par l'inégalité

$$u_0^2 > f^2,$$

ou, plus généralement,

$$u_i^2 > f^2; \tag{14}$$

i étant un nombre entier qui servira à distinguer les oscillations simples consécutives.

Le balancier ne pourra donc prendre de mouvement, tant que la valeur absolue de l'amplitude, au commencement de l'oscillation, ne dépassera pas la quantité f.

Maintenant, calculons les valeurs que prendront successivement les amplitudes, en supposant, comme dans tout ce qui va suivre, que la condition (14) soit satisfaite au commencement de chaque oscillation. La valeur de $\sin\lambda t$ restant positive, $\frac{du}{dt}$ aura le signe de $-u_0$, ou, plus généralement, celui de $-u_t$. Admettons, pour fixer les idées, que u_0 soit d'ailleurs une quantité positive; $\frac{du}{dt}$ sera négatif dans la première oscillation, et l'on fera usage des signes inférieurs. A cause de $\cos\lambda t = -1$ à la fin de la première oscillation simple, la formule (11) donnera

$$u_1 = -u_0 + 2f,$$

ou bien

$$-u_1 = +u_0 - 2f.$$

Dans l'oscillation suivante, u_1 devra être mis à la place de u_0 : comme u_1 sera négatif, $\frac{du}{dt}$ sera positif, et l'on fera usage des signes supérieurs, pour calculer la valeur de u_2 qui a lieu à la fin de la deuxième oscillation, pour laquelle on aura encore $\cos\lambda t = -1$; il viendra donc

$$u_2 = -u_1 - 2f.$$

Il est clair que, dans les oscillations suivantes, on obtiendra des résultats consécutifs qui, considérés deux à deux, seront en tout semblables. On aura ainsi la série :

$$(15)\qquad \begin{aligned} -u_1 &= +u_0 - 2f,\\ +u_2 &= -u_1 - 2f,\\ -u_3 &= +u_2 - 2f,\\ +u_4 &= -u_3 - 2f,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Sous cette forme, on reconnaît que la valeur absolue des excursions du balancier, de part et d'autre de sa position d'équilibre, diminue de la quantité $2f$ à chaque oscillation simple. C'est ce que l'on déduit encore en ajoutant successivement les

deux premières, les trois premières, etc., des mêmes équations; on a alors

$$(16)\qquad \begin{aligned} -u_1 &= +u_0 - 2f,\\ +u_2 &= +u_0 - 4f,\\ -u_3 &= +u_0 - 6f,\\ +u_4 &= +u_0 - 8f,\\ &\dots\dots\dots\dots\\ \pm u_i &= +u_0 - 2if. \end{aligned}$$

Pour trouver le nombre d'oscillations que le balancier pourra accomplir avant de s'arrêter, nous aurons recours à la condition (14); observant que $\pm u_i$ désigne, dans la série précédente, une quantité essentiellement positive, nous tirerons de la condition (14)

$$u_0 - 2if > f,$$

d'où

$$i < \frac{u_0}{2f} - \frac{1}{2}.$$

Cette condition étant censée remplie, l'oscillation de rang $i+1$ sera possible; soit $i' = i + 1$ le nombre des oscillations possibles, l'inégalité précédente donnera

$$(17)\qquad i' < \frac{u_0}{2f} + \frac{1}{2}.$$

Si l'on renverse le signe de l'inégalité (14), ou même qu'on le remplace par celui de l'égalité, on exprimera que la $(i+1)^{ième}$ oscillation ne pourra avoir lieu; ce qui fournira la relation

$$(18)\qquad i \geqq \frac{u_0}{2f} - \frac{1}{2},$$

où i désigne actuellement le nombre possible.

De cette manière, le nombre des oscillations qu'effectuera le balancier, sera le nombre entier compris entre $\frac{u_0}{2f} - \frac{1}{2}$ et $\frac{u_0}{2f} + \frac{1}{2}$.

Supposons qu'en expérimentant sur un balancier, on ait constaté qu'il accomplit i oscillations, lorsqu'on l'écarte de sa position d'équilibre d'un angle positif donné u_0; il est clair, d'après ce qui précède, que généralement u_0 pourra varier de certaines quantités très-petites en plus ou en moins, sans que le nombre i varie lui-même. Soient donc u'_0 et u''_0 de nouvelles valeurs de u_0, l'une plus grande et l'autre

plus petite que la valeur primitive u_0, et pour lesquelles le nombre i des oscillations reste le même que le précédent; les nouvelles limites de i

$$\frac{u'_0}{2f} - \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \frac{u''_0}{2f} + \frac{1}{2}$$

seront plus resserrées que les précédentes, et il est clair qu'elles coïncideront avec le nombre i lui-même, à l'instant où une nouvelle valeur $i \pm 1$ de i viendra succéder à la première. Admettons que u'_0 et u''_0 soient les écarts pour lesquels ce changement de valeur de i commence à se manifester; on aura les relations

$$i = \frac{u'_0}{2f} - \frac{1}{2} = \frac{u''_0}{2f} + \frac{1}{2},$$

d'où

$$(19) \qquad (2i+1)f = u'_0, \qquad (2i-1)f = u''_0.$$

De cette manière, on aura un moyen de déterminer la valeur de f avec beaucoup de précision, si l'on a effectué les mesures exactes de u'_0 ou u''_0. Mais l'origine des u, ou la position d'équilibre du balancier soumis à la seule action du ressort, est difficile à obtenir et susceptible d'erreurs : en effet, il résulte de ce qui a été dit plus haut, que le balancier restera en repos, toutes les fois que u_0 sera compris entre les limites $\pm f$; on pourrait donc être exposé à faire une erreur comprise entre les mêmes limites, dans la détermination de la position d'équilibre. Pour s'en affranchir dans la détermination de f au moyen de l'une des formules (19), on observera que le sens des u étant arbitraire, si l'on procède à de nouvelles expériences en changeant le sens des u_0, les erreurs commises dans l'évaluation de la position d'équilibre seront égales et de sens contraire à celles qui avaient lieu auparavant; en sorte que, si l'on combine deux équations de l'une des formules (19) par voie d'addition, l'équation résultante sera affranchie de l'erreur qui peut affecter les valeurs de u'_0 et u''_0 relativement à l'évaluation de l'origine de ces angles.

La position moyenne du balancier dans chacune de ses oscillations, est définie par la demi-somme des valeurs extrêmes de u : faisant $\cos \lambda t = -1$ dans l'équation (11), écrivant u_i à la place de u_0 et u_{i+1} à la place de u, on en tire

$$(20) \qquad \frac{1}{2}(u_i + u_{i+1}) = \mp f.$$

D'ailleurs les formules (15) donneraient directement, dans le cas de u_0 positif,

$$\frac{1}{2}(u_0 + u_1) = +f,$$
$$\frac{1}{2}(u_1 + u_2) = -f,$$
$$\frac{1}{2}(u_2 + u_3) = +f,$$
$$\frac{1}{2}(u_3 + u_4) = -f,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots;$$

d'où il suit que les résistances considérées ont pour effet de déplacer le point milieu des excursions consécutives, de la quantité $\pm f$: ce déplacement a lieu dans le sens opposé au mouvement.

Si l'on fait t égal à la demi-durée d'une oscillation simple, on a $\cos\lambda t = 0$, et d'après l'équation (11) $u = \mp f$; cette valeur, comparée à la formule (20), donne, dans tous les cas,

$$u = \frac{1}{2}(u_i + u_{i+1}).$$

Ainsi, les deux demi-oscillations effectives s'accomplissent dans des temps égaux; mais le milieu ne coïncide pas avec la position d'équilibre, comme dans le cas où l'on néglige f.

En y faisant $u = 0$, l'équation (11) fera connaître le temps t du passage par la position d'équilibre. Si l'on suppose f très-petit par rapport à u_0, l'angle λt différera peu de l'angle droit, et, en ne considérant que la première oscillation, pour laquelle $\frac{du}{dt}$ est négatif dans le cas de u_0 positif (ce qui conduit à l'emploi des signes inférieurs), il vient

$$\cos\lambda t = -\frac{f}{u_0 - f};$$

d'où, aux termes près du troisième ordre,

$$\lambda t = \frac{\pi}{2} + \frac{f}{u_0 - f},$$

ou bien

$$t = \frac{1}{2}T + \frac{f}{u_0 - f}\frac{T}{\pi}:$$

il en résulte que le balancier n'atteint la position d'équilibre, qu'après un temps postérieur à la demi-durée de l'oscillation, de la quantité $\frac{f}{u_0 - f}\frac{T}{\pi}$.

4. *De l'influence des impulsions que le balancier reçoit de la roue d'échappement, en ayant toujours égard aux résistances des pivots.* — La disposition du mécanisme de l'échappement est telle, que le balancier reçoit de la roue d'échappement un choc, toutes les fois que le balancier passe par une position donnée, avec une vitesse dirigée dans le même sens, qui est naturellement celui de l'impulsion reçue; c'est dire que les oscillations ont lieu alternativement avec et sans choc de la part du balancier. Nous ferons abstraction de cette circonstance : que la roue d'échappement peut encore rester en contact avec le balancier, le *mener*, comme on dit, après le choc.

La théorie des chocs est fondée sur cette considération : que les actions mutuelles développées au contact, dans ces phénomènes, sont très-considérables par rapport aux autres forces qui peuvent agir sur les corps, et produisent des variations de vitesse, dans un temps cependant assez court, pour que le déplacement provenant des vitesses acquises avant le choc, puisse être considéré comme nul pendant ce même temps.

L'application que nous ferons de ce principe, consistera à admettre que le balancier, étant parvenu dans une certaine position avec une vitesse acquise, recevra, par l'effet du choc, une variation finie de vitesse, avant d'avoir quitté cette position.

Ceci étant admis, éliminons λt entre les deux équations (11) et (12), nous aurons

$$\frac{du^2}{dt^2} = \lambda^2 [(u_0 \pm f)^2 - (u \pm f)^2] :$$

telle est l'expression du carré de la vitesse angulaire que possède le balancier, lorsqu'il atteint la position définie par l'angle u. L'effet du choc, eu égard au sens dans lequel nous le supposons produit, est d'augmenter d'une certaine quantité constante la force vive acquise ou le carré de la vitesse; en sorte que la valeur nouvelle de $\frac{du^2}{dt^2}$ pourra s'écrire

$$\frac{du'^2}{dt'^2} = \lambda^2 [(u_0 \pm f)^2 (1 + \nu)^2 - (u' \pm f)^2],$$

ν désignant une quantité positive que nous considérerons comme très-petite, pour rester dans la réalité des faits.

Nous accentuons les variables, pour distinguer la nouvelle phase du mouvement, bien que u' reste égal à u, en vertu de ce qui a été établi. Or l'équation que nous venons d'écrire rentrant dans la forme (2) que nous avons intégrée, son intégrale se déduira de l'intégrale de cette dernière, par de simples changements de

lettres. On aura donc, après le choc,

$$(21)\qquad \begin{aligned} u' \pm f &= (u_0 \pm f)\,(1+\nu)\cos\lambda t', \\ \frac{du'}{dt'} &= -\lambda\,(u_0 \pm f)\,(1+\nu)\sin\lambda t', \\ \mathrm{T} &= \frac{\pi}{\lambda}. \end{aligned}$$

Ces expressions ne diffèrent des équations (11), (12) et (13) qu'en ce que $u_0 \pm f$ y est remplacé par $(u_0 \pm f)(1+\nu)$. En vertu de la valeur de $\frac{du'}{dt'}$, les temps du commencement et de la fin des oscillations répondent bien encore à $\lambda t' = i\pi$; mais les excursions u' au commencement et à la fin de la première oscillation sont, en supposant u_0 positif, et prenant les signes inférieurs,

$$(22)\qquad \begin{aligned} u'_0 &= u_0 + \nu\,(u_0 - f), \\ -u'_1 &= u_0 + \nu\,(u_0 - f) - 2f; \end{aligned}$$

en sorte que l'amplitude de la première oscillation excède celle qui avait lieu avant le choc, de la quantité $\nu\,(u_0 - f)$. La durée des oscillations qui suivent le phénomène du choc, reste d'ailleurs la même qu'auparavant.

Il faut cependant remarquer que l'origine du temps correspondante à chacun des deux systèmes de formules n'est pas la même; en effet, par le premier système, on a pour déterminer le temps t écoulé au moment du choc

$$\cos\lambda t = \frac{u-f}{u_0 - f},$$

et, par le second,

$$(23)\qquad \cos\lambda t' = \frac{1}{1+\nu}\,\frac{u'-f}{u_0-f},$$

en nous bornant aux signes inférieurs; donc, u' étant égal à u, t' diffère de t.

Il ne sera pas sans intérêt de déterminer la durée effective de l'oscillation durant laquelle il se produit un choc. Cette durée se compose du temps t écoulé à l'instant du choc, et du temps $\mathrm{T} - t'$ écoulé depuis le choc, jusqu'à la fin de l'oscillation : il s'agit donc de calculer la valeur de $\mathrm{T} - (t' - t)$, t et t' étant déterminés par les formules précédentes.

Ces formules donnent d'abord, à cause de $u = u'$,

$$\cos\lambda t = (1+\nu)\cos\lambda t',$$

d'où

$$(24)\qquad \cos\lambda t - \cos\lambda t' = \nu\cos\lambda t'.$$

On a d'ailleurs, par le théorème de Taylor, en s'arrêtant aux termes du deuxième ordre,

$$\cos\lambda t = \cos\lambda t' - \lambda\sin\lambda t'(t-t') - \frac{\lambda^2}{2}\cos\lambda t'(t-t')^2,$$

d'où

$$\lambda(t-t') = \frac{\cos\lambda t' - \cos\lambda t}{\sin\lambda t'} - \frac{1}{2}\,\frac{\cos\lambda t'\lambda^2(t-t')^2}{\sin\lambda t'},$$

ou bien

$$t'-t = \frac{\cos\lambda t - \cos\lambda t'}{\lambda\sin\lambda t'} + \frac{1}{2}\,\frac{\cos\lambda t'(\cos\lambda t - \cos\lambda t')^2}{\lambda\sin^3\lambda t'};$$

mettant ici la valeur (24), il vient, eu égard à celle de λ,

$$(25)\qquad t'-t = \frac{T}{\pi}\nu\cot\lambda t'\left(1+\frac{1}{2}\nu\cot^2\lambda t'\right).$$

Soit donc T' la durée effective de l'oscillation pendant laquelle le choc est produit, on a

$$(26)\qquad T' = T - \nu\frac{T}{\pi}\,\frac{\cos\lambda t'}{\sin\lambda t'}\left(1+\frac{1}{2}\nu\,\frac{\cos^2\lambda t'}{\sin^2\lambda t'}\right),$$

ou, en mettant la valeur (23), et négligeant les termes du troisième ordre,

$$T' = T - \frac{T}{\pi\sin\lambda t'}\,\frac{\nu}{1+\nu}\,\frac{u'-f}{u_0-f}\left(1+\frac{1}{2}\,\frac{\nu}{\sin^2\lambda t'}\,\frac{u'^2}{u_0^2}\right).$$

Cette expression montre que la durée effective de l'oscillation est diminuée ou augmentée, suivant que le choc se produit avant ou après le passage par le milieu de l'amplitude qui aurait lieu sans la production du choc ; f étant en effet, suivant le numéro précédent, la valeur de u qui répond à ce milieu. L'altération est sensiblement proportionnelle à la distance de ce point, à laquelle le choc se produit. Quand $u'-f$ est une quantité très-petite du premier ordre, auquel cas $\sin\lambda t'$ se réduit à l'unité, il vient simplement

$$T' = T - \nu\frac{T}{\pi}\,\frac{u'-f}{u_0-f};$$

la durée de l'oscillation est alors altérée d'une quantité du deuxième ordre seule-

ment; ce qui revient à dire que le choc, dans cette circonstance, ne modifie pas la durée de l'oscillation : aussi les artistes s'efforcent-ils de faire agir la roue d'échappement, sur le balancier, à une faible distance de sa position d'équilibre; le choc ayant lieu avant que le balancier atteigne cette position.

5. Évaluons le temps compris entre le choc imprimé au balancier dans la position $u = u'$, et celui qu'il recevra en repassant par la même position, dans le cours de la troisième oscillation. Cette question intéresse l'emploi ordinaire des chronomètres, dont les battements marquent le commencement et la fin des temps indiqués par l'une des aiguilles de l'instrument. Ce n'est pas que les chocs coïncident exactement avec les battements; ils les précèdent d'un très-court intervalle que l'on peut regarder comme étant le même dans deux battements consécutifs. Le choc que nous venons de considérer ne produit pas de bruit perceptible; mais, après ce choc, les dents de la roue d'échappement viennent heurter un obstacle qu'on appelle *repos*. A ce nouveau choc, répond effectivement le bruit du battement. L'intervalle de temps, compris entre les deux espèces de choc, dépend de la tension du ressort du rouage; il ne peut donc y avoir d'inégalité sensible dans les intervalles, lorsque l'on ne considère que deux battements consécutifs; d'ailleurs l'inégalité disparaîtrait tout à fait par l'intervention de la *fusée*, que la plupart des artistes adaptent au rouage de leurs chronomètres. Le temps écoulé entre deux chocs consécutifs reçus par le balancier, est donc égal à celui des battements.

Reprenons notre analyse. Le temps écoulé entre l'instant du choc et la fin de la première oscillation est $T - t'$, t' étant déterminé par l'équation (23); la durée de la seconde oscillation qui s'effectue sans choc est T; enfin, soit t'' le temps écoulé entre le commencement de la troisième oscillation, et l'instant où le balancier, atteignant la position $u'' = u' = u$, y reçoit un second choc ; l'intervalle de deux battements, étant désigné par T'', aura pour expression

$$T'' = 2T + t'' - t'; \tag{26 bis}$$

c'est la quantité qu'il s'agit d'évaluer.

Nous avons, par la deuxième équation (22),

$$-u'_1 = u_0 + \nu(u_0 - f) - 2f.$$

Comme la seconde oscillation s'effectue sans choc, la deuxième équation (15) est applicable, en y mettant $-u'_1$ à la place de $-u_1$: on a alors pour valeur de u, au commencement de la troisième oscillation simple,

$$u_2 = u_0 + \nu(u_0 - f) - 4f = (u_0 - f)(1 + \nu) - 3f.$$

D'après ce qui a été déjà plusieurs fois observé, la formule (11) se trouve applicable jusqu'à l'instant du deuxième choc dans la troisième oscillation, en y faisant usage des signes inférieurs : il faut seulement y remplacer u_0 par u_2. On aura donc, en employant des accents ″,

$$(27)\qquad \cos\lambda t'' = \frac{u''-f}{(u_0-f)(1+\upsilon)-4f}.$$

Il ne s'agit plus que de tirer $t''-t'$ de cette équation, combinée avec l'équation (23). Or, en ayant égard à ce que u' et u'' désignent une même quantité, on déduit de ces équations

$$\cos\lambda t'' - \cos\lambda t' = \frac{4f}{(u_0-f)(1+\upsilon)-4f}\cos\lambda t',$$

ou, en négligeant les termes du troisième ordre,

$$\cos\lambda t'' - \cos\lambda t' = \frac{4f}{u_0-f}\left(1+\frac{4f}{u_0-f}-\upsilon\right)\cos\lambda t'.$$

En comparant cette relation à l'équation (24), on voit qu'elles sont identiques pour la forme : en conséquence, il suffira de simples changements de lettres et d'accents, pour former, suivant l'équation (25) déduite de l'équation (24), la valeur de $t'-t''$. On aura donc, en négligeant toujours les quantités du troisième ordre,

$$t'-t'' = \frac{T}{\pi}\frac{4f}{u_0-f}\left(1+\frac{4f}{u_0-f}-\upsilon\right)\cot\lambda t'\left(1+\frac{2f}{u_0-f}\cot^2\lambda t'\right);$$

mettant $\frac{1}{\sin^2\lambda t'}-1$ à la place de $\cot^2\lambda t'$, la dernière parenthèse devient

$$1-\frac{2f}{u_0-f}+\frac{2f}{u_0-f}\frac{1}{\sin^2\lambda t'};$$

substituant pour $\cos\lambda t'$ sa valeur (23), et la valeur de $t'-t''$ dans l'équation (26 *bis*), il viendra

$$(28)\qquad T'' = 2T - \frac{T}{\pi}\frac{4f(u'-f)}{(u_0-f)^2}\left(1+\frac{2f}{u_0-f}-2\upsilon+\frac{2f}{u_0-f}\frac{1}{\sin^2\lambda t'}\right)\frac{1}{\sin\lambda t'}.$$

Cette expression montre que l'intervalle des battements consécutifs n'est point influencé par les chocs, lorsque la résistance f des pivots est nulle ; elle montre encore que, cette résistance n'étant pas nulle, l'intervalle est diminué ou augmenté, suivant que le choc a lieu avant ou après le passage par le milieu de l'amplitude

correspondante à l'absence de chocs, et proportionnellement à la distance angulaire à ce milieu. Quand cette distance n'est pas très-petite, l'influence du choc est représentée par un terme du premier ordre qui dépend de la situation du balancier et non de l'intensité du choc (*), et par des termes du deuxième ordre où figure cette même intensité.

Quand, au contraire, la distance $u' - f$ est très-petite, la valeur de T″ se réduit à

$$T'' = 2T - \frac{T}{\pi}\frac{4f(u'-f)}{(u_0-f)^2}, \tag{29}$$

attendu que $\sin\lambda t'$ peut être remplacé par l'unité. La différence $T'' - 2T$ se réduit alors à une quantité du deuxième ordre entièrement indépendante de l'intensité du choc. En d'autres termes, on peut, dans cette circonstance, considérer l'intervalle de deux battements consécutifs comme étant égal au double de la durée de l'oscillation correspondante à l'absence de toute espèce de résistance.

6. *Mouvement du balancier en ayant égard à la résistance de l'air et à celle des pivots.* — Bien que la théorie suivant laquelle la résistance de l'air est proportionnelle au carré de la vitesse, soit plus ou moins contestable, nous l'appliquerons néanmoins, à défaut d'autre loi établie d'une manière plus satisfaisante.

Chacun des éléments superficiels du balancier éprouve une résistance proportionnelle au carré de sa vitesse ou à $r^2\frac{du^2}{dt^2}$ dans le sens opposé au mouvement, r étant la distance de cet élément à l'axe : la grandeur de cette résistance dépend de la densité de l'air et de l'orientation de l'élément considéré; son moment est ainsi proportionnel à $r^3\frac{du^2}{dt^2}$, et la somme de tous les moments reste proportionnelle à $\frac{du^2}{dt^2}$.

L'équation du mouvement du balancier s'obtiendra donc en ajoutant à f dans l'équation (10), n° **5**, un terme proportionnel à $\frac{du^2}{dt^2}$. En conséquence, nous écrirons

$$\frac{1}{\lambda^2}\frac{d^2u}{dt^2} = -\left(u \pm f \pm \frac{\eta}{2\lambda^2}\frac{du^2}{dt^2}\right);$$

$\frac{1}{\lambda^2}$ tenant toujours lieu de $\frac{\mathrm{MI}^2}{\varkappa}$, et η désignant un nombre constant que nous considérerons comme étant une quantité très-petite du premier ordre.

(*) On reviendra sur cette circonstance à la fin du n° **12**.

Afin d'éviter les complications provenant de l'emploi des doubles signes, nous les remplacerons provisoirement par le signe $+$, sauf à écrire dans les résultats $\pm f$ et $\pm \eta$ à la place de f et η. Ceci convenu, et, pour simplifier encore, posons

(30) $$x = u + f$$

(f devant recevoir ultérieurement le double signe), d'où

$$\frac{dx}{dt} = \frac{du}{dt};$$

nous aurons d'abord

$$\frac{1}{\lambda^2}\frac{d^2 x}{dt^2} = -\left(x + \frac{\eta}{2\lambda^2}\frac{dx^2}{dt^2}\right).$$

Cette forme ne se prête pas à la séparation des variables nécessaire pour l'intégration. Pour éviter cet inconvénient, posons

$$y = \frac{1}{\frac{dx}{dt}},$$

d'où

(31) $$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{y};$$

nous aurons

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dt},$$

et l'équation qu'il s'agit d'intégrer deviendra

$$\frac{1}{\lambda^2}\frac{dy}{dt} - \left(xy^2 + \frac{\eta}{2\lambda^2}\right) = 0;$$

d'où, en multipliant par $dt = ydx$,

(32) $$\frac{1}{\lambda^2}dy - xy^2\,dx - \frac{\eta}{2\lambda^2}ydx = 0.$$

Or, cette équation est de celles qui se prêtent à la séparation des variables, moyennant une nouvelle transformation qui consiste à faire

(33) $$y = wz,$$

d'où

$$dy = wdz + zdw;$$

substituant ces valeurs dans l'équation (32), il vient

$$\frac{1}{\lambda^2} w dz + \frac{1}{\lambda^2} z dw - w^3 z^3 x dx - \frac{\eta}{2\lambda^2} wz dx = 0.$$

Mais w et z n'étant liés à y que par la seule équation (33), on peut établir entre ces quantités une relation arbitraire qui consistera, pour nous, en ce que les termes extrêmes de l'équation précédente se réduisent à zéro : nous aurons ainsi

$$\frac{dz}{z} = \frac{1}{2}\eta dx,$$

et les termes restants de l'équation proposée donneront

$$\frac{1}{\lambda^2} dw = w^3 z^2 x dx.$$

La première s'intègre immédiatement : son intégrale est

$$\log z = \frac{1}{2}\eta x,$$

d'où

(34) $$z = e^{\frac{1}{2}\eta x};$$

e désignant, suivant l'usage, la base des logarithmes népériens.

Substituant cette valeur dans la seconde, il vient

$$\frac{1}{\lambda^2}\frac{dw}{w^3} = e^{\eta x} x dx,$$

équation où les variables sont entièrement séparées. L'intégrale du premier membre est $-\frac{1}{2\lambda^2}\frac{1}{w^2}$. Quant au second membre, si nous différentions la fonction $xe^{\eta x}$, nous aurons

$$e^{\eta x} dx + \eta e^{\eta x} x dx = d.xe^{\eta x}:$$

intégrons maintenant chaque terme séparément, ce qui donnera

$$\frac{1}{\eta} e^{\eta x} + \eta \int e^{\eta x} x dx = xe^{\eta x};$$

d'où

$$\int e^{\eta x} x dx = -\frac{1}{\eta^2}(1 - \eta x) e^{\eta x} + \text{const.}:$$

il vient donc, moyennant un changement de signes,

$$\frac{1}{2\lambda^2}\frac{1}{\omega^2} = \frac{1}{\eta^2}(1-\eta x)\,e^{\eta x} + \text{const.}$$

On a d'ailleurs, d'après les relations (33), (34) et (31),

$$\frac{1}{\omega^2} = \frac{z^2}{y^2} = e^{\eta x}\frac{dx^2}{dt^2};$$

substituant la seconde de ces valeurs dans l'équation précédente, on a finalement

$$(35)\qquad \frac{1}{2\lambda^2}\frac{dx^2}{dt^2}e^{\eta x} = \frac{1}{\eta^2}(1-\eta x)\,e^{\eta x} + \text{const.}$$

Cette équation fournirait aisément la valeur de dt en fonction de dx; mais on ne pourrait l'intégrer que par les quadratures. En outre, la petitesse de η serait un obstacle dans les applications. Nous aurons donc recours aux développements en séries.

On a d'abord

$$e^{\eta x} = 1 + \eta x + \frac{1}{2}\eta^2 x^2 + \frac{1}{6}\eta^3 x^3 + \frac{1}{24}\eta^4 x^4 + \ldots,$$

$$-\eta x e^{\eta x} = -\eta x - \eta^2 x^2 - \frac{1}{2}\eta^3 x^3 - \frac{1}{6}\eta^4 x^4 - \ldots,$$

d'où

$$\frac{1}{\eta^2}(1-\eta x)\,e^{\eta x} = \frac{1}{\eta^2} - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}\eta x^3 - \frac{1}{8}\eta^2 x^4 - \ldots.$$

Si donc, on comprend le terme $\frac{1}{\eta^2}$ dans la constante, l'équation (35) devient

$$\frac{1}{2\lambda^2}\frac{dx^2}{dt^2}e^{\eta x} = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}\eta x^3 - \frac{1}{8}\eta^2 x^4 - \ldots + \text{const.}$$

Soit x_0 une valeur de x pour laquelle $\frac{dx}{dt}$ est nul, on aura

$$0 = -\frac{1}{2}x_0^2 - \frac{1}{3}\eta x_0^3 - \frac{1}{8}\eta^2 x_0^4 - \ldots + \text{const.}$$

En soustrayant cette équation de la précédente, on éliminera la constante, et si l'on multiplie l'équation résultante par $2e^{-\eta x}$, il viendra

$$\frac{1}{\lambda^2}\frac{dx^2}{dt^2} = e^{-\eta x}\left[(x_0^2 - x^2) + \frac{2}{3}\eta(x_0^3 - x^3) + \frac{1}{4}\eta^2(x_0^4 - x^4) + \ldots\right],$$

ou, en mettant en évidence le facteur $x_0 - x$,

$$\frac{1}{\lambda^2}\frac{dx^2}{dt^2} = e^{-\eta x}(x_0 - x)\left[x_0 + x + \frac{2}{3}\eta(x_0^2 + x_0 x + x^2) + \frac{1}{4}\eta^2(x_0 + x)(x_0^2 + x^2) + \ldots\right].$$

Or, on a

$$e^{-\eta x} = 1 - \eta x + \frac{1}{2}\eta^2 x^2 - \ldots.$$

Multipliant la seconde parenthèse par ce développement, il viendra

$$(36)\quad \frac{1}{\lambda^2}\frac{dx^2}{dt^2} = (x_0 - x)\left[x_0 + x + \frac{1}{3}\eta(2x_0^2 - x_0 x - x^2) + \frac{1}{12}\eta^2(3x_0^3 - 5x_0^2 x + x_0 x^2 + x^3) + \ldots\right],$$

ou encore

$$(36\ bis)\quad \frac{1}{\lambda^2}\frac{dx^2}{dt^2} = (x_0 - x)(x_0 + x) + \frac{1}{3}\eta(x_0 - x)^2(2x_0 + x) + \frac{1}{12}\eta^2(x_0 - x)^3(3x_0 + x) + \ldots.$$

7. L'intégration de l'une ou l'autre de ces expressions exige préalablement la réduction du deuxième membre à ses facteurs du premier ou tout au moins du second degré; d'ailleurs il est nécessaire de fixer les valeurs réelles de x qui peuvent le rendre nul. Nous effectuerons cette réduction en développant chacun des facteurs en séries ordonnées suivant les puissances de η et négligeant, comme dans le polynôme proposé, les termes d'ordre supérieur au second. L'un des facteurs $x - x_0$ est déjà connu. Il reste à obtenir les facteurs du polynôme compris entre $\Big[\quad\Big]$ dans le deuxième membre de l'équation (36).

Nous diviserons cette recherche en deux parties.

En premier lieu, nous nous proposerons seulement d'obtenir le terme principal et le terme en η de chacun des facteurs. Les termes du second ordre étant supprimés, la parenthèse se réduit à un polynôme du second degré dont les racines s'obtiendraient aisément par la méthode ordinaire : nous suivrons une autre voie.

Si nous mettons l'un des facteurs sous la forme

$$x_0 + x + \alpha\eta,$$

il est clair que l'autre facteur aura pour terme principal l'unité; d'autre part, le produit du deuxième degré $-\frac{1}{3}\eta x^2$ ne pouvant provenir que du produit du terme x du premier facteur par $-\frac{1}{3}\eta x$, nous poserons

$$(x_0 + x + \alpha\eta)\left(1 - \frac{1}{3}\eta x\right) = x_0 + x + \frac{1}{3}\eta(2x_0^2 - x_0 x - x^2).$$

Nous devons égaler séparément les termes des deux membres qui sont indépendants de η, et les coefficients de η, sans avoir égard aux termes en η^2 que nous négligeons ici : or les premiers fournissent une identité, en vertu de leur détermination primitive ; les seconds fournissent l'équation

$$\alpha - \frac{1}{3}x(x_0 + x) = \frac{1}{3}(2x_0^2 - x_0 x - x^2).$$

laquelle doit encore être identique pour toute valeur de x. Les termes en x se détruisent identiquement, en vertu du choix du facteur $1 - \frac{1}{3}\eta x$, et il reste

$$\alpha = \frac{2}{3}x_0^2.$$

Ainsi le polynôme dont nous nous occupons est représenté, aux termes près du deuxième ordre, par le produit

$$\left(x_0 + x + \frac{2}{3}\eta x_0^2\right)\left(1 - \frac{1}{3}\eta x\right).$$

Pour avoir égard actuellement aux quantités du second ordre, nous ajouterons le terme $\alpha'\eta^2$ au premier facteur. Quant au second facteur et au troisième qu'il faudrait ajouter, nous les réunirons en un seul du 2e degré, dont le second facteur sera la partie principale. Pour compléter ce facteur, il faut évidemment y joindre un terme du second ordre $\beta'\eta^2$ indépendant de x et un terme du même ordre en x^2 ; or on aperçoit aisément que ce dernier terme est $+\frac{1}{12}\eta^2 x^2$, puisque ce terme multiplié par x du premier facteur devra reproduire le seul terme du troisième degré en x qui est $+\frac{1}{12}\eta^2 x^3$. On aura donc l'équation

$$\begin{aligned}\left(x_0 + x + \frac{2}{3}\eta x_0^2 + \alpha'\eta^2\right)\left(1 - \frac{1}{3}\eta x + \beta'\eta^2 + \frac{1}{12}\eta^2 x^2\right)\\ = x_0 + x + \frac{1}{3}\eta(2x_0^2 - x_0 x - x^2) + \frac{1}{12}\eta^2(3x_0^3 - 5x_0^2 x + x_0 x^2 + x^3).\end{aligned}$$

L'identité des termes principaux et des termes du premier ordre étant établie par ce qui précède, nous n'avons à nous occuper que de termes en η^2. Identifiant leurs coefficients, il vient

$$\beta'(x_0 + x) + \frac{1}{12}(x_0 + x)x^2 - \frac{2}{9}x_0^2 x + \alpha' = \frac{1}{4}x_0^3 - \frac{5}{12}x_0^2 x + \frac{1}{12}x_0 x^2 + \frac{1}{12}x^3:$$

or, les termes en x^2 et en x^3 se détruisent identiquement, et il vient, en identifiant les termes indépendants de x et ceux qui dépendent de la première puissance de cette variable,

$$\beta' x_0 + \alpha' = \frac{1}{4} x_0^3,$$

$$\beta' - \frac{2}{9} x_0^2 = -\frac{5}{12} x_0^2;$$

on en tire

$$\beta' = -\frac{7}{36} x_0^2, \qquad \alpha' = +\frac{4}{9} x_0^3:$$

complétant les facteurs à l'aide de ces valeurs, on aura définitivement

$$(37) \quad \frac{1}{\lambda^2}\frac{dx^2}{dt^2} = (x_0 - x)\left(x_0 + x + \frac{2}{3} x_0^2 \eta + \frac{4}{9} x_0^3 \eta^2\right)\left(1 - \frac{7}{36} x_0^2 \eta^2 - \frac{1}{3} x\eta + \frac{1}{12} x^2 \eta^2\right).$$

En égalant à zéro le dernier facteur, on trouverait

$$x\eta = 2 \pm \sqrt{\frac{7}{3} x_0^2 \eta^2 - 8},$$

valeurs qui ne pourraient devenir réelles que dans le cas où l'on aurait

$$x_0^2 \eta^2 \geqq \frac{24}{7}.$$

Mais cette relation est évidemment incompatible avec l'hypothèse que η, ou plutôt le produit $x\eta$, reste assez petit pour qu'on en puisse négliger, dans les développements, les puissances supérieures à la seconde. Nous admettrons donc que les racines du facteur du deuxième degré sont imaginaires. Posant alors

$$(38) \qquad x_1 = -\left(x_0 + \frac{2}{3} x_0^2 \eta + \frac{4}{9} x_0^3 \eta^2\right),$$

on a

$$(38\ bis) \qquad \frac{1}{\lambda^2}\frac{dx^2}{dt^2} = (x_0 - x)(x - x_1)\left(1 - \frac{7}{36} x_0^2 \eta^2 - \frac{1}{3} x\eta + \frac{1}{12} x^2 \eta^2\right).$$

Les seules valeurs réelles de x pour lesquelles la vitesse $\frac{du}{dt}$ pourra s'annuler sont ainsi x_0 et x_1.

Élevons le facteur du deuxième degré à la puissance $-\frac{1}{2}$, il viendra

$$\left(1-\frac{7}{36}x_0^2\eta^2-\frac{1}{3}x\eta+\frac{1}{12}x^2\eta^2\right)^{-\frac{1}{2}}=1+\frac{7}{72}x_0^2\eta^2+\frac{1}{6}x\eta,$$

valeur d'où le terme en x^2 a disparu. Observant que la puissance -1 de ce même facteur est égale au carré du second membre de l'équation que nous venons d'écrire, nous aurons

$$(39)\qquad \frac{dx^2}{(x_0-x)(x-x_1)}\left(1+\frac{7}{72}x_0^2\eta^2+\frac{1}{6}x\eta\right)^2=\lambda^2 dt^2.$$

8. Moyennant de simples transformations, l'équation précédente sera facile à intégrer.

Posons en effet

$$(40)\qquad \begin{aligned} a&=\frac{1}{2}(x_0-x_1),\\ b&=\frac{1}{2}(x_0+x_1), \end{aligned}$$

d'où

$$(41)\qquad \begin{aligned} x_0&=b+a,\\ x_1&=b-a; \end{aligned}$$

nous aurons

$$(42)\qquad (x_0-x)(x-x_1)=[a-(x-b)][a+(x-b)]=a^2-(x-b)^2,$$

quantité qui doit être essentiellement positive pour que $\frac{dx}{dt}$ reste réel ; en sorte que $x-b$ oscillera entre les limites $\pm a$.

Avant d'aller plus loin, nous formerons les valeurs explicites de a et de b au moyen de l'expression (38), ce qui donnera

$$(43)\qquad \begin{aligned} a&=x_0\left(1+\frac{1}{3}x_0\eta+\frac{2}{9}x_0^2\eta^2\right),\\ b&=-x_0\left(\frac{1}{3}x_0\eta+\frac{2}{9}x_0^2\eta^2\right). \end{aligned}$$

Le terme $+\frac{1}{6}x\eta$ qui figure dans l'équation (39) peut être remplacé par $\frac{1}{6}(x-b)\eta+\frac{1}{6}b\eta$, et $+\frac{1}{6}b\eta$ par $-\frac{1}{18}x_0^2\eta^2$. Dès lors, et en vertu de la rela-

tion (42), l'équation (39) deviendra

(43 *bis*) $$\frac{dx^2}{a^2-(x-b)^2}\left[1+\frac{1}{24}x_0^2\gamma_i^2+\frac{1}{6}(x-b)\gamma_i\right]^2=\lambda^2 dt^2.$$

Or, à cause des limites de $x-b$ que nous venons de fixer, nous pouvons poser

(44) $$x-b=a\cos\varphi,$$

d'où

(45) $$\frac{dx}{dt}=-a\sin\varphi\frac{d\varphi}{dt};$$

au moyen de ces valeurs, l'équation précédente devient

$$d\varphi^2\left(1+\frac{1}{24}x_0^2\gamma_i^2+\frac{1}{6}\gamma_i a\cos\varphi\right)^2=\lambda^2 dt^2:$$

extrayant la racine sans avoir égard au double signe, et intégrant, il vient

(46) $$\varphi\left(1+\frac{1}{24}x_0^2\gamma_i^2\right)+\frac{1}{6}\gamma_i a\sin\varphi=\lambda t.$$

Nous n'écrivons pas de constante, afin que le temps t soit compté de l'instant où l'on a $\varphi=0$, ou bien $x=a+b=x_0$. Le double signe a été négligé, attendu que l'emploi du signe $-$ n'aurait eu d'autre effet que de changer le signe de φ, et que ce changement n'affecte pas la valeur de x en fonction de cette variable.

Les deux formules (44) et (46) offrent la solution du problème de la détermination de x en fonction du temps; d'où celle de l'angle u, moyennant l'application des signes convenables devant f et η. Néanmoins, on trouvera sans doute bon d'obtenir la valeur de x, sans être obligé de recourir à l'auxiliaire φ. A cet effet, soit

(47) $$\lambda_1=\frac{\lambda}{1+\frac{1}{24}x_0^2\gamma_i^2}:$$

l'équation (46) pourra s'écrire, en négligeant les termes du troisième ordre,

(47 *bis*) $$\varphi=\lambda_1 t-\frac{1}{6}\gamma_i a\sin\varphi,$$

d'où

$$\varphi=\lambda_1 t-\frac{1}{6}\gamma_i a\sin\left(\lambda_1 t-\frac{1}{6}\gamma_i a\sin\varphi\right).$$

Or il suffit de calculer ici $\sin\left(\lambda_1 t - \frac{1}{6}\eta a \sin\varphi\right)$ en tenant compte seulement des termes du premier ordre, ce qui permet d'y remplacer φ par $\lambda_1 t$: on a donc

$$\sin\left(\lambda_1 t - \frac{1}{6}\eta a \sin\varphi\right) = \sin\lambda_1 t - \frac{1}{6}\eta a \sin\lambda_1 t \cos\lambda_1 t,$$

et, par suite,

(48)
$$\varphi = \lambda_1 t - \frac{1}{6}\eta a \sin\lambda_1 t + \frac{1}{72}\eta^2 a^2 \sin 2\lambda_1 t.$$

Soit, pour abréger,

$$\gamma = \frac{1}{6}\eta a \sin\lambda_1 t - \frac{1}{72}\eta^2 a^2 \sin 2\lambda_1 t,$$

on aura

$$\cos\varphi = \cos(\lambda_1 t - \gamma) = \cos\lambda_1 t\left(1 - \frac{1}{2}\gamma^2\right) + \gamma\sin\lambda_1 t :$$

substituant la valeur de γ et changeant les puissances et produits des sinus et cosinus en cosinus de multiples; puis, mettant le résultat dans l'équation (44), il vient

(49)
$$x = b + \frac{1}{12}\eta a^2 + a\left(1 - \frac{1}{96}\eta^2 a^2\right)\cos\lambda_1 t - \frac{1}{12}\eta a^2 \cos 2\lambda_1 t + \frac{1}{96}\eta^2 a^3 \cos 3\lambda_1 t.$$

Les formules (48) et (49) auraient pu être déduites, par voie de comparaison, des relations que fournit la *Mécanique céleste* entre le temps, l'anomalie excentrique et le rayon vecteur, dans le mouvement elliptique.

On verra dans un instant que les limites de x répondent à $\lambda_1 t = i\pi$. Si en conséquence on fait successivement $\lambda_1 t$ nul et égal à π, dans l'expression précédente de x, on trouve $x = b + a$ et $x = b - a$, valeurs qui s'accordent avec celles de x_0 et x_1, équations (41). Au moyen des valeurs de a et b, la partie constante de x est

(50)
$$b + \frac{1}{12}\eta a^2 = -\eta x_0^2\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{6}x_0\eta\right).$$

En différentiant l'équation (49), on obtient

(51)
$$\frac{dx}{dt} = -\lambda_1 a\left[\left(1 - \frac{1}{96}\eta^2 a^2\right)\sin\lambda_1 t - \frac{1}{6}\eta a \sin 2\lambda_1 t + \frac{1}{32}\eta^2 a^2 \sin 3\lambda_1 t\right].$$

Sous cette forme, on voit que la vitesse s'annule lorsque l'on a $\lambda_1 t = i\pi$, c'est-à-

dire, toutes les fois que l'angle $\lambda_1 t$ reçoit un accroissement égal à π. Soit T_1 la durée d'une oscillation, on aura

$$T_1 = \frac{\pi}{\lambda_1}.$$

Or, la durée de l'oscillation qui a lieu en l'absence de toute résistance est

$$T = \frac{\pi}{\lambda},$$

on a donc, en vertu de la relation (47),

$$T_1 = T\left(1 + \frac{1}{24} x_0^2 \eta^2\right). \tag{52}$$

Ainsi, le frottement des pivots n'a point encore d'influence sur la durée des oscillations, et la résistance de l'air ne la fait varier que de quantités du deuxième ordre, qui se réduiraient au quatrième si les amplitudes étaient petites comme dans le pendule plan. Dans le cas du pendule, on a également trouvé qu'en négligeant les quantités du deuxième ordre, la durée des oscillations est indépendante de la résistance de l'air.

9. Pour l'application des formules précédentes, il est nécessaire de rétablir les doubles signes de f et η : en vertu des équations (30) et (38), on a

$$(53)\qquad \begin{aligned} &x = u \pm f, \qquad x_0 = u_0 \pm f. \\ &-u_1 = u_0 \pm 2f \pm \frac{2}{3}(u_0 \pm f)^2 \eta + \frac{4}{9}(u_0 \pm f)^3 \eta^2. \end{aligned}$$

Les valeurs de a et de b doivent s'écrire actuellement

$$(54)\qquad \begin{aligned} a &= +(u_0 \pm f)\left[1 \pm \frac{1}{3}(u_0 \pm f)\eta + \frac{2}{9}(u_0 \pm f)^2 \eta^2\right], \\ b &= -(u_0 \pm f)\left[\pm \frac{1}{3}(u_0 \pm f)\eta + \frac{2}{9}(u_0 \pm f)^2 \eta^2\right]; \end{aligned}$$

il vient ensuite

$$(55)\qquad \begin{aligned} &u \pm f = b + a\cos\varphi, \\ &\varphi\left[1 + \frac{1}{24}(u_0 \pm f)^2 \eta^2\right] \pm \frac{1}{6}\eta a \sin\varphi = \lambda t; \end{aligned}$$

$$(56)\qquad \begin{aligned} &\lambda_1 = \frac{\lambda}{1 + \frac{1}{24}(u_0 \pm f)^2 \eta^2}, \quad T = \frac{\pi}{\lambda}, \quad T_1 = T\left[1 + \frac{1}{24}(u_0 \pm f)^2 \eta^2\right] = \frac{\pi}{\lambda_1}, \\ &\varphi = \lambda_1 t \mp \frac{1}{6}\eta a \sin\lambda_1 t + \frac{1}{72}\eta^2 a^2 \sin 2\lambda_1 t; \end{aligned}$$

$$(57)\quad \begin{aligned} u \pm f = \mp \frac{1}{4}\eta\,(u_0 \pm f)^2 - \frac{1}{6}\eta^2\,(u_0 \pm f)^3 + a\left(1 - \frac{1}{96}\eta^2 a^2\right)\cos\lambda_1 t \\ \mp \frac{1}{12}\eta a^2 \cos 2\lambda_1 t + \frac{1}{96}\eta^2 a^3 \cos 3\lambda_1 t, \\ \frac{du}{dt} = -\lambda_1 a\left[\left(1 - \frac{1}{96}\eta^2 a^2\right)\sin\lambda_1 t \mp \frac{1}{6}\eta a \sin 2\lambda_1 t + \frac{1}{32}\eta^2 a^2 \sin 3\lambda_1 t\right]. \end{aligned}$$

Nous rappellerons que les signes supérieurs répondent au cas de $\frac{du}{dt}$ positif, et les inférieurs au cas où $\frac{du}{dt}$ est négatif.

Comme nous l'avons fait plus haut, nous prendrons, pour origine du temps, celui qui répond au commencement des oscillations que nous aurons à considérer.

La condition pour que le mouvement se développe est que x ou u puisse varier avec le temps : elle exige que a ne soit pas nul ou que $(u_0 \pm f)$ soit différent de zéro, puisque la petitesse de η laisse toujours positive la parenthèse qui multiplie $(u_0 \pm f)$ dans la valeur de a. Nous la supposerons effectivement remplie. Nous admettrons encore que $u_0 \pm f$ est une quantité positive dans la première oscillation; il s'ensuivra que $\frac{du}{dt}$ sera négatif durant cette oscillation, et les signes inférieurs devront être employés : il est clair que, dans la deuxième, on devra se servir des signes supérieurs, en employant à la place de u_0 la valeur u_1 de u qui a lieu à la fin de la première oscillation.

Les valeurs de u, à la fin de chaque oscillation, seront données par les formules

$$(58)\quad \begin{aligned} -u_1 &= +u_0 - 2f - \frac{2}{3}(u_0 - f)^2\eta + \frac{4}{9}(u_0 - f)^3\eta^2, \\ +u_2 &= -u_1 - 2f - \frac{2}{3}(u_1 + f)^2\eta - \frac{4}{9}(u_1 + f)^3\eta^2, \\ -u_3 &= +u_2 - 2f - \frac{2}{3}(u_2 - f)^2\eta + \frac{4}{9}(u_2 - f)^3\eta^2, \\ +u_4 &= -u_3 - 2f - \frac{2}{3}(u_3 + f)^2\eta - \frac{4}{9}(u_3 + f)^3\eta^2. \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Pour mieux mettre en évidence la loi de la variation des amplitudes, il convient de considérer seulement leurs valeurs absolues; en les désignant par α_i, on aura

$$(58\ bis)\quad \begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha_0 - 2f - \frac{2}{3}(\alpha_0 - f)^2\eta + \frac{4}{9}(\alpha_0 - f)^3\eta^2, \\ \alpha_2 &= \alpha_1 - 2f - \frac{2}{3}(\alpha_1 - f)^2\eta + \frac{4}{9}(\alpha_1 - f)^3\eta^2. \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Sous cette forme, on aperçoit aisément que les amplitudes seront constamment réduites, car l'ordre de grandeur du dernier terme ne permet pas de comparer son influence à celle des second et troisième termes.

Bien que la loi de variation des amplitudes soit compliquée, on conçoit néanmoins la possibilité d'appliquer les équations précédentes à la détermination de la valeur de η au moyen des amplitudes extrêmes et du nombre qui les sépare, si l'on suppose d'ailleurs f déterminé par l'observation des amplitudes dans le vide.

Le milieu de chaque oscillation répondra dans tous les cas à $\frac{1}{2}(u_i + u_{i+1})$: la série de ces valeurs est

$$(59)\qquad \begin{aligned}
\frac{1}{2}(u_0 + u_1) &= +f + \frac{1}{3}(u_0 - f)^2\eta - \frac{2}{9}(u_0 - f)^3\eta^2,\\
\frac{1}{2}(u_1 + u_2) &= -f - \frac{1}{3}(u_1 + f)^2\eta - \frac{2}{9}(u_1 + f)^3\eta^2,\\
\frac{1}{2}(u_2 + u_3) &= +f + \frac{1}{3}(u_2 - f)^2\eta - \frac{2}{9}(u_2 - f)^3\eta^2,\\
\frac{1}{2}(u_3 + u_4) &= -f - \frac{1}{3}(u_3 + f)^2\eta - \frac{2}{9}(u_3 + f)^3\eta^2.\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

On voit ainsi que le milieu des oscillations se transporte de part et d'autre de la position d'équilibre, de quantités qui varient à raison des amplitudes.

Calculons le temps que le balancier met à accomplir la première moitié de la première oscillation : pour cela, nous ferons usage du signe inférieur dans la première équation (55) qui donnera d'abord

$$\cos\varphi = \frac{u - f - b}{a}.$$

En y mettant la valeur de $\frac{1}{2}(u_0 + u_1)$ à la place de u, et celle de b prise avec les signes inférieurs, il vient $\cos\varphi = 0$ (*), d'où $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

(*) C'est ce que l'on obtiendrait immédiatement en considérant que $\frac{x_0 + x_1}{2} = \frac{1}{2}(u_0 + u_1) \pm f$; ce qui donne, en vertu de l'équation (40), et en ayant égard au signe inférieur,

$$\frac{1}{2}(u_0 + u_1) - f - b = 0.$$

Alors la deuxième équation (55) donne, en ayant égard à la valeur de a,

$$\lambda t = \frac{\pi}{2}\left[1 + \frac{1}{24}(u_0 - f)^2 \eta^2\right] - \frac{1}{6}\eta (u_0 - f)\left[1 - \frac{1}{3}(u_0 - f)\eta\right],$$

d'où, en vertu des relations (56),

$$t = \frac{1}{2}\mathrm{T}_1 - \frac{1}{6}\frac{\eta}{\lambda}(u_0 - f)\left[1 - \frac{1}{3}(u_0 - f)\eta\right];$$

en sorte que l'influence de la résistance de l'air est d'avancer l'instant du passage du balancier par le milieu de sa course.

Si l'on se propose de déterminer l'instant du passage par la position d'équilibre, on aura $u = 0$, d'où

$$\cos\varphi = -\frac{(f + b)}{a}:$$

mettant ici les valeurs de b et a prises avec les signes inférieurs, il vient

$$\cos\varphi = -\frac{f + \frac{1}{3}(u_0 - f)^2\eta - \frac{2}{9}(u_0 - f)^3\eta^2}{(u_0 - f)\left[1 - \frac{1}{3}(u_0 - f)\eta\right]},$$

ou

$$\cos\varphi = -\left[\frac{f}{u_0 - f} + \frac{1}{3}u_0\eta - \frac{1}{9}(u_0 - f)^2\eta^2\right]:$$

on en tire

$$\varphi = \frac{\pi}{2} + \frac{f}{u_0 - f} + \frac{1}{3}u_0\eta - \frac{1}{9}(u_0 - f)^2\eta^2;$$

puis, en vertu des équations (55) et (56),

$$t = \frac{1}{2}\mathrm{T}_1 + \frac{1}{\lambda}\left[\frac{f}{u_0 - f} + \frac{1}{6}(u_0 + f)\eta - \frac{1}{18}(u_0 - f)^2\eta^2\right]:$$

il s'ensuit que le balancier met à atteindre sa position d'équilibre, un temps supérieur à la moitié de la durée d'une oscillation; c'est l'effet que produit aussi la résistance de l'air dans le mouvement du pendule ordinaire.

10. *De l'influence du choc produit par l'échappement, en ayant égard à la résistance de l'air et à celle des pivots.* — Les considérations exposées dans le n° 4 ne seront pas reproduites ici : nous nous bornerons à rappeler que la durée du choc

est considérée comme nulle, et que, sans avoir eu le temps de changer de position, le balancier a reçu un accroissement de force vive.

On exprimera cette circonstance en ajoutant une constante positive au second membre de l'équation (37). Remarquons d'abord que, si l'on fait abstraction des termes du second ordre, cette addition s'obtiendra en multipliant x_0 par le facteur $1 + \upsilon$; υ désignant une quantité positive et très-petite.

En effet, les termes principaux se réduisant à $x_0^2 - x^2$, on voit que ces termes seront simplement augmentés d'une constante, par le fait de l'introduction du facteur $1 + \upsilon$. Il est d'ailleurs évident que les variations des autres termes, qui en seront la suite, se réduiront à des quantités du second ordre et des ordres supérieurs.

Maintenant, nous dirons, sans entrer dans plus de détail, que, pour détruire les variations que pourra amener le facteur $1 + \upsilon$ dans les termes du second ordre, il suffira d'ajouter au second facteur du second membre de l'équation (37) le terme

$$-2x_0^2(1+\upsilon)^2\upsilon\eta;$$

en sorte que l'équation du mouvement après le choc deviendra

$$(60)\quad \begin{aligned} \frac{1}{\lambda^2}\frac{dx^2}{dt^2} = [x_0(1+\upsilon) - x]\Big[x_0(1+\upsilon) + x + \frac{2}{3}x_0^2(1+\upsilon)^2\eta + \frac{4}{9}x_0^3(1+\upsilon)^3\eta^2 \\ - 2x_0^2(1+\upsilon)^2\eta\upsilon\Big]\Big[1 - \frac{7}{36}x_0^2(1+\upsilon)^2\eta^2 - \frac{1}{3}x\eta + \frac{1}{12}x^2\eta^2\Big]. \end{aligned}$$

Ayant reconnu que le changement de x_0 en $x_0(1+\upsilon)$ se réduit à l'addition d'une constante, quand on s'en tient aux termes du premier ordre, il suffit de calculer les termes du second ordre dépendants de υ et de s'assurer que leurs parties variables se détruisent.

Le dernier facteur ne contenant aucun terme du premier ni du second ordre en υ, et sa partie principale étant l'unité, ces termes du second ordre en υ seront fournis par ceux que contient le produit des deux premiers facteurs et par les termes du premier ordre en υ que contient ce produit, multipliés par le seul terme $-\frac{1}{3}x\eta$ du premier ordre qui existe dans le troisième facteur.

Les termes du second ordre en υ contenus dans le produit des deux premiers facteurs se réduisent à

$$x_0^2\upsilon^2 + \frac{2}{3}x_0^2x\eta\upsilon.$$

Les termes du premier ordre contenus dans ce même produit se réduisent à la

constante

$$2x_0^2 \upsilon;$$

si donc on multiplie cette quantité par $-\frac{1}{3}x\eta$, on obtient $-\frac{2}{3}x_0^2 x\eta\upsilon$, qui détruit le terme variable du second ordre contenu dans le produit des deux facteurs : ainsi les termes du second ordre en υ se réduisent effectivement à la quantité constante

$$x_0^2 \upsilon^2.$$

Ayant obtenu les termes constants en υ du premier et du second ordre, qui sont contenus dans le produit des deux premiers facteurs, et observant que les constantes qui suivent l'unité dans le troisième facteur sont des quantités du second ordre ; on en conclut que la constante ajoutée à la valeur de $\frac{1}{\lambda^2}\frac{dx^2}{dt^2}$ est simplement

$$x_0^2(2\upsilon + \upsilon^2);$$

ce qui donne, pour l'accroissement du carré de la vitesse angulaire,

$$\lambda^2 x_0^2 (2\upsilon + \upsilon^2),$$

quantité essentiellement positive.

Distinguons par un accent ′ les valeurs que prennent les variables après le choc, et posons, pour abréger, en rétablissant dès à présent le double signe devant η,

(61)
$$x'_0 = x_0(1+\upsilon),$$
$$-x'_1 = x'_0 \pm \frac{2}{3}x'^2_0\eta + \frac{4}{9}x'^3_0\eta^2 \mp 2x'^2_0\eta\upsilon:$$

l'équation (60) deviendra

$$\frac{1}{\lambda^2}\frac{dx'^2}{dt'^2} = [x'_0 - x'][x' - x'_1]\left(1 - \frac{7}{36}x_0'^2\eta^2 \mp \frac{1}{3}x'\eta + \frac{1}{12}x'^2\eta^2\right).$$

Si l'on compare cette équation à l'équation (38 *bis*), on reconnaît qu'elle n'en diffère que par l'accentuation des lettres autres que η et λ. L'intégrale de la première pourra donc se déduire de celle de la seconde, moyennant l'accentuation des lettres correspondantes. Sans nouveau calcul, on posera

(62)
$$a' = \frac{1}{2}(x'_0 - x'_1),$$
$$b' = \frac{1}{2}(x'_0 + x'_1);$$

d'où

$$(63)\qquad \begin{aligned} x'_0 &= b' + a', \\ x'_1 &= b' - a', \end{aligned}$$

et, en ayant égard à la valeur (61) de x'_1,

$$(64)\qquad \begin{aligned} a' &= + x'_0 \left(1 \pm \frac{1}{3} x'_0 \gamma + \frac{2}{9} x'^2_0 \gamma^2 \mp x'_0 \gamma \nu\right), \\ b' &= - x'_0 \left(\pm \frac{1}{3} x'_0 \gamma + \frac{2}{9} x'^2_0 \gamma^2 \mp x'_0 \gamma \nu\right): \end{aligned}$$

on aura dès lors, pour résultat de l'intégration,

$$(65)\qquad \begin{gathered} x' - b' = a' \cos\varphi', \\ \varphi' \left(1 + \frac{1}{24} x'^2_0 \gamma^2\right) \pm \frac{1}{6} \gamma a' \sin\varphi' = \lambda t' \quad \text{ou} \quad \varphi' \pm \frac{1}{6} \gamma a' \sin\varphi' = \lambda_1 t'. \end{gathered}$$

Le changement de x_0 en x'_0 ne produit ici dans le coefficient de φ' et dans l'expression (52) qu'une erreur du troisième ordre : il en résulte que la durée T_1 de l'oscillation n'est point altérée par le choc, ce qui ne veut pas dire que l'oscillation dans laquelle le choc se produit, s'accomplisse dans le même temps que si le choc n'avait pas eu lieu ; c'est qu'en effet l'origine du temps correspondante aux nouvelles intégrales n'est plus la même qu'auparavant. Cette origine est l'époque où l'on aurait eu $x' = x'_0$, si le mouvement avant le choc eût dépendu des constantes qui le règlent après la production du phénomène.

La valeur de x' en fonction du temps sera donnée par la formule (49). En ayant égard aux valeurs de b' et a' dans le calcul du terme constant, il viendra

$$(66)\qquad \begin{aligned} x' = &- x'_0 \left(\pm \frac{1}{4} x'_0 \gamma + \frac{1}{6} x'^2_0 \gamma^2 \mp x'_0 \gamma \nu\right) \\ &+ a' \left(1 - \frac{1}{96} \gamma^2 a'^2\right) \cos\lambda_1 t' \mp \frac{1}{12} a'^2 \gamma \cos 2\lambda_1 t' + \frac{1}{96} a'^3 \gamma^2 \cos 3\lambda_1 t'. \end{aligned}$$

Pour compléter ce système d'équations, il est nécessaire de rappeler que l'on a également

$$(67)\qquad x' = u' \pm f, \quad x'_0 = (u_0 \pm f)(1 + \nu),$$

et que les signes supérieurs et inférieurs doivent être pris suivant que $\frac{du'}{dt}$ est positif ou négatif.

11. Déterminons la durée effective de l'oscillation dans laquelle il se produit un choc. Cette durée se compose du temps t écoulé au moment du choc, et du temps $T_1 - t'$ compris entre le choc et la fin de l'oscillation. Soit T'_1 cette durée effective, on a

$$T'_1 = T_1 - (t' - t). \tag{68}$$

Supposant toujours x_0 positif, ce qui conduit à employer les signes inférieurs, nous avons, par les formules du numéro précédent,

$$\begin{aligned} a' &= x'_0 - \frac{1}{3} x'^2_0 \gamma_1 + \frac{2}{9} x'^3_0 \gamma_1^2 + x'^2_0 \gamma_1 \upsilon, \\ b' &= \quad + \frac{1}{3} x'^2_0 \gamma_1 - \frac{2}{9} x'^3_0 \gamma_1^2 - x'^2_0 \gamma_1 \upsilon; \end{aligned} \tag{69}$$

$$\begin{aligned} a' \cos\varphi' &= x' - b', \\ \lambda_1 t' &= \varphi' - \frac{1}{6} \gamma_1 a' \sin\varphi'. \end{aligned} \tag{70}$$

D'autre part, les formules applicables avant le choc sont

$$\begin{aligned} a &= x_0 - \frac{1}{3} x_0^2 \gamma_1 + \frac{2}{9} x_0^3 \gamma_1^2, \\ b &= \quad + \frac{1}{3} x_0^2 \gamma_1 - \frac{2}{9} x_0^3 \gamma_1^2; \end{aligned} \tag{71}$$

$$\begin{aligned} a \cos\varphi &= x - b, \\ \lambda_1 t &= \varphi - \frac{1}{6} \gamma_1 a \sin\varphi. \end{aligned} \tag{72}$$

Les équations (70) et (72) donnent

$$\lambda_1 (t' - t) = \varphi' - \varphi - \frac{1}{6} \gamma_1 (a' \sin\varphi' - a \sin\varphi):$$

or on a

$$a' \sin\varphi' - a \sin\varphi = a (\sin\varphi' - \sin\varphi) + (a' - a) \sin\varphi' = a \cos\varphi' (\varphi' - \varphi) + (a' - a) \sin\varphi',$$

en négligeant les temps du second ordre; il s'ensuit

$$\lambda_1 (t' - t) = \left(1 - \frac{1}{6} \gamma_1 a \cos\varphi'\right) (\varphi' - \varphi) - \frac{1}{6} \gamma_1 (a' - a) \sin\varphi'. \tag{73}$$

Pour obtenir $\varphi' - \varphi$, nous tirons des relations précédentes

$$a' \cos\varphi' - a \cos\varphi = b - b',$$

attendu que $x' = x$ par convention ; cette équation prend la forme

$$a(\cos\varphi' - \cos\varphi) = b - b' - (a' - a)\cos\varphi' :$$

or les équations (69) et (71) donnent

$$b - b' = \qquad -\frac{1}{3}\eta(x_0'^2 - x_0^2) + x_0'^2\eta\upsilon,$$

$$a' - a = x_0' - x_0 - \frac{1}{3}\eta(x_0'^2 - x_0^2) + x_0'^2\eta\upsilon;$$

d'où, à cause de $x'_0 = x_0(1 + \upsilon)$,

$$b - b' = +\frac{1}{3}x_0^2\eta\upsilon,$$

$$a' - a = x_0\upsilon + \frac{1}{3}x_0^2\eta\upsilon :$$

mettant ces valeurs et celle de a dans l'expression de $a(\cos\varphi' - \cos\varphi)$, on en tire, en négligeant les quantités du troisième ordre,

$$\cos\varphi - \cos\varphi' = \upsilon\left[\left(1 + \frac{2}{3}x_0\eta\right)\cos\varphi' - \frac{1}{3}x_0\eta\right].$$

Mais on a, par le théorème de Taylor,

$$\cos\varphi - \cos\varphi' = -\sin\varphi'(\varphi - \varphi') - \frac{1}{2}\cos\varphi'(\varphi - \varphi')^2;$$

d'où

$$(\varphi' - \varphi) = \frac{\cos\varphi - \cos\varphi'}{\sin\varphi'} + \frac{1}{2}\frac{\cos\varphi'}{\sin^3\varphi'}(\cos\varphi - \cos\varphi')^2 :$$

substituant la valeur de $\cos\varphi - \cos\varphi'$ qui vient d'être formée, il vient

$$\varphi' - \varphi = \frac{\upsilon}{\sin\varphi'}\left[\left(1 + \frac{2}{3}x_0\eta\right)\cos\varphi' - \frac{1}{3}x_0\eta\right] + \frac{1}{2}\frac{\upsilon^2\cos^3\varphi'}{\sin^3\varphi'}.$$

Il reste encore à transformer, dans l'équation (73), les facteurs de $\varphi' - \varphi$ et $\sin\varphi'$: le premier de ces facteurs équivaut à $1 - \frac{1}{6}x_0\eta\cos\varphi'$, l'autre est $-\frac{1}{6}x_0\eta\upsilon$. Au moyen de ces valeurs, il vient

$$\lambda_1(t' - t) = \frac{\upsilon}{\sin\varphi'}\left[\left(1 + \frac{2}{3}x_0\eta\right)\cos\varphi' - \frac{1}{2}x_0\eta\right] + \frac{1}{2}\frac{\upsilon^2\cos^3\varphi'}{\sin^3\varphi'},$$

ou

$$\lambda_1 (t' - t) = \frac{\upsilon}{\sin\varphi'} \left[\left(1 + \frac{2}{3} x_0 \eta - \frac{1}{2} \upsilon\right) \cos\varphi' - \frac{1}{2} x_0 \eta \right] + \frac{1}{2} \upsilon^2 \frac{\cos\varphi'}{\sin^2\varphi'};$$

puis, en mettant pour $\cos\varphi'$ sa valeur approchée aux termes près du second ordre,

$$\lambda_1 (t' - t) = \frac{\upsilon}{\sin\varphi'} \left[\frac{x'}{x_0} \left(1 - \frac{3}{2} \upsilon + x_0 \eta\right) - \frac{5}{6} x_0 \eta \right] + \frac{1}{2} \upsilon^2 \frac{x'}{x_0} \frac{1}{\sin^2\varphi'};$$

en ayant égard à la valeur de λ_1, l'équation (68) donne finalement

$$T'_1 = T_1 - \frac{T_1}{\pi} \left\{ \frac{\upsilon}{\sin\varphi'} \left[\frac{x'}{x_0} \left(1 - \frac{3}{2} \upsilon + x_0 \eta\right) - \frac{5}{6} x_0 \eta \right] + \frac{1}{2} \frac{\upsilon^2}{\sin^2\varphi'} \frac{x'}{x_0} \right\}.$$

Cette expression, quand on y suppose η nul, se ramène aisément à celle que nous avons obtenue n° **4**. Elle montre que la résistance de l'air n'introduit encore que des termes du second ordre ; quant à ceux du premier ordre, leur influence a été exposée dans le numéro cité : nous n'y reviendrons donc pas.

12. *Calcul du temps écoulé entre deux battements consécutifs, en tenant compte de la résistance de l'air et des frottements.* — Renvoyant au n° **5** pour ce qui concerne les considérations générales, nous rappellerons d'ailleurs que la durée de l'oscillation après le choc reste la même qu'auparavant : sa valeur est T_1. Le temps écoulé entre le choc produit pendant la première oscillation et la fin de celle-ci est $T_1 - t'$, t' étant calculé suivant les formules du numéro précédent, dans lesquelles x' ou u' définissent la position du balancier au moment du choc. La durée de la seconde oscillation est encore T_1, d'après ce qui précède, puisqu'il ne s'y produit pas de choc. Soit t'' le temps écoulé entre le commencement de la troisième oscillation et le moment du second choc reçu par le balancier dans la position $x'' = x'$ ou $u'' = u'$; on aura, en désignant par T''_1 l'intervalle cherché,

$$T''_1 = 2 T_1 + t'' - t'. \tag{74}$$

A la fin de la première oscillation, on a $x' = x'_1$ ou $u'_1 - f$; mettant dans la seconde équation (58) u'_1 à la place de u_1, il vient, pour la valeur de u_2 correspondante à la fin de la seconde oscillation ou au commencement de la troisième,

$$u_2 = - u'_1 - 2f - \frac{2}{3} (u'_1 + f)^2 \eta - \frac{4}{9} (u'_1 + f)^3 \eta^2;$$

mais on a

$$x_2 = u_2 - f,$$

attendu que l'on doit prendre le signe — devant f dans la troisième oscillation : mettant, pour plus de facilité, $x'_1 + f$ à la place de u'_1, il vient

$$x_2 = - x'_1 - 4f - \frac{2}{3}(x'_1 + 2f)^2 \gamma_1 - \frac{4}{9} x'^3_1 \gamma_1^2;$$

substituant pour $- x'_1$ sa valeur (61) prise avec les signes inférieurs, on a

$$x_2 = x'_0 - 4f - \frac{2}{3}[(x'_1 + 2f)^2 + x'^2_0]\gamma_1 - \frac{4}{9}(x'^3_1 - x'^3_0)\gamma_1^2 + 2x'^2_0 \gamma_1 \upsilon;$$

puis

$$x_2 = x'_0 - 4f - \frac{4}{3} x'^2_0 \left(1 - 2\frac{f}{x'_0} - \frac{2}{3} x'_0 \gamma_1\right)\gamma_1 + \frac{8}{9} x'^3_0 \gamma_1^2 + 2x'^2_0 \gamma_1 \upsilon,$$

ou

(75) $$x_2 = x'_0 - 4f - \frac{4}{3} x'^2_0 \gamma_1 + \frac{16}{9} x'^3_0 \gamma_1^2 + 2x'^2_0 \gamma_1 \upsilon + \frac{8}{3} x'_0 f \gamma_1.$$

Cette quantité servira au calcul de t'' au moyen des formules (71) et (72) modifiées en y mettant x_2 à la place de x_0, et distinguant les nouvelles valeurs des constantes, ainsi que celles des variables, par deux accents : ces formules deviendront

(76) $$a'' = x_2 - \frac{1}{3} x_2^2 \gamma_1 + \frac{2}{9} x_2^3 \gamma_1^2,$$
$$b'' = \quad + \frac{1}{3} x_2^2 \gamma_1 - \frac{2}{9} x_2^3 \gamma_1^2;$$

(77) $$a'' \cos\varphi'' = x'' - b'',$$
$$\lambda_1 t'' = \varphi'' - \frac{1}{6} \eta a'' \sin\varphi''.$$

Par leur combinaison avec les équations (69) et (70) du numéro précédent, on trouvera

$$\lambda_1 (t'' - t') = \varphi'' - \varphi' - \frac{1}{6}\eta (a'' \sin\varphi'' - a' \sin\varphi'),$$

et celle-ci, en négligeant les quantités du troisième ordre, se changera en la suivante, qui est analogue à l'équation (73),

(78) $$\lambda_1 (t'' - t') = \left(1 - \frac{1}{6}\eta a' \cos\varphi'\right)(\varphi'' - \varphi') - \frac{1}{6}\eta (a'' - a') \sin\varphi'.$$

Nous avons d'ailleurs, à cause de $x'' = x'$,

$$a'' \cos\varphi'' - a' \cos\varphi' = b' - b'' :$$

on peut écrire cette équation comme il suit :

$$(79) \qquad a''(\cos\varphi' - \cos\varphi'') = (a'' - a')\cos\varphi' + b'' - b'.$$

Formons actuellement les valeurs de $a'' - a'$ et $b'' - b'$, nous aurons

$$a'' - a' = x_2 - x'_0 - \frac{1}{3}(x_2^2 - x'^2_0)\eta - x'^2_0 \eta\upsilon,$$

$$b'' - b' = \qquad + \frac{1}{3}(x_2^2 - x'^2_0)\eta + x'^2_0 \eta\upsilon;$$

puis, en vertu de la valeur (75) de x_2,

$$a'' - a' = -4f - \frac{4}{3}x'^2_0\eta + \frac{16}{3}x'_0\eta f + \frac{8}{3}x'^3_0\eta^2 + x'^2_0\eta\upsilon,$$

$$b'' - b' = \qquad - \frac{8}{3}x'_0\eta f - \frac{8}{9}x'^3_0\eta^2 + x'^2_0\eta\upsilon.$$

Substituant ces valeurs et celle de a'' dans l'équation (79), on aura

$$\cos\varphi' - \cos\varphi'' = \frac{-4f - \frac{4}{3}x'^2_0\eta + \frac{16}{3}x'_0\eta f + \frac{8}{3}x'^3_0\eta^2 + x'^2_0\eta\upsilon}{x_2\left(1 - \frac{1}{3}x_2\eta\right)}\cos\varphi' - \frac{8}{3}\eta f - \frac{8}{9}x'^2_0\eta^2 + x'_0\eta\upsilon.$$

On a, aux termes près du second ordre,

$$x_2\left(1 - \frac{1}{3}x_2\eta\right) = x'_0\left(1 - 4\frac{f}{x'_0} - \frac{4}{3}x'_0\eta\right)\left(1 - \frac{1}{3}x'_0\eta\right) = x'_0\left(1 - 4\frac{f}{x'_0} - \frac{5}{3}x'_0\eta\right):$$

multipliant le numérateur du facteur de $\cos\varphi'$ par $\frac{1}{x'_0}\left(1 + 4\frac{f}{x'_0} + \frac{5}{3}x'_0\eta\right)$, il vient

$$\cos\varphi' - \cos\varphi'' = \left(-4\frac{f}{x'_0} - \frac{4}{3}x'_0\eta - \frac{20}{3}f\eta + \frac{4}{9}x'^2_0\eta^2 - 16\frac{f^2}{x'^2_0} + x'_0\eta\upsilon\right)\cos\varphi'$$
$$- \frac{8}{3}f\eta - \frac{8}{9}x'^2_0\eta^2 + x'_0\eta\upsilon.$$

L'angle $\varphi'' - \varphi'$ va se déduire de cette valeur, au moyen de la relation

$$\varphi'' - \varphi' = \frac{\cos\varphi' - \cos\varphi''}{\sin\varphi'} - \frac{1}{2}\frac{\cos\varphi'}{\sin^3\varphi'}(\cos\varphi' - \cos\varphi'')^2 :$$

on a ici

$$(\cos\varphi' - \cos\varphi'')^2 = 16\cos^2\varphi'\left(\frac{f^2}{x_0'^2} + \frac{2}{3}f\eta + \frac{1}{9}x_0'^2\eta^2\right):$$

substituant cette valeur et celle de $(\cos\varphi' - \cos\varphi'')$, il vient

$$\varphi'' - \varphi' = -\frac{1}{\sin\varphi'}\left[\frac{8}{3}f\eta + \frac{8}{9}x_0'^2\eta^2 - x_0'\eta\upsilon + \left(4\frac{f}{x_0'} + \frac{4}{3}x_0'\eta + \frac{20}{3}f\eta - \frac{4}{9}x_0'^2\eta^2 + 16\frac{f^2}{x_0'^2} - x_0'\eta\upsilon\right)\cos\varphi'\right] - 8\frac{\cos^3\varphi'}{\sin^3\varphi'}\left(\frac{f^2}{x_0'^2} + \frac{2}{3}f\eta + \frac{1}{9}x_0'^2\eta^2\right).$$

Mettant $(1 - \sin^2\varphi')\cos\varphi'$ à la place de $\cos^3\varphi'$, on a

$$\varphi'' - \varphi' = -\frac{1}{\sin\varphi'}\left[\frac{8}{3}f\eta + \frac{8}{9}x_0'^2\eta^2 - x_0'\eta\upsilon + \left(4\frac{f}{x_0'} + \frac{4}{3}x_0'\eta + \frac{4}{3}f\eta + 8\frac{f^2}{x_0'^2} - \frac{4}{3}x_0'^2\eta^2 - x_0'\eta\upsilon\right)\cos\varphi'\right] - 8\frac{\cos\varphi'}{\sin^3\varphi'}\left(\frac{f^2}{x_0'^2} + \frac{2}{3}f\eta + \frac{1}{9}x_0'^2\eta^2\right).$$

Substituons maintenant dans l'équation (78) les valeurs de $a'' - a'$ limitées aux termes du premier ordre, et celle que prend a' en y supprimant les termes de cet ordre, nous aurons

$$\lambda_1(t'' - t') = \left(1 - \frac{1}{6}x_0'\eta\cos\varphi'\right)(\varphi'' - \varphi') + \frac{2}{3}\left(f\eta + \frac{1}{3}x_0'^2\eta^2\right)\sin\varphi'.$$

Or, si l'on sépare le produit $-\frac{1}{6}x_0'\eta\cos\varphi'(\varphi'' - \varphi')$, ce produit donnera le terme $\frac{2}{3}\left(f\eta + \frac{1}{3}x_0'^2\eta^2\right)\left(\frac{1}{\sin\varphi'} - \sin\varphi'\right)$; d'où deux nouveaux termes dont le second détruit exactement le dernier terme de la valeur de $\lambda_1(t'' - t')$: en sorte que celle-ci se réduit à

$$\lambda_1(t'' - t') = \varphi'' - \varphi' + \frac{2}{3}\left(f\eta + \frac{1}{3}x_0'^2\eta^2\right)\frac{1}{\sin\varphi'}.$$

Il s'ensuit

$$\lambda_1(t'' - t') = -\frac{1}{\sin\varphi'}\left[2f\eta + \frac{2}{3}x_0'^2\eta^2 - x_0'\eta\upsilon + 4\left(\frac{f}{x_0'} + \frac{1}{3}x_0'\eta + \frac{1}{3}f\eta + 2\frac{f^2}{x_0'^2} - \frac{1}{3}x_0'^2\eta^2 - \frac{1}{4}x_0'\eta\upsilon\right)\cos\varphi'\right] - 8\frac{\cos\varphi'}{\sin^3\varphi'}\left(\frac{f^2}{x_0'^2} + \frac{2}{3}f\eta + \frac{1}{9}x_0'^2\eta^2\right).$$

a simplement

$$(81)\qquad T''_1 = 2T\left(1 + \frac{1}{24}u_0^2\eta^2\right) - \frac{2T}{\pi}\left[\left(\frac{f}{u_0} + \frac{1}{3}u_0\eta\right)\left(2\frac{u'-f}{u_0} + \frac{1}{3}u_0\eta\right) - \frac{1}{2}u_0\eta\upsilon\right].$$

Si l'on suppose que le choc reçu dans la position u' se réduise à zéro, la valeur (80) de T''_1 conserve encore des termes du premier ordre qui sembleraient au premier abord devoir ne pas exister, puisqu'on a vu plus haut que la durée des oscillations n'est point altérée par les frottements f et que la résistance de l'air ne produit que des termes du second ordre. Cette contradiction apparente est facile à expliquer. En effet, T''_1 est le temps compris entre deux retours par une position donnée u', séparés par une oscillation entière. Si u' est quelconque, on conçoit qu'en vertu de la résistance de l'air et des frottements, le balancier ne repassera pas par cette position exactement après le temps $2T$; mais u' étant arbitraire, dès que υ est nul, on peut le choisir tel que la valeur de T''_1 (équation 80) se réduise à son premier terme; il suffit, pour cela, que l'on prenne

$$u' = f - \frac{1}{6}u_0^2\eta,$$

relation que l'on obtient en égalant à zéro la parenthèse du second terme. La durée des deux oscillations peut en effet être définie au moyen du passage du balancier par cette position u'.

Nous ne nous attacherons pas à rechercher la valeur de u' qui rendrait T''_1 égal à $2T$. Cette valeur, dépendant de u_0, f, η et υ, ne serait utile que si l'on pouvait compter sur la constance de ces quantités; or, à l'exception de η, il est certain qu'elles varient à la longue.

En réalité l'influence de υ ne s'exerce que dans les termes du second ordre. Cette remarque est importante; en effet, le balancier est soumis à deux autres actions qui peuvent être assimilées à des chocs, mais incomparablement moins forts que celui produit par la roue d'échappement : le balancier touche deux fois, dans la période T''_1, le levier destiné à mettre en jeu la roue d'échappement et à suspendre le mouvement de cette roue. Nous croyons donc, eu égard à la remarque précédente, et en considérant la petitesse des actions dont il s'agit, pouvoir nous dispenser d'en tenir compte; ce qui d'ailleurs exigerait d'entrer dans les détails spéciaux aux différents modes adoptés par les artistes pour produire l'échappement.

Nous reprendrons plus loin la discussion de l'équation (80).

13. *Variation de la force vive du balancier produite par le choc de la roue d'échappement.* — Nous avons fait comprendre (n° **9**) la possibilité d'obtenir les valeurs numériques de f et de η correspondantes à un balancier, et à des tempé-

rature et pression données, au moyen de l'observation des amplitudes dans le vide et dans l'air. Il convient, pour achever la détermination des quantités que nous avons considérées comme très-petites, d'effectuer celle de v. Alors chacune des quantités qui figurent dans l'expression du temps compris entre deux battements consécutifs, aura acquis une signification précise.

A cet effet, nous présenterons ici la théorie du choc de deux corps tournant autour d'axes parallèles.

Pour fixer les idées, et nous rapprocher des conditions qui se présentent dans l'échappement des chronomètres; ayant choisi le sens positif de la vitesse angulaire relativement à l'un des corps, nous prendrons pour sens positif de la rotation de l'autre corps le sens opposé au précédent. La théorie s'appliquera plus facilement au choc dans les engrenages cylindriques, puisqu'on aura de cette manière le moyen de conserver aux vitesses angulaires le même signe pour les deux corps.

Soient donc

ω et ω' les vitesses angulaires des deux corps ainsi définies;

M et M' leurs masses;

MI^2 et $M'I'^2$ leurs moments d'inertie autour de leurs axes de rotation respectifs.

A l'instant quelconque t de la durée du choc, M' exerce sur M des actions dont la résultante R, projetée sur un plan perpendiculaire aux axes de rotation, est F. Désignons le moment de cette résultante autour de l'axe de M par Fa; a désignant (*fig.* 1) la distance de cet axe au plan mené par la normale commune aux points de contact, parallèlement au même axe. En vertu de l'égalité et de l'opposition du sens des actions et réactions, M exerce sur M' des forces dont la résultante est égale et opposée à R, et qui donne lieu à un moment Fa' autour de l'axe de M'; a' ayant relativement à M' la signification de a relativement à M.

Du sens adopté pour les vitesses, il résulte que le moment Fa' est de signe opposé à celui de Fa.

En observant que les autres forces qui peuvent solliciter les deux corps sont négligeables pendant le choc vis-à-vis des forces F, les équations du mouvement des deux corps sont

$$MI^2 \frac{d\omega}{dt} = + Fa,$$

$$M'I'^2 \frac{d\omega'}{dt} = - Fa';$$

d'où, en éliminant F et posant, pour abréger,

$$(a) \qquad \frac{MI^2}{a} = A, \qquad \frac{M'I'^2}{a'} = A'.$$

l'on déduit

$$A\,d\omega + A'\,d\omega' = 0.$$

Soient ω_0 et ω'_0 les vitesses angulaires à l'instant où le choc commence, il vient en intégrant

$$(b) \qquad A(\omega - \omega_0) + A'(\omega' - \omega'_0) = 0 \ (^*).$$

Pour achever de déterminer les valeurs de ω et ω' relatives à la fin du choc, il est nécessaire de former une nouvelle équation qui nous sera fournie par la considération de l'élasticité.

Cas des corps parfaitement élastiques. — La parfaite élasticité d'un corps consiste dans la propriété qu'il possède de reprendre sa figure primitive, lorsque les causes qui l'avaient modifiée ont cessé d'agir. Telle est du moins la définition que l'on en donne ordinairement. Si l'on fait abstraction des vibrations qui subsistent après que les causes modificatrices de la figure ont cessé d'agir, on peut s'en tenir à la définition précédente. Ceci posé, évaluons le travail moléculaire développé pendant le phénomène du choc. Ce travail se compose de deux parties : l'une due aux actions mutuelles entre les molécules n'appartenant pas à un même corps, l'autre aux actions développées entre les molécules faisant partie d'un même corps.

Le travail moléculaire développé entre les molécules appartenant à deux corps distincts est nul relativement à l'intervalle compris entre deux situations où les forces moléculaires sont insensibles, quelle qu'ait été d'ailleurs leur intensité dans cet intervalle ; puisque les actions mutuelles sont des fonctions des distances des molécules. Comme, d'autre part, les répulsions des corps parfaitement élastiques ont pour effet d'opérer finalement leur séparation après le choc, le travail dont il s'agit se réduit effectivement à zéro. Quant au travail moléculaire développé entre les molécules faisant partie d'un même corps, il est également nul dès que le corps a repris sa figure primitive. La somme des travaux dus aux actions mutuelles pendant le phénomène du choc se réduisant ainsi à zéro, l'équation des forces vives appliquées au système des deux corps devient, en vertu des relations (a),

$$(c) \qquad A\,a\,(\omega^2 - \omega_0^2) + A'\,a'\,(\omega'^2 - \omega'^2_0) = 0.$$

Transposons les seconds termes des équations (b) et (c), et divisons ensuite

(*) Dans cette intégration, on a fait abstraction du déplacement des corps, conformément à l'usage en cette matière : autrement on n'aurait pas pu considérer A et A' comme constants, puisqu'en vertu des équations (a) ces quantités varient avec a et a'.

Ajoutant et retranchant le produit $(Aa' + A'a)\omega_0$ aux deux membres de la première de ces équations, nous aurons

$$(Aa' + A'a)(\omega + \omega_0) = 2Aa'\omega_0 + A'(a'\omega'_0 + a\omega_0),$$
$$(Aa' + A'a)(\omega - \omega_0) = \qquad\qquad A'(a'\omega'_0 - a\omega_0);$$

d'où, en multipliant,

$$(m)\quad (Aa' + A'a)^2(\omega^2 - \omega_0^2) = + A'[a'(A'\omega'_0 + A\omega_0) + \omega_0(Aa' + A'a)](a'\omega'_0 - a\omega_0);$$

cette équation servira à calculer l'accroissement de la force vive du corps M. On obtiendra, pour le corps M', une équation pareille, au moyen d'un simple transport d'accents :

$$(n)\quad (Aa' + A'a)^2(\omega'^2 - \omega'^2_0) = - A[a(A'\omega'_0 + A\omega_0) + \omega'_0(Aa' + A'a)](a'\omega'_0 - a\omega_0).$$

Multipliant ces équations (m) et (n) la première par Aa, la deuxième par $A'a'$, et ajoutant; il vient, après suppression du facteur commun $Aa' + A'a$,

$$(Aa' + A'a)[Aa(\omega^2 - \omega_0^2) + A'a'(\omega'^2 - \omega'^2_0)] = - AA'(a'\omega'_0 - a\omega_0)^2.$$

On a donc finalement, pour variation de la somme des forces vives des deux corps,

$$(o)\qquad \frac{1}{2}MI^2(\omega^2 - \omega_0^2) + \frac{1}{2}M'I'^2(\omega'^2 - \omega'^2_0) = -\frac{1}{2}\frac{AA'}{Aa' + A'a}(a'\omega'_0 - a\omega_0)^2.$$

Cette variation est, comme on le voit, une véritable perte, laquelle est proportionnelle au carré de la vitesse relative des points de contact avant le choc, estimée suivant la projection de la normale commune sur le plan perpendiculaire aux axes (*).

(*) L'expression (o) fournit explicitement la valeur de la perte de force vive en fonction des vitesses ω_0 et ω'_0; mais il existe une autre expression connue sous le nom de *théorème de Carnot,* que nous allons démontrer en passant.

Mettons les expressions (k) sous la forme

$$A(\omega - \omega_0) = - A'(\omega' - \omega'_0),$$
$$a\omega = a'\omega'.$$

En les multipliant membre à membre, il vient

$$Aa(\omega^2 - \omega\omega_0) = - A'a'(\omega'^2 - \omega'\omega'_0);$$

Choc des corps solides de nature quelconque. — Les organes des machines sont formés de substances qui ne sont ni parfaitement élastiques ni entièrement dépourvues d'élasticité; il importe donc d'obtenir des formules qui représentent les effets du choc, quelle que soit la nature des corps entre lesquels il s'exerce. Considérant toujours le cas des corps tournants autour d'axes parallèles, nous nous proposerons d'obtenir des résultats qui conviennent à la fois aux deux cas extrêmes que nous avons envisagés précédemment, et les représentent individuellement, lorsqu'on attribuera des valeurs limites à une certaine variable. De cette manière, si l'on attribue à cette même variable une valeur convenable entre les limites précédentes, les mêmes formules représenteront les effets du choc de deux corps choisis arbitrairement. Cette variable, que l'expérience seule pourra faire connaître, servira ainsi à représenter les propriétés élastiques d'un système de deux corps, au point de vue du phénomène du choc.

Nous avons vu que la perte de force vive, dans le cas des corps dépourvus d'élasticité, est égale à la valeur absolue du second membre de l'équation (o); elle est nulle dans le cas des corps parfaitement élastiques. On aura donc, quels que soient les corps en présence,

$$(p) \qquad \mathrm{A\,a}\,(\omega^2 - \omega_0^2) + \mathrm{A'\,a'}\,(\omega'^2 - \omega_0'^2) = -\frac{\mathrm{AA'}}{\mathrm{Aa'} + \mathrm{A'a}}\,(\mathrm{a'}\omega_0' - \mathrm{a}\,\omega_0)^2 \sin^2\chi,$$

pourvu que l'angle χ soit convenablement déterminé. En faisant $\sin^2\chi$ nul, on a la formule qui convient aux corps parfaitement élastiques; en prenant $\sin^2\chi = 1$, on retombe sur la formule établie pour les corps dépourvus d'élasticité.

Il suffit de joindre à l'équation précédente la relation (b), pour être en mesure de déterminer généralement ω et ω'.

Soient, pour abréger,

$$\omega - \omega_0 = z, \quad \omega' - \omega_0' = z';$$

---

or

$$\omega^2 - \omega\omega_0 = \frac{\omega^2}{2} - \frac{\omega_0^2}{2} + \frac{1}{2}(\omega - \omega_0)^2:$$

substituant cette valeur et une autre pareille pour $\omega'^2 - \omega'\omega_0'$, puis les moments d'inertie à la place des quantités $\mathrm{A\,a}$, $\mathrm{A'a'}$; il vient

$$\frac{1}{2}\mathrm{M}l^2(\omega^2 - \omega_0^2) + \frac{1}{2}\mathrm{M}'l'^2(\omega'^2 - \omega_0'^2) = -\frac{1}{2}\mathrm{M}l^2(\omega - \omega_0)^2 - \frac{1}{2}\mathrm{M}'l'^2(\omega' - \omega_0')^2.$$

La perte de force vive est donc égale à la somme des forces vives dues aux vitesses angulaires gagnées ou perdues. C. Q. F. D.

d'où

$$\omega + \omega_0 = 2\omega_0 + z, \quad \omega' + \omega'_0 = 2\omega'_0 + z':$$

les équations (p) et (b) deviendront

$$\mathrm{A}\,\mathrm{a}\,(2\omega_0 z + z^2) + \mathrm{A}'\mathrm{a}'(2\omega'_0 z' + z'^2) = -\frac{\mathrm{A}\mathrm{A}'(\mathrm{a}'\omega'_0 - \mathrm{a}\omega_0)^2}{\mathrm{A}\mathrm{a}' + \mathrm{A}'\mathrm{a}}\sin^2\chi,$$

$$\mathrm{A}z + \mathrm{A}'z' = 0.$$

Éliminant z' entre ces équations, il vient aisément

$$\frac{z^2}{\mathrm{A}'^2} - 2\frac{\mathrm{a}'\omega'_0 - \mathrm{a}\omega_0}{\mathrm{A}\mathrm{a}' + \mathrm{A}'\mathrm{a}}\frac{z}{\mathrm{A}'} = -\left(\frac{\mathrm{a}'\omega'_0 - \mathrm{a}\omega_0}{\mathrm{A}\mathrm{a}' + \mathrm{A}'\mathrm{a}}\right)^2\sin^2\chi,$$

d'où

$$\frac{z}{\mathrm{A}'} = \frac{\mathrm{a}'\omega'_0 - \mathrm{a}\omega_0}{\mathrm{A}\mathrm{a}' + \mathrm{A}'\mathrm{a}}\left(1 \pm \sqrt{1 - \sin^2\chi}\right);$$

mais $\cos\chi$, n'étant déterminé ici que par $\sin\chi$, emporte avec lui le double signe, ce qui réduit la parenthèse du second membre de cette expression à $2\cos^2\frac{1}{2}\chi$: on a donc, en vertu des relations précédentes,

$$(q) \qquad \begin{aligned} \omega - \omega_0 &= +2\mathrm{A}'\frac{\mathrm{a}'\omega'_0 - \mathrm{a}\omega_0}{\mathrm{A}\mathrm{a}' + \mathrm{A}'\mathrm{a}}\cos^2\frac{1}{2}\chi, \\ \omega' - \omega'_0 &= -2\mathrm{A}\frac{\mathrm{a}'\omega'_0 - \mathrm{a}\omega_0}{\mathrm{A}\mathrm{a}' + \mathrm{A}'\mathrm{a}}\cos^2\frac{1}{2}\chi. \end{aligned}$$

Ces expressions sont ambiguës, puisqu'à $\sin\chi$ répondent deux angles supplémentaires; d'où deux valeurs distinctes et complémentaires de l'angle $\frac{1}{2}\chi$. Pour lever l'ambiguïté, considérons le cas des corps parfaitement élastiques, pour lesquels on a $\sin\chi = 0$: si l'on prenait $\chi = 180°$, il viendrait $\cos^2\frac{1}{2}\chi = 0$, et l'on aurait $\omega = \omega_0$, $\omega' = \omega'_0$: or cette solution n'est évidemment admissible qu'autant que la vitesse relative $\mathrm{a}'\omega'_0 - \mathrm{a}\omega_0$ serait elle-même nulle; il faut donc prendre $\chi = 0$. Nous en conclurons que l'angle χ doit être pris égal à l'angle aigu correspondant à $\sin^2\chi$: quant au signe, il est évidemment indifférent.

Les équations (q) nous donnent, pour expression de la vitesse relative,

$$(r) \qquad \mathrm{a}\omega - \mathrm{a}'\omega' = (\mathrm{a}'\omega'_0 - \mathrm{a}\omega_0)\cos\chi.$$

Nous aurions pu former à priori cette relation en partant des équations (d) et (k) correspondantes respectivement aux deux cas extrêmes que nous avons

traités ; en la combinant avec l'équation (b) nous aurions obtenu plus rapidement les relations (q), et cela sans rencontrer d'ambiguïté. Mais il nous a paru préférable de rattacher l'angle χ à la notion de la force vive perdue dans le choc.

L'équation (r) montre que la vitesse relative après le choc ne sera effectivement nulle, ou que les deux corps ne resteront en contact, que si l'on a $\cos\chi = 0$, c'est-à-dire dans le cas des corps absolument dépourvus d'élasticité. Dans tout autre cas, les corps se sépareront après le choc : nous verrons plus loin comment il faut interpréter certain fait admis par les horlogers et qui paraîtrait au premier abord infirmer notre conclusion.

A l'aide des équations (q), on formera aisément les valeurs de $\omega + \omega_0$, $\omega' + \omega'_0$; $\omega^2 - \omega_0^2$ et $\omega'^2 - \omega_0'^2$: ces dernières étant multipliées respectivement par $\frac{1}{2}\mathrm{A\,a}$ et $\frac{1}{2}\mathrm{A'\,a'}$, on aura pour expressions de la variation de force vive de chacun des corps

$$(s)\quad \begin{cases} \frac{1}{2}\mathrm{A\,a}\,(\omega^2 - \omega_0^2) = +2\,\mathrm{A\,a}\,\dfrac{\mathrm{a}'\omega'_0 - \mathrm{a}\,\omega_0}{\mathrm{A\,a}' + \mathrm{A}'\,\mathrm{a}}\,\mathrm{A}'\cos^2\frac{1}{2}\chi\left(\omega_0 + \dfrac{\mathrm{a}'\omega'_0 - \mathrm{a}\,\omega_0}{\mathrm{A\,a}' + \mathrm{A}'\,\mathrm{a}}\,\mathrm{A}'\cos^2\frac{1}{2}\chi\right), \\ \frac{1}{2}\mathrm{A}'\mathrm{a}'\,(\omega'^2 - \omega_0'^2) = -2\,\mathrm{A}'\mathrm{a}'\,\dfrac{\mathrm{a}'\omega'_0 - \mathrm{a}\,\omega_0}{\mathrm{A\,a}' + \mathrm{A}'\,\mathrm{a}}\,\mathrm{A}\cos^2\frac{1}{2}\chi\left(\omega'_0 - \dfrac{\mathrm{a}'\omega'_0 - \mathrm{a}\,\omega_0}{\mathrm{A\,a}' + \mathrm{A}'\,\mathrm{a}}\,\mathrm{A}\cos^2\frac{1}{2}\chi\right). \end{cases}$$

Ces équations, étant ajoutées, reproduiraient d'ailleurs l'équation (p), d'où l'on est parti.

Sans prétendre désigner les expériences qui seraient le plus propres à la détermination de l'angle χ, nous indiquerons cependant celle qui consisterait à mettre en présence deux pendules à axes parallèles. Ces appareils devraient avoir leurs centres d'oscillation au même niveau, et présenter, à ce niveau, deux proéminences destinées à recevoir l'action du choc. La perte de force vive dépendant de la vitesse relative $\mathrm{a}'\omega'_0 - \mathrm{a}\,\omega_0$, et non des vitesses absolues des points de contact, il suffirait d'écarter l'un des pendules de la verticale, pour produire le choc. Ayant mesuré les forces vives initiales et finales, et les moments d'inertie, comme dans les expériences faites avec le pendule balistique, on se servirait de l'équation (p) pour obtenir la valeur de $\sin^2\chi$. La discussion des valeurs obtenues dans des conditions variées contribuerait sans doute à l'avancement de la mécanique moléculaire.

Faisons application de la première équation (s) aux balanciers de chronomètre. Nous avons trouvé (n° **10**) que l'accroissement du carré de la vitesse angulaire produit par le choc de la roue d'échappement est $\lambda^2 x_0^2(2v + v^2)$; ce qui donne, pour accroissement de la force vive, $\mathrm{A\,a}\lambda^2 x_0^2\left(v + \frac{1}{2}v^2\right)$: égalant cette expression avec

le second membre de la première équation (s), on obtient

$$(82)\qquad v + \frac{1}{2}v^2 = \frac{2}{\lambda^2 x_0^2}\,\frac{a'\omega'_0 - a\omega_0}{Aa' + A'a}\,A'\cos^2\frac{1}{2}\chi\left(\omega_0 + \frac{a'\omega'_0 - a\omega_0}{Aa' + A'a}\,A'\cos^2\frac{1}{2}\chi\right).$$

Telle est l'équation qui fera connaître v en fonction de ω_0 et ω'_0, quand l'angle χ relatif au balancier et à la roue d'échappement sera connu. Nous reviendrons plus loin sur la détermination de ω_0 et ω'_0.

14. *Des phénomènes qui suivent le choc de deux corps tournant autour d'axes parallèles.* — Considérons plus spécialement le cas où, comme dans les roues d'engrenage, le contact peut se produire dans un plan sensiblement perpendiculaire au plan des axes, et où, dès lors, la vitesse relative $a\omega - a'\omega'$ est perpendiculaire à ce plan : nous supposerons encore, pour plus de simplicité, que le lieu des points de contact soit à peu près rectiligne dans l'étendue que nous pouvons avoir à considérer.

Soient, au bout du temps t compté depuis le choc : P la force qui sollicite le corps M; Pp son moment autour de l'axe de rotation de ce corps; ω la vitesse angulaire; P', $P'p'$ et ω' les mêmes choses relativement à M'; on aura

$$Aa\frac{d\omega}{dt} = Pp,\qquad A'a'\frac{d\omega'}{dt} = P'p':$$

si l'on fait, pour abréger,

$$U = \frac{Pp}{A} - \frac{P'p'}{A'},$$

ces équations donneront

$$a\,d\omega - a'\,d\omega' = U\,dt.$$

Soit, d'autre part, U_1 la valeur de U à l'origine du temps, d'où

$$U = U_1 + \left(\frac{dU}{dt}\right)_1 t + \ldots,$$

il viendra, en substituant dans l'équation précédente et intégrant,

$$a\omega - a'\omega' = (a'\omega'_0 - a\omega_0)\cos\chi + U_1 t + \frac{1}{2}\left(\frac{dU}{dt}\right)_1 t^2 + \ldots,$$

équation où la valeur de la constante est déterminée par la relation (r).

Soient actuellement

$$ds = a\omega\,dt,\qquad ds' = a'\omega'\,dt$$

les chemins élémentaires décrits par les points des deux corps qui étaient au contact à l'origine du temps; ces relations combinées avec la précédente donneront, après une nouvelle intégration,

$$s - s' = (a'\omega'_0 - a\omega_0)\cos\chi \,.\, t + \frac{1}{2} U_1 t^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{dU}{dt}\right)_1 t^3 + \ldots,$$

en sorte que $s - s'$ sera la différence des chemins parcourus depuis le choc.

Observons que le corps M' étant censé suivre le corps M, et χ étant un angle toujours aigu, comme il a été dit plus haut, le premier terme de la valeur de $a\omega - a'\omega'$, ou le coefficient de t dans l'expression de $s - s'$, est une quantité positive, qui ne s'annulerait que dans le cas où les corps seraient entièrement dépourvus d'élasticité. Examinons ce qui se passe dans les instants qui suivent le choc, en limitant d'abord le temps t au cas où l'on puisse négliger le terme en t^3 dans le développement de $s - s'$. Après un temps t suffisamment petit, le terme en t^2 sera lui-même sans influence sur le signe de $s - s'$, et cette quantité sera positive; c'est-à-dire que les deux corps se sépareront conformément à ce que nous avons déjà trouvé. Dans les instants suivants, la variation de $s - s'$ dépendra du signe de la fonction U_1 : si cette quantité est positive, les deux corps se sépareront de plus en plus; mais, si elle est négative, ce qui arrivera quand $\frac{P'p'}{A'}$ excédera $\frac{Pp}{A}$, la différence $s - s'$, après avoir pris un certain accroissement, diminuera jusqu'à s'annuler : alors les deux corps se rencontreront de nouveau et donneront lieu à un second choc, séparé du premier par l'intervalle

$$t = -2\,\frac{a'\omega'_0 - a\omega_0}{U_1}\cos\chi.$$

La vitesse relative que posséderont les points de contact à cet instant, s'obtiendra en mettant cette valeur de t dans l'expression de $a\omega - a'\omega'$ privée du terme en t^2; ce qui donnera, moyennant un changement de signe,

$$a'\omega' - a\omega = (a'\omega'_0 - a\omega_0)\cos\chi.$$

Telle est la vitesse relative avec laquelle le corps M' viendra de nouveau choquer le corps M. Comme on le voit, elle est plus faible que celle qui avait lieu lors du premier choc, dans le rapport de $\cos\chi$ à l'unité. En vertu de la relation (r), on trouvera que la vitesse relative, après ce second choc, sera réduite à

$$(a'\omega'_0 - a\omega_0)\cos^2\chi.$$

Si donc le contact pouvait continuer à se produire sur la même ligne, ce second

choc serait suivi d'une série d'autres chocs, dans lesquels les vitesses relatives avant et après le choc se déduiraient de celles qui se rapportent au premier, en les multipliant par les puissances successives de $\cos\chi$: les intervalles compris entre ces chocs successifs s'obtiendraient également en multipliant la valeur précédente de t par les puissances de $\cos\chi$, mais en remplaçant chaque fois le dénominateur U_1 par la valeur correspondante à chacun des chocs. Les intervalles t finiraient par être tellement petits que les deux corps paraîtraient ne plus se séparer.

Mais, indépendamment des hypothèses sur lesquelles reposent les résultats qui viennent d'être présentés, il ne faut pas perdre de vue celle qui sert de fondement à la théorie du choc, à savoir que les forces P et P' sont négligeables vis-à-vis des réactions développées au contact; or il est clair que la diminution rapide des vitesses relatives donnera lieu à des réactions qui cesseront de satisfaire à cette hypothèse, en sorte que la continuité du contact s'établira entre les deux corps bien plus rapidement qu'il ne résulterait de la théorie précédente.

Si maintenant on suppose l'intensité du premier choc très-faible, et que la valeur de U_1 ne soit pas elle-même très-petite, l'intervalle t sera très-faible, et il résulte des explications qui viennent d'être données, que les deux corps paraîtront continuer de se toucher après le premier choc.

Appliquons ces considérations au choc du balancier par la roue d'échappement. Nous observerons que les matières qui entrent dans la confection de ces organes ne peuvent pas être considérées comme entièrement dépourvues d'élasticité; χ sera donc notablement différent de 90°, ou $\cos\chi$ notablement différent de zéro. D'un autre côté, la quantité v étant par hypothèse très-petite, le facteur $a'\omega'_0 - a\omega_0$ doit, suivant la relation (82), être du même ordre que v : le produit $(a'\omega'_0 - a\omega_0)\cos\chi$ est donc une quantité très-petite. Le terme $\frac{P'p'}{A'}$ est sensiblement constant, d'après le mode effectif de transmission de la force motrice; mais le terme $\frac{Pp}{A}$ a pour expression $-\frac{\varkappa u}{A}$: or nous avons déjà dit que la valeur de u, correspondante à la position du balancier à l'instant du choc, est une quantité très-petite; ce terme est donc sans importance vis-à-vis du précédent. Il s'ensuit que la valeur de t est une quantité très-petite et proportionnelle à la vitesse relative $a'\omega'_0 - a\omega_0$ à l'instant où commence le choc. Si cette vitesse relative est extrêmement faible, la roue d'échappement continue de presser le balancier, le *mène,* comme disent les artistes. Si la vitesse relative est plus grande, la roue d'échappement doit, après le choc, se séparer un instant du balancier, pour se précipiter sur la palette et y produire un ou plusieurs chocs successivement moins in

tenses les uns que les autres, jusqu'à ce que la palette ait échappé à l'action de la roue.

La série donnée plus haut comme expression de la valeur de $s - s'$ est encore assez approximativement exacte, lorsque le temps t atteint la limite où le balancier et la roue d'échappement cessent d'être en prise; car cette valeur de t n'est toujours qu'une assez faible fraction de la durée des oscillations. Si donc la quantité $s - s'$ pouvait rester positive jusqu'à cette limite, il ne se produirait pas de nouveau choc. Or on a vu que le terme $\frac{Pp}{A}$ est négligeable par rapport à $\frac{P'p'}{A'}$; en sorte que le développement de $s - s'$ se compose d'un premier terme positif, du terme $-\frac{1}{2}\frac{P'p'}{A'}t^2$ et de termes d'ordres supérieurs : si l'on veut que t atteigne la plus grande valeur possible dans les limites ci-dessus, sans que le développement s'annule, il est clair que le facteur $\frac{P'p'}{A'}$ ou $\frac{a'}{M'I'^2}P'p'$ doit être le plus petit possible, et cela, quel que soit le reste de la série, puisque ce facteur n'y figure plus.

En d'autres termes, si l'on veut qu'un nouveau choc ne vienne pas succéder au premier, et éviter ainsi que la roue d'échappement ne *mène* le balancier, il faut réduire le plus possible le moment $P'p'$ de la force motrice transmise à la roue d'échappement, ou le rayon de la circonférence passant par les extrémités des dents de cette roue, ou enfin augmenter son moment d'inertie. Comme il est néanmoins nécessaire que l'accroissement de force vive communiqué au balancier acquière une certaine valeur déterminée, on atteindrait ce but en augmentant au besoin la chute de la roue d'échappement.

Nous ne nous étendrons pas davantage sur un sujet que nous avons voulu seulement effleurer en passant; notre intention était de montrer comment le choc du balancier peut être accompagné ou suivi d'une nouvelle action de la roue d'échappement, dans laquelle celle-ci mène le balancier, et comment on pourrait parvenir à l'éviter. Il resterait alors à examiner si le résultat ainsi obtenu ne présenterait pas quelques inconvénients à d'autres points de vue.

15. *Détermination des valeurs de* ω_0 *et* ω'_0. — La valeur de ω_0 n'est autre que celle de $\frac{dx}{dt}$, que fournit l'équation (36 *bis*), particularisée en y mettant x' à la place de x, en continuant de distinguer par un accent la valeur de x correspondante à la position dans laquelle le balancier reçoit le choc de la roue d'échappement. Nous devons rappeler que, x_0 étant supposé positif, η et f qui figurent dans x doivent être pris avec le signe — durant la première oscillation.

Pour simplifier et rester dans les conditions de la pratique, nous supposerons

que x' soit un petit angle; nous aurons alors

$$\omega_0^2 = \lambda^2 \left[x_0^2 - x'^2 - \frac{1}{3}(x_0^2 - 2x_0 x')(2x_0 + x')\gamma_1 + \frac{1}{4}x_0^4\gamma_1^2\right],$$

ou

$$\omega_0^2 = \lambda^2 x_0^2 \left(1 - \frac{2}{3}x_0\gamma_1 + \frac{1}{4}x_0^2\gamma_1^2 + x'\gamma_1 - \frac{x'^2}{x_0^2}\right):$$

on en tire, en substituant à λ sa valeur en fonction de λ_1,

$$(83) \qquad \omega_0 = \lambda_1 x_0 \left(1 - \frac{1}{3}x_0\gamma_1 + \frac{1}{9}x_0^2\gamma_1^2 + \frac{1}{2}x'\gamma_1 - \frac{1}{2}\frac{x'^2}{x_0^2}\right),$$

équation où l'on a $\lambda_1 = \frac{\pi}{T_1}$, $x_0 = u_0 - f$, $x' = u' - f$.

On a pris ici le signe positif en extrayant la racine, parce que x_0 a été lui-même considéré comme positif dans tous nos calculs.

La vitesse de rotation ω'_0 de la roue d'échappement, à l'instant du choc, est due à l'action d'une force constante P' agissant à l'extrémité d'un rayon p'; c'est la force du ressort moteur amoindrie par les engrenages qui séparent la roue d'échappement et le barillet. (On fait ici abstraction du mouvement communiqué aux autres parties du rouage.) Même lorsque le chronomètre ne serait pas pourvu d'une fusée, on pourrait encore considérer la force P' comme constante entre deux battements consécutifs. Eu égard au sens de P', l'équation du mouvement de la roue d'échappement est

$$M'I'^2 \frac{d\omega'}{dt} = P'p';$$

d'où l'on tire, pour la vitesse acquise au bout du temps t,

$$\omega' = \frac{P'p'}{M'I'^2}t:$$

soit ξ' l'angle décrit par la roue d'échappement depuis l'origine du mouvement, on a

$$d\xi' = \omega' dt;$$

ce qui donne pour l'angle décrit au bout du temps t,

$$\xi' = \frac{P'p'}{M'I'^2}\frac{t^2}{2}.$$

On déduit de ces expressions, en y éliminant t,

$$\omega'^2 = 2\frac{P'p'}{M'I'^2}\xi',$$

relation qu'on aurait encore obtenue en portant la valeur de dt en fonction de $d\omega'$ dans la relation $d\xi' = \omega'\,dt$, et intégrant.

La valeur de ω' à l'instant du choc a été désignée plus haut par ω'_0 ; soit τ le temps pendant lequel a été décrit l'angle ξ', nous aurons donc

$$\xi' = \frac{1}{2}\frac{P'p'}{M'I'^2}\tau^2, \tag{84}$$

$$\omega'_0 = \frac{P'p'}{M'I'^2}\tau = \sqrt{2\frac{P'p'}{M'I'^2}\xi'}. \tag{85}$$

Étant données les quantités P', p', ξ', a, a' et la quantité χ relative aux propriétés élastiques du balancier et de la roue d'échappement, les équations précédentes jointes à l'équation (83) fourniront ce qui est nécessaire pour effectuer la détermination de v, au moyen de la relation (82).

16. *Détermination du régime permanent du mouvement des chronomètres.* — On a vu que l'intervalle de deux battements consécutifs ne diffère du double de la durée de l'oscillation simple T, que de quantités du second ordre, quand l'angle $u' - f$ est très-petit. Ces quantités variant particulièrement avec les amplitudes et avec l'intensité du choc qui dépend elle-même des amplitudes, on pourrait craindre que ces variations ne produisissent des erreurs sensibles dans la supputation d'un temps comprenant un grand nombre de battements consécutifs. Il est facile de s'assurer que, dans les conditions de température constante que nous avons admises, ces erreurs n'auront pas lieu, tant que la pression atmosphérique et le coefficient f ne varieront pas eux-mêmes et que le chronomètre sera pourvu d'une fusée qui assure la constance de l'action du ressort sur la roue d'échappement.

Supposons donc que ces conditions soient remplies (*) : lorsqu'on mettra le chronomètre en mouvement, au moyen d'une vive secousse produite en faisant tourner sa boîte autour d'un axe à peu près parallèle à celui du balancier, les amplitudes seront assez grandes d'abord et diminueront graduellement, à cause du

(*) Si le temps à évaluer atteint un ou deux mois, les variations de la pression atmosphérique produiront des variations déjà très-faibles et qui se compenseront en grande partie; si d'un autre côté les huiles ne sont pas trop *âgées*, ni le chronomètre en trop mauvais état, le coefficient f ne variera pas d'une façon notable pendant un tel laps de temps.

frottement et de la résistance de l'air, jusqu'au moment où le travail dû à ces résistances pourra être exactement compensé par la force vive restituée au balancier dans le choc de la roue d'échappement. S'il arrivait au contraire que l'amplitude initiale fût trop faible, les chocs produits compenseraient et au delà le travail des résistances, et les amplitudes croîtraient progressivement, jusqu'à ce que la compensation entre le travail résistant et la force vive restituée fût parfaite. Dans l'un et l'autre cas, après un nombre convenable de battements, le chronomètre finira par acquérir un régime permanent, dans lequel les amplitudes ne varieront plus qu'avec les résistances. C'est cet état que nous allons déterminer.

En premier lieu, et pour simplifier, nous supposerons connus l'angle ξ' de chute de la roue d'échappement, la valeur u' que prend la variable u à l'instant du choc et les distances a′ et a ; nous indiquerons ensuite comment on pourra combiner les résultats obtenus, avec les relations propres à fixer les valeurs de ξ', u', a′ et a.

Mettons dans l'équation (75) à la place de x'_0 sa valeur $x_0(1+v)$, nous aurons

$$(86) \qquad x_2 = x_0 + x_0 v - 4f - \frac{4}{3}x_0^2\eta + \frac{16}{9}x_0^3\eta^2 - \frac{2}{3}x_0^2\eta v + \frac{8}{3}x_0 f\eta.$$

x_0 et x_2 sont ici les valeurs de $u_0 - f$ et de $u_2 - f$; elles représentent les amplitudes qui ont lieu au commencement de deux oscillations durant lesquelles le balancier reçoit un choc, séparées par une oscillation dans laquelle il ne se produit pas de choc. Le régime permanent étant supposé établi, deux valeurs consécutives de u' seront égales, comme le supposent les calculs qui ont conduit à l'équation (75); on devra avoir aussi $x_2 = x_0$: dès lors x_0 désignera la valeur de x qui a lieu au commencement du régime permanent. Cette équation de condition jointe à la précédente donnent, pour déterminer v en fonction de x_0,

$$x_0\left(1 - \frac{2}{3}x_0\eta\right)v = 4\left(f + \frac{1}{3}x_0^2\eta - \frac{4}{9}x_0^3\eta^2 - \frac{2}{3}x_0 f\eta\right);$$

on en tire

$$(87) \qquad v = \frac{4}{x_0}\left(f + \frac{1}{3}x_0^2\eta - \frac{2}{9}x_0^3\eta^2\right),$$

$$\frac{1}{2}v^2 = \frac{8}{x_0^2}\left(f^2 + \frac{2}{3}x_0^2 f\eta + \frac{1}{9}x_0^4\eta^2\right):$$

posant

$$(88) \qquad (2) = x_0 f + \frac{1}{3}x_0^3\eta + 2f^2 + \frac{4}{3}x_0^2 f\eta,$$

il vient

$$v + \frac{1}{2}v^2 = \frac{4}{x_0^2}(2).$$

Égalant cette valeur avec celle fournie par l'équation (82) dans laquelle nous rétablirons les moments d'inertie MI^2, $M'I'^2$ respectivement à la place de Aa et $A'a'$, nous aurons

(89) $$\frac{1}{2\lambda^2}\frac{\omega'_0-\frac{a}{a'}\omega_0}{\frac{a'}{a}MI^2+\frac{a}{a'}M'I'^2}M'I'^2\cos^2\frac{1}{2}\chi\left(\omega_0+\frac{\omega'_0-\frac{a}{a'}\omega_0}{\frac{a'}{a}MI^2+\frac{a}{a'}M'I'^2}M'I'^2\cos^2\frac{1}{2}\chi\right)=(2).$$

La quantité ω'_0 étant censée connue par la seconde expression (85), il faut substituer pour ω_0 sa valeur (83). Nous poserons à cet effet

(90) $$(1)=1-\frac{1}{3}x_0\gamma_1+\frac{1}{9}x_0^2\gamma_1^2+\frac{1}{2}x'\gamma_1-\frac{1}{2}\frac{x'^2}{x_0^2};$$

d'où résultera

$$\frac{\omega_0}{\lambda_1}=(1)\,x_0.$$

Observant d'ailleurs que la fonction (2) étant du premier ordre de petitesse, on peut remplacer λ^2 par λ_1^2 dans l'équation (89) et, posant encore

(91) $$k=\frac{M'I'^2}{\frac{a'}{a}MI^2+\frac{a}{a'}M'I'^2}\cos^2\frac{1}{2}\chi,$$
$$\mu=\frac{k^2}{2}\frac{\omega'_0}{\lambda_1},\qquad \mu'=\frac{k}{2}-\frac{k^2}{2}\frac{a}{a'};$$

l'équation (89) deviendra

$$\left[\frac{\omega'_0}{\lambda_1}-\frac{a}{a'}(1)\,x_0\right][\mu+\mu'(1)\,x_0]=(2),$$

d'où

(92) $$x_0=\frac{1}{(1)}\frac{a'}{a}\frac{\omega'_0}{\lambda_1}-\frac{1}{(1)}\frac{a'}{a}\frac{(2)}{\mu+\mu'(1)x_0}.$$

En partant des données admises, cette équation, jointe aux équations (88) et (90), fera aisément connaître la valeur de x_0 ; car, si l'on néglige les termes du premier ordre, la valeur de x_0 se réduira à $\frac{a'}{a}\frac{\omega'_0}{\lambda_1}$, conformément à l'hypothèse faite (n° 15) sur la petitesse de x' : substituant cette valeur approchée dans les fonctions (1) et (2), l'équation (92) fournirait une valeur plus exacte de x_0. Au moyen d'une nouvelle substitution, on arriverait à tenir compte des termes du second ordre.

On remarquera que la valeur approchée de x_0 obtenue en négligeant les termes du premier et du second ordre, répond à la condition d'un simple contact du balancier et de la roue d'échappement. Il n'est donc pas étonnant qu'elle soit indépendante de l'élasticité des corps; mais le second terme de x_0 n'apporte, dans tous les cas, qu'une modification très-petite à la valeur primitive; ce qui doit être, puisque les effets du choc sont eux-mêmes très-petits par hypothèse.

Ayant obtenu x_0, l'équation (87) fera connaître v.

17. Passons actuellement à la seconde partie du problème, ou à la recherche des relations entre les quantités considérées précédemment comme données, et la quantité x_0 que nous venons de déterminer.

Soient (*fig.* 2), dans le plan mené par les extrémités des dents de la roue d'échappement, perpendiculairement aux axes de cette roue et du balancier :

C le centre du balancier;

C′ celui de la roue d'échappement;

Bb le plan destiné à recevoir l'action du choc, ou la surface extérieure de la *palette* du balancier; $\rho = \overline{BC}$ la distance de C au plan Bb; B′ l'extrémité de la dent de la roue d'échappement, qui doit venir choquer le plan Bb; $\rho' = \overline{B'C'}$ le rayon du cercle décrit par le point B′;

$D = \overline{CC'}$ la distance des axes ou des centres C et C′; EC la direction de ρ quand le balancier passe par sa position d'équilibre;

ε l'angle de EC avec D, mesuré dans le sens opposé au mouvement de rotation autour de C;

γ_1 l'angle de ρ avec D, à l'instant où la roue d'échappement est dégagée, mesuré dans le même sens que ε;

γ'_1 l'angle de ρ' avec D à ce même instant, et mesuré dans le sens opposé au mouvement de rotation autour de C′.

Les angles ε, γ_1 et γ'_1 sont donnés par construction.

Soient (*fig.* 3), à l'instant du choc, γ et γ' les angles de ρ et ρ' avec D, mesurés dans le même sens que les précédents.

On se rappelle que a et a′ désignent les distances des axes C et C′ à la normale B′N menée par le point de contact; on a dès lors

$$(93)\qquad \begin{aligned} a &= \overline{BB'}, \\ a' &= \rho' \sin(\gamma + \gamma'). \end{aligned}$$

Projetons successivement le contour CBB′C′ sur la droite Bb et sur la direction BC qui est perpendiculaire à cette dernière; puis égalons les projections à celles

de la droite D qui ferme le contour; nous aurons les relations

$$(94)\qquad \begin{aligned} D\sin\gamma &= a + \rho'\sin(\gamma+\gamma'); \\ D\cos\gamma &= \rho + \rho'\cos(\gamma+\gamma'). \end{aligned}$$

D'un autre côté, l'angle variable u étant décrit par une droite quelconque prise dans le plan perpendiculaire à l'axe du balancier, et liée à cet organe, nous choisirons ici pour cette droite la droite ρ, et nous rappellerons que u_0 est pris positif dans la première oscillation. Ceci posé, soit $\overline{u_1}$ la valeur de u à l'instant où la roue d'échappement est dégagée, u' désignant toujours celle qui répond à l'instant du choc; on aura

$$\begin{aligned} \gamma_1 - \varepsilon &= \overline{u_1}, \\ \gamma - \varepsilon &= u'; \end{aligned}$$

d'où

$$\gamma - \gamma_1 = u' - \overline{u_1}.$$

L'angle $\gamma'_1 - \gamma'$ est identique avec celui que nous avons désigné par ξ' : désignons par ξ l'angle $\overline{u_1} - u'$, ou soient

$$(95)\qquad \begin{aligned} \xi' &= \gamma'_1 - \gamma', \\ \xi &= \overline{u_1} - u'; \end{aligned}$$

on déduit de ces relations

$$\begin{aligned} \gamma &= \gamma_1 - \xi, \\ \gamma + \gamma' &= \gamma_1 + \gamma'_1 - \xi - \xi'. \end{aligned}$$

Mettons ces valeurs dans les équations (93) et (94), nous en tirerons

$$(96)\qquad \begin{aligned} a' &= +\rho'\sin(\gamma_1 + \gamma'_1 - \xi - \xi'), \\ a &= -\rho'\sin(\gamma_1 + \gamma'_1 - \xi - \xi') + D\sin(\gamma_1 - \xi), \\ \rho &= -\rho'\cos(\gamma_1 + \gamma'_1 - \xi - \xi') + D\cos(\gamma_1 - \xi), \end{aligned}$$

dont les deux premières donnent par division

$$(97)\qquad \frac{a}{a'} = \frac{D}{\rho'}\,\frac{\sin(\gamma_1 - \xi)}{\sin(\gamma_1 + \gamma'_1 - \xi - \xi')} - 1.$$

Maintenant, si l'on observe que $\gamma'_1 - \xi' = \gamma'$ est l'angle que fait ρ' avec la ligne des centres à l'instant du choc, et que dans la pratique cet angle est très-petit, le rapport des sinus de l'expression précédente diffère peu de l'unité; on obtient

8.

ainsi pour valeur approchée de $\frac{a}{a'}$ la quantité $\frac{D-\rho'}{\rho'}$, valeur qui sera rigoureuse quand le point de contact sera sur la ligne des centres.

Nous donnerons bientôt le moyen de déterminer ξ, du moins approximativement; ce qui permettra d'appliquer la formule (97) en y négligeant seulement ξ' et l'erreur dont ξ peut être affecté.

Soit, pour abréger,

(98) $$\gamma_2 = \gamma_1 + \gamma'_1 - \xi' = \gamma_1 + \gamma',$$

on a, en développant l'équation (96),

(99) $$(D\cos\gamma_1 - \rho'\cos\gamma_2)\cos\xi + (D\sin\gamma_1 - \rho'\sin\gamma_2)\sin\xi - \rho = 0;$$

posant encore

(100) $$\left.\begin{aligned} K\cos\psi &= D\cos\gamma_1 - \rho'\cos\gamma_2, \\ K\sin\psi &= D\sin\gamma_1 - \rho'\sin\gamma_2, \end{aligned}\right\} \text{ d'où } \psi \text{ et } K;$$

il vient

(101) $$\cos(\xi-\psi) = \frac{\rho}{K} \quad \text{ou} \quad \tang\frac{1}{2}(\xi-\psi) = \pm\sqrt{\frac{K-\rho}{K+\rho}},$$

équations qui feront connaître l'angle $\xi - \psi$ au signe près, en négligeant dans une première approximation le petit angle ξ' qui est inconnu (*).

L'angle ξ est positif en vertu de l'équation (95) et de la signification des quantités $\overline{u_1}$ et u'. Cette considération ne suffit pas pour distinguer entre les racines, si elles sont toutes deux positives.

(*) Voici une autre solution : on tire de l'équation (99), à l'aide des relations (100),

$$K\cos\psi\left(\cos^2\frac{1}{2}\xi - \sin^2\frac{1}{2}\xi\right) + 2K\sin\psi\sin\frac{1}{2}\xi\cos\frac{1}{2}\xi - \rho = 0;$$

d'où

$$\tang\frac{1}{2}\xi = \frac{K\sin\psi \pm \sqrt{K^2-\rho^2}}{K\cos\psi+\rho}:$$

les deux racines de cette équation seront de signe contraire ou de même signe, suivant que $K^2\cos^2\psi - \rho^2$ sera positif ou négatif. Cette solution peut dispenser de l'emploi des auxiliaires K et ψ, puisqu'en remettant leurs valeurs, il vient

$$\tang\frac{1}{2}\xi = \frac{D\sin\gamma_1 - \rho'\sin\gamma_2 \pm \sqrt{D^2+\rho'^2 - 2D\rho'\cos(\gamma_2-\gamma_1) - \rho^2}}{D\cos\gamma_1 - \rho'\cos\gamma_2 + \rho}.$$

Géométriquement, le point B′ doit rencontrer en deux points la droite Bb prolongée, s'il est nécessaire ; or la première rencontre est la seule qui soit à considérer. Dans celle-ci u' prend une valeur algébriquement plus grande que dans la seconde, ce qui rend ξ plus petit. Il faudra donc admettre la moindre valeur positive de ξ.

Ayant ainsi obtenu une valeur approximative de ξ en négligeant ξ', on pourra calculer le rapport $\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{a}'}$ au moyen de l'expression (97) et au même degré d'approximation, comme il a été dit plus haut.

Il est nécessaire actuellement de calculer le temps τ pendant lequel sont décrits les angles ξ et ξ', l'un par le balancier, l'autre par la roue d'échappement. Afin d'éviter la confusion que présenterait l'emploi de la lettre a affectée antérieurement à un autre usage, nous consignerons dans la note ci-dessous la démonstration de formules nécessaires au calcul dont il s'agit : cela nous évitera d'ailleurs une interruption (*).

Les formules suivantes sont extraites de cette note. On n'y a conservé que les signes inférieurs correspondants à x_0 positif ou $\frac{dx}{dt}$ négatif; en outre, on y a supprimé, pour abréger, le dernier terme calculé de la valeur de ζ, terme qu'on réta-

---

(*) *Note concernant le calcul du temps compris entre le dégagement de la roue d'échappement et le choc reçu par le balancier.*

Divers moyens peuvent être employés pour effectuer ce calcul; nous nous bornerons à exposer celui qui nous paraît le mieux convenir au but spécial que nous avons en vue.

Comme les positions du balancier correspondantes au dégagement et au choc sont plus voisines de sa position moyenne que des limites de ses excursions, nous rattacherons les positions qui nous intéressent à celle occupée par le balancier à l'instant milieu de sa première oscillation simple. Commençons donc par déterminer cette position.

A cet instant, on a $t = \frac{1}{2}\mathrm{T}_1$ et $\lambda_1 t = \frac{\pi}{2}$. Cette valeur étant mise dans l'équation (49), on a, en désignant par $x_{\frac{1}{2}}$ la valeur correspondante de x,

$$x_{\frac{1}{2}} = b + \frac{1}{6} a' \eta.$$

Dans cette équation et les suivantes, le double signe de η n'est pas rétabli; on en tiendra compte à la fin du calcul.

Différentions plusieurs fois l'équation (51) par rapport au temps, et faisons ensuite $\lambda_1 t = \frac{\pi}{2}$ dans

blirait au besoin, en y prenant les signes inférieurs. Enfin, $\overline{u}_1 - u'$ a été remplacé

---

les résultats; nous aurons

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_{\frac{1}{2}} = -\lambda_1 a \left(1 - \frac{1}{24} a^2 \eta^2\right),$$

$$\left(\frac{d^2 x}{dt^2}\right)_{\frac{1}{2}} = -\lambda_1^2 a \frac{1}{3} a \eta,$$

$$\left(\frac{d^3 x}{dt^3}\right)_{\frac{1}{2}} = +\lambda_1^3 a \left(1 - \frac{7}{24} a^2 \eta^2\right),$$

$$\left(\frac{d^4 x}{dt^4}\right)_{\frac{1}{2}} = +\lambda_1^4 a \frac{4}{3} a \eta,$$

....

Désignant toujours par t' la valeur de t correspondante à u' ou x', et par t_1 celle correspondante à $\overline{u}_1$ ou $\overline{x}_1$, et posant, pour abréger,

$$\tau' = t' - \frac{1}{2} T_1, \qquad \tau_1 = t_1 - \frac{1}{2} T_1,$$

nous aurons, par le théorème de Taylor,

$$u' = u_{\frac{1}{2}} + \left(\frac{du}{dt}\right)_{\frac{1}{2}} \tau' + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2 u}{dt^2}\right)_{\frac{1}{2}} \tau'^2 + \frac{1}{2.3}\left(\frac{d^3 u}{dt^3}\right)_{\frac{1}{2}} \tau'^3 + \frac{1}{2.3.4}\left(\frac{d^4 u}{dt^4}\right)_{\frac{1}{2}} \tau'^4 + \ldots,$$

$$\overline{u}_1 = u_{\frac{1}{2}} + \left(\frac{du}{dt}\right)_{\frac{1}{2}} \tau_1 + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2 u}{dt^2}\right)_{\frac{1}{2}} \tau_1^2 + \frac{1}{2.3}\left(\frac{d^3 u}{dt^3}\right)_{\frac{1}{2}} \tau_1^3 + \frac{1}{2.3.4}\left(\frac{d^4 u}{dt^4}\right)_{\frac{1}{2}} \tau_1^4 + \ldots.$$

On en déduit par soustraction, et mettant en facteur commun $\tau' - \tau_1$ ou mieux son égal $t' - t_1$,

$$u' - \overline{u}_1 = (t' - t_1)\Bigg[\left(\frac{du}{dt}\right)_{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2 u}{dt^2}\right)_{\frac{1}{2}} (\tau' + \tau_1) + \frac{1}{6}\left(\frac{d^3 u}{dt^3}\right)_{\frac{1}{2}} (\tau'^2 + \tau'\tau_1 + \tau_1^2)$$
$$+ \frac{1}{24}\left(\frac{d^4 u}{dt^4}\right)_{\frac{1}{2}} (\tau'^3 + \tau'^2\tau_1 + \tau'\tau_1^2 + \tau_1^3) + \ldots\Bigg].$$

Or les dérivées de u sont égales à celles de x : substituons donc les valeurs précédentes de ces dernières et la valeur (43) de a, rétablissons partout les doubles signes devant η et posons

$$\zeta = \pm \frac{1}{3} x_0 \eta + \frac{13}{72} x_0^2 \eta^2 \pm \frac{1}{6} \lambda_1 x_0 \eta \left(1 \pm \frac{2}{3} x_0 \eta\right) (\tau' + \tau_1)$$
$$- \frac{1}{6} \lambda_1^2 \left(1 \pm \frac{1}{3} x_0 \eta - \frac{5}{72} x_0^2 \eta^2\right) (\tau'^2 + \tau'\tau_1 + \tau_1^2)$$
$$\mp \frac{1}{18} \lambda_1^3 x_0 \eta \left(1 \pm \frac{2}{3} x_0 \eta\right) (\tau'^3 + \tau'^2\tau_1 + \tau'\tau_1^2 + \tau_1^3)$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

par ξ [équation (95)]. Voici ces formules :

$$\tau' = t' - \frac{1}{2}T_1, \qquad \tau_1 = t_1 - \frac{1}{2}T_1;$$

(102) $$\zeta = -\frac{1}{3}x_0\eta + \frac{13}{72}x_0^2\eta^2 - \frac{1}{6}\lambda_1 x_0\eta\left(1 - \frac{2}{3}x_0\eta\right)(\tau' + \tau_1) - \frac{1}{6}\lambda_1^2\left(1 - \frac{1}{3}x_0\eta - \frac{5}{72}x_0^2\eta^2\right)(\tau'^2 + \tau'\tau_1 + \tau_1^2) + \ldots,$$

(103) $$t' - t_1 = \tau = \frac{\xi}{\lambda_1 x_0(1+\zeta)}.$$

Mettons cette valeur de τ dans les équations (84) et (85), nous aurons

(103 *bis*) $$\xi' = \frac{1}{2}\frac{P'p'}{M'I'^2}\frac{\xi^2}{\lambda_1^2 x_0^2(1+\zeta)^2},$$
$$\omega'_0 = \frac{P'p'}{M'I'^2}\frac{\xi}{\lambda_1 x_0(1+\zeta)};$$

on en déduit

(104) $$\frac{\omega'_0}{\lambda_1 x_0} = 2\frac{\xi'}{\xi}(1+\zeta)$$

et

(105) $$x_0^2 = \frac{1}{2}\frac{P'p'}{M'I'^2}\frac{\xi^2}{\lambda_1^2(1+\zeta)^2\xi'}.$$

Si maintenant on tire de l'équation (92) la valeur du rapport $\frac{a}{a'}$, on aura, en substituant la valeur (104),

(106) $$\frac{a}{a'} = \frac{2}{(1)}\frac{\xi'}{\xi}(1+\zeta) - \frac{(2)}{(1)x_0[\mu + \mu'(1)x_0]};$$

d'où, en vertu de l'équation (97),

(107) $$1 - \frac{D}{\rho'}\frac{\sin(\gamma_1 - \xi)}{\sin(\gamma_1 + \gamma'_1 - \xi - \xi')} + \frac{2}{(1)}\frac{\xi'}{\xi}(1+\zeta) - \frac{(2)}{(1)x_0[\mu + \mu'(1)x_0]} = 0.$$

---

nous aurons

$$\bar{u}_1 - u' = \lambda_1 x_0(1+\zeta)(t' - t_1);$$

d'où l'on déduit

$$t' - t_1 = \frac{\bar{u}_1 - u'}{\lambda_1 x_0(1+\zeta)}.$$

Nous dirons dans le texte du Mémoire comment on appliquera ces formules dans le cas particulier qui nous intéresse.

Voici maintenant comment cette équation servira à résoudre la question proposée.

Première approximation.

Négligeant le dernier terme de l'équation (107) et réduisant les quantités $1+\zeta$ et (1) à l'unité, cette équation ne contiendra plus que les deux inconnues ξ et ξ'; en la joignant à l'équation (96), qui n'en contient pas d'autre, on aura ce qui est nécessaire pour déterminer ces deux inconnues.

On résoudra ces équations comme il suit : faisant une hypothèse sur ξ'; prenant, par exemple, ξ' égal à γ'_1, on calculera la valeur de ξ au moyen des équations (98), (100) et (101), qui tiennent lieu de l'équation (96); puis on substituera ces valeurs dans l'équation (107) réduite comme il vient d'être dit. Une nouvelle hypothèse servira à corriger l'erreur laissée par la première.

La valeur de $\frac{a}{a'}$ sera égale à la somme des deux derniers termes du premier membre de l'équation (107) quand elle sera satisfaite. La valeur de x_0^2 s'obtiendra au moyen de l'équation (105), en y négligeant ζ et en prenant λ à la place de λ_1. Celle de τ s'obtiendra de même à l'aide de l'équation (103). Enfin l'équation (104) donnera

$$\frac{\omega'_0}{\lambda_1} = 2x_0\frac{\xi'}{\xi}(1+\zeta), \tag{108}$$

quantité dont on aura besoin dans la deuxième approximation et que l'on calculera ici en négligeant ζ.

Il est à remarquer que les valeurs de ξ, ξ' et $\frac{a}{a'}$, fournies par cette solution approchée, dépendent uniquement des quantités D, ρ, ρ', γ_1 et γ'_1, ou des données géométriques relatives à l'échappement : ce seront donc des quantités constantes pour un système donné d'échappement (*).

Si l'on substitue dans l'équation (105), à la place de λ_1^2, la valeur $\frac{x}{Ml^2}$ fournie

(*) On s'étonnera peut-être que, dans le régime permanent, le lieu de la rencontre du balancier par la roue d'échappement, défini par les angles ξ et ξ', soit indépendant de la force motrice P' transmise par le rouage. Voici comment on pourra s'en rendre compte. Supposons que le chronomètre étant parvenu à son état de régime permanent, et le choc se produisant dans une certaine position du balancier, on vienne à augmenter subitement l'action de la force motrice; il est clair que le mouvement de la roue d'échappement s'accélérera et que le choc aura lieu avant le passage du balancier par la position où il se produisait antérieurement. On aperçoit aisément que l'intensité du choc sera plus grande malgré la diminution de la chute : dès lors l'amplitude des oscillations se trouvera augmentée. Il en résultera que le balancier prendra une vitesse plus grande dans les posi-

par les équations (5) et (47), aux termes près du second ordre, on aura à ce degré d'approximation

$$x_0^2 = \frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{MI}^2}{\mathrm{M'I'}^2}\,\frac{\mathrm{P'}p'}{\varkappa}\,\frac{\xi^2}{(1+\zeta)^2\,\xi'},$$

ou, en vertu de la valeur approximative de $\frac{\mathrm{a}'}{\mathrm{a}}$ que donne l'équation (106),

$$(109) \qquad x_0^2 = \frac{\mathrm{a}'}{\mathrm{a}}\,\frac{\mathrm{MI}^2}{\mathrm{M'I'}^2}\,\frac{\mathrm{P'}p'}{\varkappa}\,\frac{\xi}{1+\zeta} = 2\,\frac{\mathrm{a}'^2}{\mathrm{a}^2}\,\frac{\mathrm{MI}^2}{\mathrm{M'I'}^2}\,\frac{\mathrm{P'}p'}{\varkappa}\,\xi'.$$

Eu égard à ce que les quantités ξ, ξ', $\frac{\mathrm{a}'}{\mathrm{a}}$ sont sensiblement constantes, la relation précédente fournit cet énoncé :

Dans le mouvement d'un chronomètre parvenu au régime permanent, les amplitudes sont proportionnelles à la racine carrée du moment d'inertie du balancier et du moment de la force motrice qui sollicite la roue d'échappement; elles sont en raison inverse de la racine carrée du moment d'inertie de cette même roue et du moment de la force du ressort spiral. Ce résultat approximatif est indépendant des propriétés élastiques du balancier et de la roue d'échappement.

Deuxième approximation.

On vient d'obtenir les valeurs approchées de ξ, ξ', $\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{a}'}$, x_0, τ et $\frac{\omega'_0}{\lambda_1}$, en négligeant les termes du premier ordre de petitesse. Pour tenir compte actuellement de ces termes, et accidentellement, de termes du second ordre, il faut effectuer les calculs suivants.

On aura λ_1 par la formule

$$(110) \qquad \lambda_1 = \lambda\left(1 - \frac{1}{24}\,x_0^2\,\gamma_1^2\right)$$

déduite de l'équation (47).

On devra calculer ensuite t_1 en fonction de $\bar{u}_1$, dont la valeur est

$$(111) \qquad \bar{u}_1 = \gamma_1 - \varepsilon:$$

à cet effet, les formules (44) et (47 *bis*) jointes aux équations (43), en y mettant

tions voisines de sa position d'équilibre. Le choc suivant se produira donc un peu plus tard, ou dans une position du balancier plus voisine de celle correspondante au choc dans le régime permanent. On comprend ainsi qu'après une suite d'oscillations, le balancier prendra un nouveau régime, dans lequel néanmoins la position primitive de cet organe à l'instant du choc se trouvera rétablie. La considération d'une diminution de la force motrice conduirait au même résultat.

le signe — devant η, attendu que les doubles signes ne sont pas rétablis dans ces formules, donnent

(112)
$$\cos\varphi_1 = \frac{\bar{u}_1 - f - \frac{1}{3}x_0\left(x_0\eta - \frac{2}{3}x_0^2\eta^2\right)}{x_0\left(1 - \frac{1}{3}x_0\eta + \frac{2}{9}x_0^2\eta^2\right)},$$
$$t_1 = \frac{1}{\lambda_1}\left[\varphi_1 - \frac{1}{6}x_0\eta\left(1 - \frac{1}{3}x_0\eta\right)\sin\varphi_1\right]$$

(l'angle φ_1 doit être pris ici avec le signe +, ou, plus exactement, tel que son sinus soit positif).

Connaissant t_1 on aura

(113)
$$t' = t_1 + \tau;$$

on a d'ailleurs, équations (56),

(114)
$$\frac{T_1}{2} = \frac{T}{2}\left(1 + \frac{1}{24}x_0^2\eta^2\right) = \frac{1}{2}\frac{\pi}{\lambda_1};$$

puis ensuite

(115)
$$\tau_1 = t_1 - \frac{1}{2}T_1, \quad \tau' = \tau_1 + \tau;$$

ce qui permettra de calculer la fonction ζ au moyen de la troisième équation (102).

On a, suivant l'équation (95),

(116)
$$u' = \bar{u}_1 - \xi,$$

d'où

(117)
$$x' = \bar{u}_1 - f - \xi.$$

Cette valeur permettra de calculer la série (1) au moyen de la formule (90). On aura les quantiés k, μ et μ' par les formules (91).

On pourra dès lors tenir compte du dernier terme de l'équation (107) négligé dans la première approximation. Cette équation, jointe à l'équation (96) ou aux équations (98), (100) et (101) qui en tiennent lieu, servira à déterminer de nouvelles valeurs de ξ, ξ' et $\frac{a}{a'}$, comme il a été dit. Ensuite, les équations (103), (105) et (108) fourniront aussi des valeurs plus approchées de τ, x_0 et $\frac{\omega'_0}{\lambda_1}$.

Les résultats ainsi obtenus ne seront plus en erreur que de quantités du second ordre. Si on voulait poursuivre les approximations jusqu'aux termes de cet ordre, il faudrait reprendre les calculs de la deuxième approximation en partant des résultats précédents.

Nous ferons observer que la convergence de nos approximations repose principalement sur le degré de petitesse de la fonction ζ (102). Or le degré de petitesse du dernier terme de cette fonction pourrait seul présenter quelque incertitude. Pour se convaincre que ce terme est petit, il suffit de se rappeler que les deux phases de l'échappement ont lieu à des intervalles τ_1 et τ' du milieu de l'oscillation, qui sont généralement faibles.

Ayant obtenu x_0, l'amplitude effective des oscillations dans le régime permanent est donnée par la formule

$$u_0 = x_0 + f, \tag{118}$$

et l'équation (87) fait connaître la valeur constante de v, qui a lieu dans ce même état.

Si l'on se proposait de calculer le nombre des battements après lesquels le régime permanent devrait s'établir, en partant d'une amplitude positive et donnée x_0; voici la série des calculs qu'il faudrait effectuer :

1° Calculer λ_1 au moyen de λ et x_0, équation (110) ;

2° Tirer les valeurs de ξ et ξ' des équations (103 *bis*) et (96) combinées, en négligeant d'abord ζ et en tenant compte ensuite de sa valeur, au moyen des formules (110) à (115) jointes à (103) et (102);

3° Calculer les quantités ω'_0, x', ω_0, $\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{a}'}$, v et x_2 respectivement à l'aide des formules (85), (117), (83), (97), (82) (*) et (86) (**).

Puis on recommencerait les mêmes calculs, en mettant la valeur trouvée x_2 à la place de x_0, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on parvînt à un résultat constant. Le nombre des calculs de ce genre qu'il faudrait ainsi effectuer serait égal au nombre des battements qui doivent précéder l'établissement du régime permanent. Le résultat obtenu s'identifierait avec la valeur de x_0, que fournirait le calcul direct de ce régime.

Personne assurément ne songera à effectuer les calculs que nous venons d'indiquer; néanmoins il nous a paru convenable de présenter ces indications en quelques lignes, afin de rappeler comment se produisent les modifications graduelles du mouvement d'un chronomètre, et quelles sont les relations principales qui les déterminent.

(*) Il faudrait y remplacer les quantités A et A' par $\frac{\mathrm{MI}^2}{\mathrm{a}}$ et $\frac{\mathrm{M'I'}^2}{\mathrm{a}'}$.

(**) Nous ferons remarquer qu'aucune des équations précédentes n'implique l'emploi de l'équation (87) relative au régime permanent.

18. *Des effets de l'épaississement des huiles.* — Nous avons fait voir (n° **12**) que les altérations produites dans l'intervalle des battements consécutifs d'un chronomètre se réduisent à des quantités du second ordre de petitesse, lorsque le balancier reçoit l'impulsion de la roue d'échappement, dans une position très-peu distante de sa position d'équilibre; et que si l'intervalle de ces deux positions n'est pas un petit angle, les altérations dont il s'agit s'élèveront au premier ordre.

Tant que l'échappement reste possible, les huiles qui lubrifient les pivots du balancier ne peuvent donc produire *à elles seules* de changement dans la durée des battements : cette durée ne peut être sensiblement altérée, qu'autant que l'angle dont nous venons de parler acquiert une grandeur sensible. Dans cette circonstance, l'épaississement des huiles produit un double effet : d'une part, les résistances du balancier vont en croissant; d'autre part, les résistances des pivots des pièces du rouage augmentent aussi et déterminent une diminution dans l'intensité du moment $P'p'$ de la force transmise à la roue d'échappement. Examinons quels peuvent être les effets de cette dernière variation.

Dans le numéro précédent, nous avons montré comment on parviendrait à déterminer l'amplitude u_0 du régime permanent, au moyen des éléments constitutifs du balancier, des données géométriques de l'échappement et du moment de la force P' produite par le ressort moteur et transmise à la roue d'échappement. En même temps que l'on détermine u_0, on obtient la quantité v qui représente l'effet du choc, et l'angle u' dont le balancier est écarté de sa position d'équilibre à l'instant du choc.

En négligeant les très-petits termes, nous avons trouvé que la quantité x_0 ou $u_0 - f$ varie comme la racine carrée du moment de la force P', tandis que l'angle ξ ne varie pas. Il résulte de l'équation (117) que l'angle x' ou $u' - f$ reste pareillement constant. L'équation (87) montre d'ailleurs que la quantité v varie avec x_0 ou avec P'. Mais il est remarquable que cette quantité v ne produise que des effets du second ordre [*voir* équation (80)]; en sorte que la variation dans l'intensité du choc, due à l'épaississement des huiles, reste sans effet. Lorsque l'angle u' acquiert une valeur sensible, il donne lieu au terme du premier ordre

$$-\frac{4T}{\pi \sin \varphi'} \frac{u' - f}{u_0 - f} \left(\frac{f}{u_0 - f} + \frac{1}{3} u_0 \gamma \right),$$

et à des termes du second ordre que nous n'écrivons pas. Ce terme dépend du frottement f et de la résistance de l'air. Le facteur $u' - f$ étant constant à des termes près du premier ordre, nous pouvons le considérer ici comme tel, et il n'en résultera, dans le terme que nous envisageons, que des erreurs du second ordre. Nous avions effectivement démontré (n° **12**) que si l'angle $u' - f$ est très-

petit, toutes les altérations qui peuvent affecter la durée des battements se réduisent à des termes du second ordre; mais nous n'avions pas fait voir encore que cet angle ne varie pas. Actuellement que la démonstration est faite avec le degré d'exactitude nécessaire, nous pouvons regarder l'énoncé précédent comme s'appliquant au régime permanent de tout chronomètre dans lequel l'artiste aura réussi une première fois à rendre très-petit l'angle dont il s'agit.

Considérons le cas où le facteur $u' - f$ ne serait pas extrêmement faible, nous ferons remarquer qu'il ne sera cependant pas assez grand relativement à x_0 ou $u_0 - f$, pour que la valeur de $\sin\varphi'$ diffère sensiblement de l'unité; alors les facteurs variables du terme dont nous nous occupons se réduiront à la somme

$$\frac{f}{(u_0 - f)^2} + \frac{1}{3}\eta.$$

La partie $\frac{1}{3}\eta$ qui dépend de la résistance de l'air affectera la marche du chronomètre d'une manière sensiblement constante : le terme $\frac{f}{(u_0 - f)^2}$ aura, au contraire, une influence, qui variera avec l'état des huiles, sans compensation des effets partiels. En effet, d'une part, f croît avec l'épaississement de l'huile qui lubrifie les pivots du balancier; d'autre part, le carré $(u_0 - f)^2$ diminue proportionnellement au moment de la force P', ou lorsque l'épaississement des huiles du rouage augmente : ainsi les variations du numérateur et du dénominateur concourent à l'accroissement du facteur $\frac{f}{(u_0 - f)^2}$. L'épaississement des huiles a donc pour effet d'accélérer la marche du chronomètre, lorsque l'angle $u' - f$ est positif ou quand le choc du balancier précède le milieu de l'oscillation simple, et de la réduire dans le cas contraire.

Faudrait-il attribuer à l'influence de l'angle $u' - f$ le fait généralement observé que la marche des chronomètres s'accélère avec le temps? L'usage bien connu des horlogers, de produire le choc avant que le balancier passe par sa position d'équilibre, tendrait à confirmer cette présomption. Quant au degré de petitesse de u', les artistes n'ont aucun moyen de l'observer, et l'on a vu que la valeur approchée de ξ, d'où il dépend, résulte de la combinaison des deux équations (96) et (107) dont la dernière réduite à son plus grand degré de simplicité reste néanmoins transcendante; il n'est donc pas certain que la valeur de l'angle u' réalisée dans le plus grand nombre des chronomètres soit aussi petite que les artistes ont pu se le figurer.

Il serait intéressant de faire l'application des équations (96) et (107), jointes à (111) et (116), pour en déduire les valeurs approximatives de u' que l'on peut rencontrer dans la pratique.

Au reste, on pourrait faire subir une épreuve très-simple à l'hypothèse que nous nous sommes permise, concernant le rôle de l'angle u' dans le phénomène de l'accélération de la marche des chronomètres avec le temps, hypothèse qui attribue l'altération de la durée des battements à un terme proportionnel à $\frac{f}{(u_0 - f)^2}$, quand u' n'est pas nul. Cette épreuve consisterait à observer la marche et l'amplitude du balancier d'un chronomètre (*) dont l'épaississement des huiles aurait produit son effet ordinaire; puis on nettoierait partiellement le rouage, de manière à restituer à l'action de la force motrice la moitié environ de ce qu'elle avait perdu, et cela sans modifier l'état des huiles du balancier; on observerait de nouveau la marche et l'amplitude : enfin on achèverait le nettoyage du rouage en en renouvelant les huiles, mais toujours sans modifier l'état du balancier, et l'on observerait encore la marche et l'amplitude. Ces trois observations, dans lesquelles f n'aurait pas varié, permettraient de vérifier si les variations dans la durée des battements suivent la raison inverse du carré de l'amplitude.

Si l'accélération de la marche du chronomètre pouvait persister quand u' est nul, ou que dans le cas contraire elle ne suivît pas la loi précédente, il faudrait en rechercher la cause dans les circonstances que nous aurons omises, telles que l'action de la roue d'échappement après la production du choc, etc., ou dans une loi de la résistance de l'air différente de celle que nous avons admise.

Quoi qu'il en soit, la nécessité que l'angle u' soit très-petit nous paraît suffisamment démontrée : nous indiquerons en conséquence les dispositions à prendre, dans la construction, pour que cette condition soit réalisée.

19. *Conditions relatives à l'échappement.* — Nous rechercherons particulièrement ici celles qui sont de nature à assurer la petitesse de l'angle u' compris entre la position du balancier, à l'instant où la roue d'échappement est dégagée, et sa position d'équilibre. Dans le régime permanent du mouvement des chronomètres, il s'établit entre les quantités a, a′, ξ et ξ' une relation qui est approximativement la suivante :

$$\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{a}'} = 2\frac{\xi'}{\xi}. \tag{119}$$

Cette relation s'obtient en négligeant, dans l'équation (106), les petits termes qu'elle contient. Jointe aux équations (96) et (97), elle détermine les angles ξ, ξ', et le rapport $\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{a}'}$, et, par suite, la valeur de u', suivant les équations (111) et (116).

(*) Il ne faut pas perdre de vue que, dans ce Mémoire, on suppose l'isochronisme du ressort spiral réalisé : on admet donc que le chronomètre est pourvu d'un spiral isochrone.

En d'autres termes, les quantités D, ρ, ρ', γ_1, γ'_1, ε étant données à priori, la situation du balancier et de la roue d'échappement à l'instant du choc, ainsi que l'angle u' et les angles ξ, ξ', décrits depuis l'instant où celle-ci est devenue libre. en résultent.

On peut évidemment renverser le problème et se proposer de rechercher quelles relations devront exister entre les quantités ξ et ξ' pour que, dans le régime permanent, le balancier et la roue d'échappement affectent à l'instant du choc une disposition donnée arbitrairement (*fig.* 3) : cette disposition déterminera nécessairement la valeur du rapport $\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{a}'}$.

Supposons, en premier lieu, que la position d'équilibre du balancier soit également donnée : il est clair qu'on pourra se donner encore l'une des quantités ξ et ξ', et que l'autre sera fournie par l'équation (119); il n'y aura donc plus qu'à régler l'appareil de détente de manière à produire la chute ξ ou à faire l'angle γ_1 égal à $\gamma + \xi$.

Secondement, soit proposé d'obtenir l'angle u' très petit : on y parviendra en le supposant nul dans les équations approximatives dont nous faisons usage. Cette condition conduit à $\xi = \overline{u_1}$ ou $\gamma = \varepsilon$. La disposition de l'échappement étant censée donnée, il faudra, pour réaliser cette condition, que le ressort spiral soit réglé de manière que le balancier se trouve en équilibre dans la position donnée : ensuite les valeurs de ξ et ξ' seront déterminées comme il vient d'être dit.

On peut ajouter aux conditions précédentes, celle que la dent de la roue d'échappement ne glisse pas sur la palette du balancier dans l'instant qui suit le choc. La condition pour qu'il en soit ainsi, s'exprimera en égalant à zéro la différentielle de la quantité a ou $\overline{\mathrm{BB}'}$ (*fig.* 3). Différentions sous ce point de vue les équations (94), nous aurons

$$\begin{aligned} \mathrm{D}\cos\gamma\, d\gamma &= \rho'\cos(\gamma+\gamma')(d\gamma + d\gamma'),\\ \mathrm{D}\sin\gamma\, d\gamma &= \rho'\sin(\gamma+\gamma')(d\gamma + d\gamma') : \end{aligned}$$

en divisant ces équations l'une par l'autre, on obtient tang γ = tang $(\gamma + \gamma')$, d'où $\gamma' = 0$. Cela signifie que les données doivent être assujetties à la condition que le point de contact B′ se trouve sur la ligne CC′ des centres. Alors les équations (93) et (94) deviennent

$$\text{(120)} \qquad \begin{aligned} \mathrm{a}' &= \rho'\sin\gamma,\\ \mathrm{a} &= (\mathrm{D}-\rho')\sin\gamma,\\ \rho &= (\mathrm{D}-\rho')\cos\gamma; \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{a}'} = \frac{\mathrm{D}-\rho'}{\rho'},$$

et l'équation (119) devient

$$(121) \qquad 2\frac{\xi'}{\xi} = \frac{D - \rho'}{\rho'}.$$

Les lignes D et ρ' étant données, on peut encore prendre arbitrairement l'une des quantités ρ et γ; l'autre s'en déduira au moyen de l'équation (120).

Prenant, comme précédemment, l'un des angles ξ et ξ' à volonté, on aura l'autre par l'équation (121), et l'on réglera l'appareil de détente ainsi qu'il a été dit plus haut.

Aux diverses conditions qui précèdent, il faut encore en ajouter trois autres : 1° la distance Cb (*fig.* 2) de l'extrémité de la palette à l'axe du balancier doit être telle, que l'extrémité de la dent de la roue d'échappement, quand celle-ci est au repos, ne puisse être rencontrée par la palette. Soit R cette distance, la condition est $R < \overline{CB'}$ ou

$$(122) \qquad R^2 < D^2 - 2D\rho'\cos\gamma'_1 + \rho'^2;$$

2° il faut que dans l'oscillation suivante, accomplie en sens contraire, la palette ne puisse rencontrer l'extrémité de la dent de la roue d'échappement parvenue à la limite de son excursion ou à son second repos. Soit γ''_1 l'angle décrit depuis le passage de ρ' par la ligne des centres, on aura l'autre condition

$$R^2 < D^2 - 2D\rho'\cos\gamma''_1 + \rho'^2,$$

laquelle se confondra avec la précédente, attendu que, dans la pratique, on fait $\gamma''_1 = \gamma'_1$; ce qui donne, pour l'intervalle angulaire des dents, $2\gamma'_1$; 3° la somme $\gamma'_1 + \gamma''_1$ ou $2\gamma'_1$ doit, dans tous les cas, diviser exactement la circonférence et être égale à un nombre donné.

On ne doit pas perdre de vue que nous avons supposé, dans ces recherches, que le contact du balancier et de la roue d'échappement ne dure qu'un instant, ou que cette dernière ne *mène* pas le balancier. Nous avons vu (n° **14**) dans quel sens on pourrait tenter des modifications pour atteindre ce résultat. On pourrait être conduit, avons-nous dit, à diminuer ρ' et à augmenter la chute ξ' : or ces variations sont tout à fait conciliables avec l'équation (121); elles permettraient même de disposer de l'angle ξ, s'il était nécessaire.

Il resterait à vérifier par l'expérience si le choc instantané n'entraînerait pas plus d'inconvénients, sous le rapport de l'usé des pièces, par exemple, que la pression continue qui paraît se développer après le choc, dans le système de construction pratiqué habituellement.

SECONDE PARTIE.

DE LA COMPENSATION DES CHRONOMÈTRES.

1. Résumons rapidement les divers résultats obtenus dans la première Partie de ce Mémoire.

En admettant comme un fait établi que le ressort spiral, bien construit, jouisse de la propriété d'exercer, sur le balancier, des actions dont les moments soient proportionnels aux écarts angulaires de la position d'équilibre, nous avons successivement démontré les propositions suivantes :

1° En l'absence de toute résistance, le balancier accomplit ses oscillations dans des temps égaux et indépendants des amplitudes qui restent constantes : la durée des oscillations est égale au nombre π multipliant la racine carrée du rapport du moment d'inertie du balancier autour de son axe de rotation, au moment de la force exercée par le ressort spiral lorsque l'écart angulaire de la position d'équilibre est égal à l'unité abstraite. Les deux moitiés de l'arc décrit sont parcourues dans des temps égaux.

2° La résistance des pivots (frottements et défaut de fluidité des huiles) peut être considérée comme indépendante de la situation angulaire du balancier; elle n'altère pas la durée des oscillations; mais elle a pour effet de déplacer le milieu de l'arc parcouru, alternativement de part et d'autre de la position d'équilibre qui aurait lieu sans cette résistance, et d'un certain angle égal à celui dont le balancier, partant de ladite position d'équilibre, doit tourner avant de céder à l'action du ressort : en outre, les amplitudes sont réduites du double du même angle à chaque oscillation; ce qui permet de déterminer la valeur de cet angle. Les deux moitiés de l'arc décrit dans chaque oscillation sont parcourues dans des temps égaux; et le balancier n'atteint sa position d'équilibre qu'après un temps qui excède la demi-durée de l'oscillation.

3° La roue d'échappement, en venant choquer le balancier, augmente sa force vive d'une quantité très-petite et qui sera considérée comme étant du même ordre que les frottements, ou du premier ordre de petitesse. Le choc a pour effet d'accroître l'amplitude que le frottement aurait laissé subsister, et de diminuer ou augmenter la durée de l'oscillation effective, suivant que le choc se produit avant ou après le passage du balancier par le milieu de l'amplitude qui aurait lieu sans

la production du choc ; l'altération dans la durée de l'oscillation est une quantité du second ordre, lorsque la distance angulaire du balancier au point milieu de l'amplitude, quand il reçoit le choc, est une quantité du premier ordre de petitesse.

La durée de l'oscillation qui suit, et pendant laquelle l'action de la roue d'échappement est suspendue, redevient égale à celle qui aurait lieu en l'absence de toute résistance.

Après cette oscillation, le balancier reçoit un nouveau choc de la roue d'échappement, et en prenant l'intervalle de ces deux chocs pour celui des battements du chronomètre, nous avons trouvé que l'intervalle des battements ne diffère du double de la durée des oscillations correspondante à l'absence de toute résistance, que d'une quantité du second ordre de petitesse, lorsque le choc se produit dans le voisinage du milieu de l'oscillation, circonstance que d'ailleurs les artistes réalisent autant qu'ils le peuvent. Cette quantité du second ordre est elle-même indépendante de l'intensité du choc.

4° Sous l'influence combinée des frottements et de la résistance de l'air proportionnellement au carré de la vitesse, l'isochronisme des oscillations du balancier et la durée de ses oscillations ne sont altérés que de quantités du second ordre de petitesse, proportionnelles au carré du produit de l'amplitude par le coefficient qui représente la résistance de l'air. Les amplitudes sont plus rapidement réduites que sous l'influence des frottements seuls : leur observation offre un moyen d'évaluer le précédent coefficient.

La résistance de l'air a pour effet d'avancer l'instant du passage du balancier par le milieu de sa course, et de retarder celui du passage par la position d'équilibre correspondante à l'absence de toute résistance.

5° Le balancier restant toujours soumis à l'action des frottements et de la résistance de l'air, le choc de la roue d'échappement augmente l'amplitude que ces résistances auraient laissé subsister; il a encore pour effet de diminuer ou d'accroître la durée de l'oscillation pendant laquelle il se produit, suivant qu'il précède ou suit le moment du passage par le milieu de l'amplitude qui aurait lieu sans le choc : cette altération de la durée de l'oscillation est du second ordre, quand l'intervalle dont il s'agit est petit; elle devient alors indépendante de la résistance de l'air.

La durée de l'oscillation suivante, accomplie en l'absence de choc, redevient égale à celle qui avait lieu avant le choc.

L'intervalle de deux battements consécutifs, *lorsque le choc se produit à une faible distance du milieu de l'oscillation*, ne diffère du double de la durée des oscillations, que de quantités du second ordre de petitesse, qui ne sont plus cette fois indépendantes de l'intensité du choc.

6° Bien que le balancier et la roue d'échappement ne puissent être considérés comme parfaitement élastiques, ces deux organes cessent de se toucher après le choc ; mais eu égard à ce que le choc est très-faible et qu'il se produit à peu de distance de l'axe du balancier, la dent de la roue d'échappement peut retomber presque immédiatement sur la palette, et d'autant plus vite que le moment d'inertie de cette roue sera moindre et l'action du ressort moteur plus grande : alors la roue d'échappement *mènera* le balancier. Cet effet pourrait être évité en diminuant l'action du ressort moteur ou le rayon de la roue d'échappement, ou augmentant encore le moment d'inertie de cette roue; on augmenterait au besoin la chute de la roue d'échappement, pour ne pas diminuer l'impulsion que le balancier doit recevoir.

7° Quand un chronomètre vient d'être mis en mouvement, les amplitudes varient jusqu'à ce qu'elles aient atteint une certaine grandeur, pour laquelle le travail dû aux résistances se trouve exactement compensé par l'accroissement de force vive que reçoit le balancier sous l'influence du choc de la roue d'échappement. Alors il s'établit dans le mouvement du balancier ce qu'on pourrait appeler un régime permanent. Ce régime est déterminé par l'amplitude correspondante; car, celle-ci étant connue, toutes les autres quantités variables que l'on peut avoir besoin de connaître encore s'en déduisent.

Nous avons effectué la détermination de l'amplitude du régime permanent, et nous avons reconnu qu'elle est sensiblement indépendante du degré d'élasticité des organes qui subissent l'action du choc. Cette amplitude dépend particulièrement des données géométriques relatives à l'échappement, et elle est d'ailleurs proportionnelle aux racines carrées du moment d'inertie du balancier et du moment de la force qui sollicite la roue d'échappement, et en raison inverse de la racine carrée du moment d'inertie de cette même roue et du moment de la force que le ressort spiral exerce sur le balancier à la distance 1 de sa position d'équilibre.

Si, toutes choses restant égales d'ailleurs, on modifie le moment d'inertie du balancier, l'amplitude du régime permanent variera sensiblement comme la racine carrée de ce moment d'inertie.

En outre, nous avons montré que, malgré les variations de la force motrice ou des résistances qui les produisent et celles des amplitudes qui en résultent, l'angle compris entre la position du balancier à l'instant du choc et sa position d'équilibre reste sensiblement constant.

8° Nous avons reconnu que, parmi les diverses altérations qui affectent l'intervalle des battements, une seule peut s'élever au premier ordre de petitesse. Son effet est proportionnel aux résistances des pivots du balancier, à l'angle compris entre les positions du balancier correspondantes au choc et à l'équilibre, et en raison

inverse du carré de l'amplitude. Eu égard à ce que les artistes disposent l'échappement de manière à produire le choc avant le passage du balancier par sa position d'équilibre, l'altération dont il s'agit s'accorde avec le fait généralement observé que la marche des chronomètres va en croissant avec l'épaississement des huiles : nous avons indiqué une expérience qui permettrait de vérifier si ce fait doit être effectivement attribué à la cause que la théorie tendrait à lui assigner.

9° Nous faisons connaître les règles relatives à l'échappement et, en particulier, celles qu'il faudrait appliquer pour éviter les effets de l'épaississement des huiles qui viennent d'être indiqués.

De l'ensemble des propositions précédentes, et sous la seule restriction que le balancier reçoive son impulsion dans une position très-voisine de sa position d'équilibre, on peut conclure que la résistance des pivots, celle de l'air supposée proportionnelle au carré de la vitesse, et les chocs de la roue d'échappement, sont sans influence sensible sur l'intervalle des battements d'un chronomètre soumis à une température constante, intervalle égal au double de la durée des oscillations isochrones qu'il accomplirait en l'absence de toute résistance.

Ces propriétés réunies font déjà du chronomètre un appareil des plus précieux : pour le porter au degré de perfection qu'il paraît susceptible d'atteindre, il reste à rendre la durée de ses oscillations indépendantes des variations de la température. Tel est le problème de la compensation, problème que nous allons actuellement aborder.

A l'exemple des auteurs qui ont traité de la compensation des pendules d'horloges, sans avoir égard aux diverses résistances ni à l'action de l'échappement, nous aurions pu regarder comme admissible que la durée des oscillations des chronomètres n'est point altérée par ces mêmes causes. Toutefois, la grandeur des amplitudes dans ces appareils s'opposait à ce qu'on leur étendît, par voie d'analogie, les propriétés admises ou reconnues dans les horloges. Il était donc nécessaire de les démontrer, avant d'exposer la théorie de la compensation.

2. La conclusion relative à l'intervalle des battements d'un chronomètre, que nous avons rappelée dans le numéro précédent, est, avons-nous dit, soumise à une restriction : le balancier doit recevoir son impulsion dans une position très-voisine de celle d'équilibre. Nous supposerons que cette condition ait été remplie par l'artiste, ou, pour mieux dire, qu'il l'ait réalisée à une certaine température; mais examinons d'abord si cette disposition se maintiendra à toute autre température. Il est évident que si le système formé par le balancier, le spiral et la plaque qui le fixe à son extrémité opposée au balancier, comprend plusieurs métaux différents, la figure du spiral ne restera pas semblable à sa figure primitive, et que la position d'é-

quilibre du balancier variera dès lors avec la température. Si l'angle dont nous nous occupons est nul ou très-petit à l'origine, les variations de température auront pour effet de lui faire atteindre une grandeur qui cesse d'être petite. Alors il s'ensuivra, dans l'intervalle des battements, des variations proportionnelles à ce même angle. et qui, étant du premier ordre de petitesse, ne pourront pas être négligées. Pour obvier à cet inconvénient, il faudrait fixer l'extrémité du ressort spiral à une plaque d'acier pourvue d'une douille cylindrique creuse dont l'axe coïnciderait avec celui du balancier. De cette manière, le ressort spiral conserverait une figure semblable à sa figure primitive, et la position d'équilibre du balancier ne serait pas changée.

Nous admettrons que des dispositions analogues aient été prises : dès lors nous pourrons considérer l'intervalle des battements du chronomètre comme étant identiquement le même qu'en l'absence de toute espèce de résistance.

Dans ce qui va suivre, nous n'aurons à emprunter à la première Partie de ce Mémoire que la seule formule exprimant la durée des oscillations du balancier; aussi devons-nous avertir que les notations dont nous aurons à faire usage serviront généralement à désigner des quantités toutes différentes de celles qu'elles ont représentées jusqu'ici.

Soient, à une température θ,

A le moment d'inertie du balancier autour de son axe de figure;

$\varkappa$ le moment de la force que le ressort spiral exerce sur le balancier à la distance angulaire de sa position d'équilibre égale à l'unité abstraite;

y l'intervalle des battements consécutifs égal au double de la durée de l'oscillation.

On aura, suivant la proposition rappelée dans le numéro précédent,

$$y = 2\pi\sqrt{\frac{A}{\varkappa}}. \tag{1}$$

A une autre température θ', et y' désignant l'intervalle des battements à cette température, on aura, suivant le théorème de Taylor,

$$y' = 2\pi\sqrt{\frac{A + \frac{dA}{d\theta}(\theta'-\theta) + \frac{1}{2}\frac{d^2A}{d\theta^2}(\theta'-\theta)^2 + \ldots}{\varkappa + \frac{d\varkappa}{d\theta}(\theta'-\theta) + \frac{1}{2}\frac{d^2\varkappa}{d\theta^2}(\theta'-\theta)^2 + \ldots}}.$$

Pour que le chronomètre soit compensé, il est nécessaire que cette valeur soit indépendante de $\theta' - \theta$. Or on peut mettre l'expression de y' sous la forme

$$y' = 2\pi\sqrt{\frac{A}{\varkappa}}\sqrt{\frac{1 + \frac{1}{A}\frac{dA}{d\theta}(\theta'-\theta) + \frac{1}{2}\frac{1}{A}\frac{d^2A}{d\theta^2}(\theta'-\theta)^2 + \ldots}{1 + \frac{1}{\varkappa}\frac{d\varkappa}{d\theta}(\theta'-\theta) + \frac{1}{2}\frac{1}{\varkappa}\frac{d^2\varkappa}{d\theta^2}(\theta'-\theta)^2 + \ldots}}: \tag{2}$$

sous cette forme, il est visible que les conditions relatives à la compensation s'obtiendront en égalant les coefficients des mêmes puissances de $(\theta'-\theta)$ dans le numérateur et le dénominateur de la quantité sous le second radical; ce qui fournit la suite d'équations

$$(3)\qquad \frac{A}{x}=\frac{\frac{dA}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{\frac{d^2A}{d\theta^2}}{\frac{d^2x}{d\theta^2}}=\ldots,$$

et entraîne pour conséquence $y'=y$, quel que soit effectivement θ'.

Dans les recherches suivantes, nous considérerons les dilatations linéaires produites par les changements de température, comme des quantités du premier ordre de petitesse, et nous négligerons dans les développements analytiques les puissances et produits de ces quantités. Nous nous réservons de revenir ultérieurement sur les termes du second ordre.

En conséquence, l'équation (2) se réduira à

$$(4)\qquad y'=2\pi\sqrt{\frac{A}{x}}\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{A}\frac{dA}{d\theta}-\frac{1}{x}\frac{dx}{d\theta}\right)(\theta'-\theta)\right].$$

Cette équation fournira immédiatement l'unique condition relative à la compensation des termes du premier ordre

$$(5)\qquad \frac{1}{A}\frac{dA}{d\theta}-\frac{1}{x}\frac{dx}{d\theta}=0,$$

laquelle coïncide avec la première des équations (3).

Si donc les quantités x et $\frac{dx}{d\theta}$ étaient données, et qu'il fût proposé de construire un chronomètre compensé et battant l'intervalle y, les équations (1) et (5) réunies feraient connaître les valeurs des quantités A et $\frac{dA}{d\theta}$ qui pourraient remplir ce double but : or on n'aperçoit pas à priori l'impossibilité de construire un balancier ayant à une température θ un moment d'inertie donné, et disposé de manière à varier d'une quantité donnée par degré de température. On peut remarquer déjà que la question du réglage et celle de la compensation sont intimement liées, la solution de la première se rattachant à l'équation (1), tandis que celle de la seconde dépend de l'équation (5). Mais il est clair que les procédés dont on peut aujourd'hui disposer pour la mesure directe des longueurs et des forces ne permettraient pas d'atteindre dans la composition d'un balancier l'exactitude requise : on ne pourrait donc obtenir qu'une première approximation, qu'il faudrait corriger après en avoir constaté l'insuffisance par l'observation de la marche du chro-

nomètre. La complication de la figure des pièces dont se compose un balancier rendrait sans doute très-pénible d'ailleurs le calcul direct des moments d'inertie. Pour ces motifs, il nous a semblé préférable de profiter de l'expérience acquise, en utilisant les modèles qui ont le mieux réussi, et de les modifier seulement dans leurs éléments les plus simples, de manière à satisfaire aux équations (1) et (5).

3. Soit donc un système donné et déterminé par les quantités A, $\frac{dA}{d\theta}$, $\varkappa$, $\frac{d\varkappa}{d\theta}$, et battant l'intervalle y à la température θ; nous commencerons par demander à l'expérience l'évaluation de certaine fonction de ces quantités. Posons

(6) $$z = \frac{1}{2} y \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{d\theta} - \frac{1}{\varkappa} \frac{d\varkappa}{d\theta} \right):$$

l'équation (4) deviendra, en vertu de la valeur (1) de y,

(7) $$y' = y + (\theta' - \theta) z.$$

θ étant une température arbitraire et donnée, suivons la marche du chronomètre soumis successivement à des températures variables θ' pendant des temps suffisamment prolongés, et constatons les durées correspondantes y' des intervalles des battements. Chaque observation fournira une équation de la forme (7) que l'on complétera au besoin par un terme en $(\theta' - \theta)^2$: de l'ensemble des équations ainsi obtenues et convenablement combinées, on déduira les valeurs de y et de z, et, s'il y a lieu, celle du coefficient du terme en $(\theta' - \theta)^2$.

Les différences entre les valeurs observées de y' et celles de la somme $y + (\theta' - \theta) z$ calculée au moyen des valeurs obtenues de y et z, montreront si le terme du second ordre est ou non négligeable. Nous ferons voir plus loin que le coefficient de ce terme dépend de z, de telle sorte que la compensation des termes du premier ordre *pourra* entraîner celle des termes du second (*).

En nous bornant, pour l'instant, à la compensation des termes du premier ordre, nous supposerons que l'on n'ait point trouvé z nul, ni y égal à un intervalle donné à l'avance; car autrement le chronomètre se trouverait à la fois compensé et réglé. Soient donc

(8) $$Y = y + \partial y$$

(*) L'une des causes qui pourraient s'opposer à ce qu'il en fût effectivement ainsi, serait dans les défauts des lames compensatrices du balancier : or nous indiquerons plus loin un moyen de s'assurer, par une expérience directe, si ces lames jouissent des qualités requises. De cette manière, nous éviterons la chance d'une étude du mouvement du chronomètre, que la cause dont il s'agit pourrait rendre illusoire.

l'intervalle des battements que l'on veut réaliser ; δA et $\delta \frac{dA}{d\theta}$ les corrections que A et $\frac{dA}{d\theta}$ doivent recevoir pour y parvenir et pour obtenir en même temps la compensation : on aura, suivant la formule (1),

$$\frac{A+\delta A}{\varkappa} = \frac{y^2 + 2y\,\delta y + \delta y^2}{4\pi^2}.$$

La même équation (1) donne

$$\frac{A}{\varkappa} = \frac{y^2}{4\pi^2}:$$

on en déduit

$$(9)\qquad \frac{\delta A}{A} = 2\frac{\delta y}{y} + \left(\frac{\delta y}{y}\right)^2.$$

D'un autre côté, si nous posons, pour simplifier,

$$(10)\qquad a = \frac{dA}{d\theta},$$

l'équation (5), relative à la compensation, donnera

$$\frac{a+\delta a}{A+\delta A} - \frac{1}{\varkappa}\frac{d\varkappa}{d\theta} = 0,$$

et l'on aura, d'après la valeur de z,

$$(11)\qquad \frac{a}{A} - \frac{1}{\varkappa}\frac{d\varkappa}{d\theta} = 2\frac{z}{y}.$$

Éliminant $\frac{1}{\varkappa}\frac{d\varkappa}{d\theta}$ entre ces deux équations, il vient

$$\frac{a+\delta a}{A+\delta A} - \frac{a}{A} = -2\frac{z}{y}:$$

on en tire

$$(12)\qquad \frac{\delta a}{a} = \left(1 - 2\frac{A}{a}\frac{z}{y}\right)\frac{\delta A}{A} - 2\frac{A}{a}\frac{z}{y}.$$

Ainsi donc les équations (9) et (12) feront connaître les corrections δA et δa, en fonction de z, y, δy, lorsque les quantités A et a seront connues.

4. S'il est difficile d'obtenir au moyen de mesures directes les valeurs de A, $\varkappa$ et de leurs dérivées par rapport à la température, il l'est beaucoup moins de mesurer directement les accroissements que les quantités A et a peuvent subir par suite de modifications déterminées dans les éléments constitutifs du balancier.

Au reste, c'est ce qui sera mis en évidence, quand nous aurons présenté l'expression analytique de ces mêmes quantités.

Ceci étant admis, nous allons faire voir comment, en faisant varier A et a de quantités connues ΔA et Δa, on pourra déterminer les valeurs primitives de A, a, et en outre celles de $\varkappa$ et $\frac{d\varkappa}{d\theta}$.

Reprenons les équations (1) et (11) en les écrivant comme il suit :

$$4\pi^2 \frac{A}{\varkappa} = y^2, \qquad 4\pi^2 \frac{a}{\varkappa} = \frac{1}{\varkappa}\frac{d\varkappa}{d\theta} y^2 + 2yz.$$

Supposons maintenant qu'après avoir fait varier A et a respectivement de ΔA et Δa, et avoir de nouveau soumis le chronomètre à diverses températures θ', on ait obtenu de nouvelles valeurs de y et de z : soient

(13) $$y_1 = y + \Delta y, \qquad z_1 = z + \Delta z,$$

ces nouvelles valeurs; nous aurons, en vertu des formules précédentes,

$$4\pi^2 \frac{A + \Delta A}{\varkappa} = y^2 + 2y\,\Delta y + \Delta y^2,$$

$$4\pi^2 \frac{a + \Delta a}{\varkappa} = \frac{1}{\varkappa}\frac{d\varkappa}{d\theta}(y^2 + 2y\,\Delta y + \Delta y^2) + 2(y + \Delta y)(z + \Delta z).$$

On tire aisément des équations en A et ΔA

(14) $$A = \frac{\Delta A}{2\frac{\Delta y}{y} + \left(\frac{\Delta y}{y}\right)^2}, \qquad \varkappa = 4\pi^2 \frac{A}{y^2} = 4\pi^2 \frac{\Delta A}{2y\,\Delta y + \Delta y^2};$$

les deux autres donneront par soustraction

$$4\pi^2 \frac{\Delta a}{\varkappa} = \frac{1}{\varkappa}\frac{d\varkappa}{d\theta}(2y\,\Delta y + \Delta y^2) + 2(y\,\Delta z + z\,\Delta y + \Delta y\,\Delta z);$$

d'où, en substituant la valeur de $\varkappa$, et au moyen d'une simple transformation,

(15) $$\frac{1}{\varkappa}\frac{d\varkappa}{d\theta} = \frac{\Delta a}{\Delta A} - \frac{1}{1 + \frac{1}{2}\frac{\Delta y}{y}}\left[\frac{z}{y} + \left(1 + \frac{\Delta y}{y}\right)\frac{\Delta z}{\Delta y}\right],$$

et, en vertu de la première équation (14),

(15 *bis*) $$\frac{1}{\varkappa}\frac{d\varkappa}{d\theta} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}\frac{\Delta y}{y}}\left[\frac{1}{2}\frac{y}{A}\frac{\Delta a}{\Delta y} - \frac{z}{y} - \left(1 + \frac{\Delta y}{y}\right)\frac{\Delta z}{\Delta y}\right];$$

Mettant la valeur (15) dans l'expression de $4\pi^2 \frac{a}{x}$, et tirant la valeur de a au moyen de celle de x, il vient

$$(16) \qquad a = \mathrm{A}\left[\frac{\Delta a}{\Delta \mathrm{A}} + \left(1 + \frac{\frac{1}{2}\frac{\Delta y}{y}}{1 + \frac{1}{2}\frac{\Delta y}{y}}\right)\frac{z\Delta y - y\Delta z}{y\Delta y}\right]:$$

on peut encore donner à cette valeur la forme suivante, qu'on obtient en substituant pour $\frac{\mathrm{A}}{\Delta \mathrm{A}}$ et $\frac{\mathrm{A}}{y}$ leurs valeurs tirées de la première équation (14),

$$(17) \qquad a = \frac{\frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}\frac{\Delta y}{y}}\left[y\frac{\Delta a}{\Delta y} + \left(1 + \frac{\frac{1}{2}\frac{\Delta y}{y}}{1 + \frac{1}{2}\frac{\Delta y}{y}}\right)\frac{z\Delta y - y\Delta z}{\Delta y}\frac{\Delta \mathrm{A}}{\Delta y}\right].$$

Les équations (14), (15) ou (15 *bis*) et (16) ou (17) résolvent la question proposée (*).

On remarquera que les quantités A et x sont déterminées au moyen des seules variations de A et de y; en sorte que, pour les obtenir, il suffirait d'observer les oscillations du chronomètre à une température constante, et le balancier ayant successivement les moments d'inertie A et $\mathrm{A} + \Delta\mathrm{A}$, tandis que a ne varierait pas. On verra plus loin que, dans la pratique, les variations de A entraîneront généralement celles de a. Mais on pourrait faire varier a sans produire de changement dans A. En opérant à température constante, on obtiendrait alors la valeur de a au moyen de l'équation (17), dont la parenthèse se réduirait à son premier terme.

On n'aurait pas ainsi la valeur de $\frac{1}{x}\frac{dx}{d\theta}$; mais ce serait indifférent, puisque l'emploi des formules (9) et (12) n'exige pas que l'on connaisse x et $\frac{1}{x}\frac{dx}{d\theta}$. Les variations isolées de A fussent-elles praticables, il y aurait dans cette manière de procéder, l'inconvénient de démonter deux fois le chronomètre pour opérer successivement les variations de A et a, tandis que leur variation simultanée n'exige

(*) Nous avions obtenu des formules plus simples que les précédentes, en représentant par $y + (\theta' - \theta)z$ le carré de la durée y', au lieu de cette même quantité; mais il nous a paru que les observations seront bien plus faciles à discuter, quand les équations à résoudre contiendront les durées des oscillations et non pas leurs carrés.

qu'un démontage. En outre, la multiplicité des observations à des températures variées, et dans des conditions différentes relativement aux moments d'inertie, aura toujours l'avantage de mettre plus en évidence les défauts que pourrait présenter l'instrument. Enfin, nous devons faire remarquer que A et a ne suffisent pas pour déterminer les corrections δa et δA, équations (9) et (12); il faut encore connaître z: en sorte qu'on sera toujours obligé de faire une série d'observations par des températures variées; ce qui est d'ailleurs évident.

L'expérience indiquera jusqu'à quel point on pourra utiliser les remarques précédentes.

Dans une étude préliminaire du balancier, il ne sera pas nécessaire de faire subir à A et a de fortes variations, pour obtenir un résultat approximatif, le seul auquel on puisse d'abord prétendre. Quand ce résultat sera obtenu, et qu'il ne restera plus que de faibles corrections à effectuer, les valeurs A et a qu'on aura déduites de ΔA et Δa auront sans doute une exactitude suffisante, et permettront de calculer les dernières corrections avec la précision nécessaire.

Pour appliquer les règles qui viennent d'être exposées, il convient d'avoir égard à la composition spéciale des balanciers de chronomètres.

5. *Description du balancier.* — Cet appareil comprend :

1° Un axe en acier terminé par des pivots et muni latéralement de deux appendices ordinairement en rubis, et destinés, l'un à recevoir l'action de la roue d'échappement, l'autre à dégager la dent de cette roue qui s'appuie sur le repos; un troisième appendice sert à fixer l'extrémité supérieure du spiral : nous n'entrerons pas dans de plus longs détails sur cette partie du balancier;

2° Une pièce transversale en acier BB (*fig.* 4), dite *barrette*, percée en son milieu d'un trou C par lequel elle s'ajuste sur l'axe; elle est terminée à ses extrémités par deux lames LL, LL courbées circulairement, et formées de deux métaux soudés : ces lames, dites lames *bimétalliques*, embrassent chacune une étendue un peu moindre qu'une demi-circonférence; la lame intérieure est en acier, l'autre est en laiton;

3° Deux masses en laiton M, M, dites *compensatrices :* elles sont fixées à l'aide d'une vis sur le contour des lames bimétalliques, en des points diamétralement opposés;

4° Deux écrous V, V insérés aux extrémités de la barrette et destinés à faire varier légèrement le moment d'inertie du balancier : en les tournant dans un sens ou dans l'autre, leurs masses se rapprochent ou s'éloignent de l'axe; pour ce motif on les nomme *masses régulatrices*.

Aux pièces précédentes peuvent s'ajouter, suivant le besoin, deux ou quatre autres masses complémentaires; ce sont des vis en acier v, v, v', v' qui s'adaptent près des extrémités de la barrette, sur le prolongement des lames bimétalliques : par leur adjonction ou leur suppression, on fait varier le moment d'inertie de quantités supérieures à celles que l'on obtiendrait par le simple déplacement des masses régulatrices.

Il va sans dire que tout est disposé de manière que le centre de gravité du système passe constamment par l'axe de rotation du balancier.

Un mot d'explication fera comprendre aisément le rôle que jouent les lames bimétalliques pour produire la compensation. Par suite d'un accroissement de température, les moments d'inertie de l'axe, de la barrette et des masses régulatrices augmentent, le moment de la force du spiral diminue très-probablement; il faut donc que les moments d'inertie des masses compensatrices puissent diminuer de manière à contre-balancer l'effet des autres changements : c'est pour cela que les masses compensatrices ont été placées sur les lames bimétalliques. Le métal extérieur étant plus dilatable que le métal intérieur, les lames se courbent davantage et les masses se rapprochent du centre. Ce degré de rapprochement varie avec la position des masses : au moyen des vis qui y sont adaptées, on les fixe dans la position jugée la plus favorable. On doit comprendre que le problème de la compensation ne consiste pas seulement à déterminer la place qu'il convient d'assigner aux masses compensatrices, mais qu'il s'agit aussi de déterminer la grandeur et le moment d'inertie de ces masses elles-mêmes, eu égard à la distribution de la matière dans les autres masses dont se compose le balancier, et à la constitution des lames bimétalliques.

Les difficultés que l'on pourra rencontrer dans les tentatives de compensation ne proviendront guère que de l'imperfection des lames bimétalliques : il convient donc de fixer les idées sur la manière de préparer ces organes. Voici quelle est la pratique généralement suivie :

On façonne, au moyen du tour, un disque cylindrique d'acier fondu dont l'épaisseur est égale à la largeur que doivent avoir les lames : son rayon est égal à la distance qui doit exister entre la surface de séparation des deux métaux des lames bimétalliques et l'axe du balancier. Un trou circulaire est pratiqué au centre pour recevoir l'axe. Le disque est alors placé concentriquement dans un moule dont les bords laissent entre eux et le pourtour du disque un certain espace vide. L'appareil étant recouvert de borax, le moule est chauffé à la température convenable pour qu'en remplissant de laiton en fusion l'espace laissé vide, la soudure des deux métaux s'effectue complétement. Après le refroidissement, le disque d'acier recouvert de laiton est mis sur le tour et évidé intérieurement, de manière à prendre la forme d'une capsule dont le fond a pour épaisseur celle que l'on veut donner

à la barrette. Le contour extérieur est tourné et l'épaisseur du laiton réduite dans une proportion qui varie suivant les idées de l'artiste, mais que la théorie permet de déterminer, ainsi qu'on le verra bientôt. Le fond de la capsule est ensuite découpé de manière à former la barrette et à laisser entre celle-ci et les bords de la capsule deux espaces vides et à peu près hémi-circulaires. Enfin, au moyen de deux traits de scie, on coupe le rebord de la capsule en deux régions diamétralement opposées et voisines des extrémités de la barrette. On obtient ainsi deux lames bimétalliques ayant chacune une extrémité libre, et dont les extrémités fixes font corps avec la barrette. Nous passons sous silence les opérations de trempe, de recuit et d'écrouissage, laissant à l'expérience à prononcer sur la bonne exécution de cette partie du travail qui peut seule présenter quelque difficulté. Le centrage ayant été conservé durant le travail du balancier, les défauts des lames ne pourront provenir que des variations que l'élasticité des deux métaux et la figure du contour du disque d'acier pourront présenter dans leur étendue, à la suite des inégalités de trempe, de recuit et d'écrouissage.

6. *Théorie des lames bimétalliques.* — Soient (*fig.* 5) $DAGA_1$ une lame bimétallique courbe; AA_1 la surface de contact des deux lames partielles; e' l'épaisseur de la lame intérieure en acier; e'' l'épaisseur de la lame extérieure en laiton; l la largeur commune des deux lames.

Dans un plan perpendiculaire aux génératrices rectilignes des lames, menons deux axes rectangulaires OX et OY.

Soient : α l'angle d'une normale à la courbe AA_1 menée par le point A, avec le prolongement de l'axe des y; $\alpha + d\alpha$ l'angle que fait une autre normale menée par le point A' infiniment voisin de A, avec le même prolongement. Le point C, déterminé par l'intersection de ces normales, sera le centre de courbure de la courbe AA_1 au point A.

Considérons un filet MM' compris entre les plans représentés par les normales précédentes, à la distance u de AA' comptée dans le sens opposé au centre de courbure, et dont l'épaisseur soit du.

Désignant par σ' la longueur du filet MM', σ celle du filet AA', et ρ le rayon de courbure de ce dernier filet à une température θ, on aura

$$\frac{\sigma'}{\sigma} = 1 + \frac{u}{\rho}.$$

Pareillement, à une autre température θ_0, on aurait

$$\frac{\sigma'_0}{\sigma_0} = 1 + \frac{u_0}{\rho_0},$$

en distinguant par l'indice zéro les valeurs que prennent les variables à cette température.

Enfin désignons par ε' l'allongement proportionnel subi par le filet MM′ dans son passage de la température θ_0 à la température θ, et par ε l'allongement correspondant du filet AA′; nous aurons

$$\frac{\sigma'}{\sigma'_0} = 1 + \varepsilon', \qquad \frac{\sigma}{\sigma_0} = 1 + \varepsilon.$$

On tire aisément de ces équations

$$\frac{1 + \frac{u}{\rho}}{1 + \varepsilon'} = \frac{1 + \frac{u_0}{\rho_0}}{1 + \varepsilon}.$$

Or, si l'on considère les rapports $\frac{u}{\rho}$, $\frac{u_0}{\rho_0}$ et les allongements ε, ε' comme étant du premier ordre de petitesse, on devra regarder la dilatation proportionnelle $\frac{u - u_0}{u_0}$ comme étant du même ordre, et la différence $u - u_0$ comme du second ordre: négligeant les quantités de cet ordre, on tire de l'équation précédente

$$\varepsilon' = \varepsilon + u\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0}\right). \tag{18}$$

Soient, relativement au filet défini par la distance u: T la tension longitudinale par unité de surface de la section transversale; E le coefficient d'élasticité; γ le coefficient de dilatation; la tension à laquelle est soumis le filet MM′ aura pour expression $T\,l\,du$ (*).

Cette tension a pour effet de produire un allongement égal à l'excès de l'allon-

---

(*) f désignant la force que les filets voisins situés du côté du centre de courbure exercent sur MM′ par unité de surface, $f + \frac{df}{du}du$ sera celle que subissent les filets extérieurs à MM′ et l'on a, en conséquence, $-l(\rho + u)\,d\alpha\,\frac{df}{du}du$ pour la somme des composantes suivant l'axe de MM′, des actions que ce filet subit de la part des filets situés entre les plans normaux qui comprennent MM′ : cette somme étant un infiniment petit du second ordre, est négligeable par rapport à la tension du filet, qui est du premier ordre. Nous ne présentons cette considération que pour rassurer certaines personnes qui ont pu croire nécessaire de tenir compte d'un genre d'actions dont il ne doit pas être question, dès que l'on a admis l'idée sur laquelle repose la notion des tensions.

gement ε' sur celui $\gamma(\theta-\theta_0)$ qui est dû à la simple dilatation; on a donc

$$\mathrm{T}\,l\,du = \mathrm{E}[\varepsilon' - \gamma(\theta-\theta_0)]\,l\,du,$$

ou, en vertu de la relation (18),

$$(19)\qquad \mathrm{T}\,l\,du = \mathrm{E}[\varepsilon - \gamma(\theta-\theta_0)]\,l\,du + \mathrm{E}\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0}\right) l\,u\,du.$$

En intégrant cette expression de $u = -e'$ à $u = +e''$, on aura la somme des tensions suivant la direction commune des filets; et, si l'on suppose que la partie de la lame bimétallique comprise entre le plan normal AC et son extrémité libre A, ne soit soumise à l'action d'aucune autre force extérieure que les tensions précédentes, il faudra, suivant l'une des conditions de l'équilibre, que l'intégrale soit nulle. Dans l'état ordinaire du chronomètre, l'axe est vertical et la pesanteur donne une composante nulle suivant la direction des filets.

Pour effectuer l'intégration, il est nécessaire de distinguer les coefficients d'élasticité et de dilatation propres à chacune des lames composantes. Nous désignerons par E' et γ' les coefficients relatifs à la lame intérieure (acier), et par E'' et γ'' ceux du métal qui forme la lame extérieure (laiton). L'intégration comprendra ainsi deux parties : la première effectuée entre les limites $-e'$ et zéro, l'autre entre les limites zéro et $+e''$. Égalant le résultat de l'intégration à zéro, ainsi qu'il vient d'être dit, et supprimant le facteur commun l, on aura

$$(20)\quad \varepsilon(\mathrm{E}''e'' + \mathrm{E}'e') - (\theta-\theta_0)(\mathrm{E}''e''\gamma'' + \mathrm{E}'e'\gamma') + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0}\right)(\mathrm{E}''e''^2 - \mathrm{E}'e'^2) = 0.$$

Multiplions l'équation (19) par u, nous aurons le moment de la tension $\mathrm{T}\,l\,du$ par rapport à un axe perpendiculaire au plan des xy et passant par le point A. Or la partie que nous considérons n'étant d'ailleurs sollicitée par d'autres forces extérieures que les tensions précédentes, il faut encore, pour l'équilibre, que la somme des moments de ces tensions soit nulle. On a donc, en vertu des limites ci-dessus indiquées pour les intégrations,

$$(21)\quad \frac{1}{2}\varepsilon(\mathrm{E}''e''^2 - \mathrm{E}'e'^2) - \frac{1}{2}(\theta-\theta_0)(\mathrm{E}''e''^2\gamma'' - \mathrm{E}'e'^2\gamma') + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0}\right)(\mathrm{E}''e''^3 + \mathrm{E}'e'^3) = 0.$$

En éliminant ε entre cette équation et la précédente, on trouve d'abord

$$0 = \frac{1}{2}(\theta-\theta_0)[(\mathrm{E}''e''^2 - \mathrm{E}'e'^2)(\mathrm{E}''e''\gamma'' + \mathrm{E}'e'\gamma') - (\mathrm{E}''e'' + \mathrm{E}'e')(\mathrm{E}''e''^2\gamma'' - \mathrm{E}'e'^2\gamma')]$$
$$+ \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0}\right)\left[\frac{1}{3}(\mathrm{E}''e'' + \mathrm{E}'e')(\mathrm{E}''e''^3 + \mathrm{E}'e'^3) - \frac{1}{4}(\mathrm{E}''e''^2 - \mathrm{E}'e'^2)^2\right];$$

puis, en réduisant,

$$\frac{1}{2}(\theta-\theta_0)(e'+e'')E'e'E''e''(\gamma'-\gamma'') + \frac{1}{12}\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho_0}\right)\left[4(e'+e'')^2E'e'E''e'' + (E''e''^2-E'e'^2)^2\right] = 0.$$

Posons, pour simplifier,

$$e = e'+e'', \tag{22}$$

$$h = \frac{2}{3}\frac{e}{\gamma''-\gamma'}\left[1+\frac{(E''e''^2-E'e'^2)^2}{4e^2E''e''E'e'}\right], \tag{23}$$

l'équation précédente donnera

$$\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho_0} = \frac{\theta-\theta_0}{h}. \tag{24}$$

En éliminant $\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho_0}\right)$ entre les équations (20) et (21), on aura d'abord

$$0 = \varepsilon\left[\frac{1}{3}(E''e''+E'e')(E''e''^3+E'e'^3) - \frac{1}{4}(E''e''^2-E'e'^2)^2\right]$$
$$-(\theta-\theta_0)\left[\frac{1}{3}(E''e''\gamma''+E'e'\gamma')(E''e''^3+E'e'^3) - \frac{1}{4}(E''e''^2-E'e'^2)(E''e''^2\gamma''-E'e'^2\gamma')\right],$$

équation où le coefficient de ε est positif, ainsi qu'il résulte d'une transformation effectuée; celui de $-(\theta-\theta_0)$ peut être mis sous les deux formes suivantes :

$$\frac{1}{12}\left\{E''^2e''^4\gamma''+E'^2e'^4\gamma'+E''e''E'e'\left[3e''e'(\gamma''+\gamma')+4(e'^2\gamma''+e''^2\gamma')\right]\right\}$$

et

$$\frac{1}{12}\left[4(e'+e'')E''e''E'e'(e''\gamma'+e'\gamma'')+(E''e''^2-E'e'^2)(E''e''^2\gamma''-E'e'^2\gamma')\right],$$

dont la première montre que ce facteur est essentiellement positif.

On en tire, au moyen des éléments de réduction qui viennent d'être employés,

$$\varepsilon = (\theta-\theta_0)\frac{\dfrac{e''\gamma'+e'\gamma''}{e}+\dfrac{(E''e''^2-E'e'^2)(E''e''^2\gamma''-E'e'^2\gamma')}{4e^2E''e''E'e'}}{1+\dfrac{(E''e''^2-E'e'^2)^2}{4e^2E''e''E'e'}}. \tag{25}$$

Cette équation servira au calcul de l'allongement proportionnel : d'après ce qui vient d'être dit, cet allongement sera toujours de même signe que la variation de température $\theta - \theta_0$; il est d'ailleurs uniforme dans toute l'étendue de la lame bimétallique et indépendant de sa courbure. On peut donc considérer le coefficient de $(\theta - \theta_0)$ dans la valeur de ε, comme étant le coefficient de dilatation longitudinale de la lame composée.

L'équation (24) nous servira à calculer la déformation de la lame. Le paramètre h qu'elle renferme est une ligne dont la grandeur ne dépend, suivant l'expression (23), que de la différence des coefficients de dilatation des lames partielles, de leurs épaisseurs et du rapport de leurs coefficients d'élasticité. L'équation (24) montre que, pour une variation donnée de température, la déformation sera d'autant plus grande que la quantité h sera plus petite.

On aura évidemment le rapport des épaisseurs, qui répond au minimum de h ou à la plus grande déformation, en égalant à zéro le second terme de la parenthèse de la valeur de h; ce qui fournit la condition

$$(26) \qquad \frac{e'}{e''} = \sqrt{\frac{E''}{E'}} \; (^*),$$

et réduit les valeurs de h et de ε à

$$(27) \qquad \begin{aligned} h &= \frac{2}{3}\frac{e}{\gamma'' - \gamma'}, \\ \varepsilon &= (\theta - \theta_0)\frac{e''\gamma' + e'\gamma''}{e}. \end{aligned}$$

La règle fournie par la formule (26) diffère de celle indiquée par un auteur célèbre, suivant laquelle le rapport des épaisseurs doit être égal au rapport inverse des coefficients d'élasticité.

Avant de passer aux applications des formules que nous venons d'établir, il convient de simplifier le calcul des valeurs de h et de ε.

(*) En faisant usage des déterminations obtenues par G. Wertheim, on trouve que $\frac{E''}{E'}$ est sensiblement égal à $\frac{1}{2}$; d'où $\frac{e'}{e''} = 0,707 = \frac{5}{7}$, $\frac{e'}{e} = 0,414 = \frac{5}{12}$, $\frac{e''}{e} = 0,586 = \frac{7}{12}$. On aurait, avec toute l'exactitude que comportent les nombres fournis par l'expérience, $\frac{e'}{e''} = \frac{12}{17}$, $\frac{e'}{e} = \frac{12}{29}$, $\frac{e''}{e} = \frac{17}{29}$.

Soient à cet effet

(28)
$$Z \sin\zeta = e' \sqrt{E'},$$
$$Z \cos\zeta = e'' \sqrt{E''},$$

d'où l'on déduira les auxiliaires ζ et Z; la valeur de h, équation (23), deviendra, moyennant l'élimination des quantités E' et E'',

(29)
$$h = \frac{2}{3} \frac{e}{\gamma'' - \gamma'} \left(1 + \frac{e'e''}{e^2} \cot^2 2\zeta\right),$$

et l'on aura, en désignant par γ le coefficient de dilatation longitudinale de la lame bimétallique,

(30)
$$\gamma = \frac{\dfrac{e''\gamma' + e'\gamma''}{e} + \dfrac{e'e''}{2e^2} \dfrac{\cos 2\zeta}{\sin^2 2\zeta} [\gamma'' - \gamma' + (\gamma'' + \gamma') \cos 2\zeta]}{1 + \dfrac{e'e''}{e^2} \cot^2 2\zeta},$$

puis

(31)
$$\varepsilon = \gamma (\theta - \theta_0).$$

Ce coefficient γ est relatif à la ligne de séparation des deux lames; il dépend des coefficients de dilatation des lames partielles, du rapport de leurs épaisseurs à l'épaisseur totale et du rapport de leurs coefficients d'élasticité.

La valeur de ε va nous permettre actuellement de déterminer l'état des tensions des différents filets de la lame bimétallique. Observons que les quantités γ, E, que renferme l'équation (19) représentent γ', E' quand on considère la lame d'acier, et γ'', E'' quand il s'agit de la lame de laiton. Pour plus de clarté, distinguons encore par des accents les quantités T et u; nous aurons, en vertu des relations (19), (31) et (24),

$$T' = E' \left(\gamma - \gamma' + \frac{u'}{h}\right) (\theta - \theta_0),$$
$$T'' = E'' \left(\gamma - \gamma'' + \frac{u''}{h}\right) (\theta - \theta_0).$$

Au moyen des expressions (29) et (30), on trouve d'abord

$$\gamma - \gamma' = + \frac{2}{3} \frac{e'}{h} \left(1 + \frac{e''}{4e} \frac{\cos 2\zeta}{\sin^2 \zeta}\right),$$
$$\gamma - \gamma'' = - \frac{2}{3} \frac{e''}{h} \left(1 - \frac{e'}{4e} \frac{\cos 2\zeta}{\cos^2 \zeta}\right).$$

Or si l'on pose

$$u'_0 = -\frac{2}{3}e'\left(1 + \frac{1}{4}\frac{e''}{e}\frac{\cos 2\zeta}{\sin^2\zeta}\right),$$

$$u''_0 = +\frac{2}{3}e''\left(1 - \frac{1}{4}\frac{e'}{e}\frac{\cos 2\zeta}{\cos^2\zeta}\right),$$

les valeurs de T′ et T″ deviendront

$$T' = E'\frac{u' - u'_0}{h}(\theta - \theta_0),$$

$$T'' = E''\frac{u'' - u''_0}{h}(\theta - \theta_0).$$

On se rappelle que θ_0 est la température à laquelle les tensions étaient supposées nulles dans toute l'étendue des lames, c'est-à-dire la température où les lames étaient dans leur état naturel; on a effectivement ici $T' = 0$, $T'' = 0$ pour $\theta = \theta_0$. Les valeurs de T′ et T″ montrent qu'il existe pour chacune des lames une série de filets qui n'éprouvent aucune tension, quelle que soit la température; les lignes qui les représentent sont définies de position par les valeurs de u' et u'' respectivement égales à u'_0 et u''_0. Il faut seulement s'assurer si ces lignes sont réellement situées à l'intérieur des lames.

Mettons dans les expressions de u'_0 et u''_0 les valeurs de $\cos 2\zeta$, $\sin^2\zeta$ et $\cos^2\zeta$ en fonction des rapports des épaisseurs et des coefficients d'élasticité, nous aurons

$$u'_0 = -\frac{2}{3}e'\left[\frac{e'}{e} + \frac{1}{4}\frac{e''}{e}\left(3 + \frac{E''e''^2}{E'e'^2}\right)\right],$$

$$u''_0 = +\frac{2}{3}e''\left[\frac{e''}{e} + \frac{1}{4}\frac{e'}{e}\left(3 + \frac{E'e'^2}{E''e''^2}\right)\right].$$

Les valeurs de u'_0 et u''_0 sont l'une négative, l'autre positive, comme il convient déjà pour que les filets dont il s'agit appartiennent les uns à la lame d'acier, les autres à la lame de laiton. Les épaisseurs de ces lames étant respectivement e' et e'', les conditions à remplir sont $-u'_0 < e'$ et $+u''_0 < e''$. Ces conditions deviennent, en vertu des valeurs de u'_0 et u''_0,

$$\frac{E''}{E'} < \frac{e'^2}{e''^2}\left(3 + 2\frac{e'}{e''}\right), \quad \frac{E''}{E'} > \frac{e'^2}{e''^2}\frac{1}{3 + 2\frac{e''}{e'}};$$

or si l'on adopte pour le rapport $\frac{E''}{E'}$ le nombre $\frac{1}{2}$, qui se déduit des coefficients

de G. Wertheim, ces inégalités, étant résolues par rapport à $\frac{e'}{e''}$, donnent

$$\frac{e'}{e''} > 0{,}37, \quad \frac{e'}{e''} < 1{,}47.$$

Dans la pratique, le rapport des épaisseurs est renfermé entre ces limites; en sorte que l'existence effective de deux zones où les tensions sont nulles se trouve démontrée.

Les accroissements de T' et T'', relativement à ceux de la température, ayant respectivement les signes de $u' - u'_0$ et $u'' - u''_0$, il s'ensuit que, par l'effet des accroissements de température, les deux lames sont soumises à des tensions dans leurs parties convexes et à des contractions dans leurs parties concaves. A la surface de séparation des lames, pour laquelle on a $u' = 0$ et $u'' = 0$, les tensions sont représentées par $-u'_0$ pour la lame d'acier, et $-u''_0$ pour la lame de laiton ; elles sont donc positives dans la première et négatives dans la seconde, ce qui rentre dans l'énoncé précédent.

Si la lame est construite de manière à satisfaire à la condition (26) du maximum d'efficacité, les valeurs de u'_0 et u''_0 se réduisent à $-\frac{2}{3}e'$ et $+\frac{2}{3}e''$: cela signifie que les zones où les tensions sont nulles sont alors distantes des bords extérieurs des lames partielles, de quantités respectivement égales au tiers de l'épaisseur de ces lames.

7. Déterminons actuellement le changement de figure de la lame bimétallique (*).

α définissant la direction de la normale menée par un point M de la lame à la température θ ; soit α_0 l'angle de direction de la normale menée par le *même* point M à la température θ_0. Soient encore, aux températures θ et θ_0, ds et ds_0 les longueurs d'un des éléments de la courbe de contact des lames comprenant les mêmes points, $d\alpha$ et $d\alpha_0$ les angles sous-tendus des centres de courbure respectifs par ces éléments; on aura

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\alpha}{ds}, \quad \frac{1}{\rho_0} = \frac{d\alpha_0}{ds_0},$$

(*) On trouvera plus loin, n° **9**, une solution simple de ce problème, pour le cas où la figure primitive des lames est circulaire.

d'où en substituant dans l'équation (24),

$$\frac{d\alpha}{ds} - \frac{d\alpha_0}{ds_0} = \frac{\theta - \theta_0}{h}:$$

mais on a par définition

(32) $$\frac{ds}{ds_0} = 1 + \varepsilon;$$

mettant cette valeur dans l'équation précédente multipliée par ds, il vient

$$d\alpha - d\alpha_0 = \varepsilon\, d\alpha_0 + (\theta - \theta_0)\frac{ds}{h}.$$

Or il est clair qu'il est indifférent d'écrire ds_0 à la place de ds dans le dernier terme, puisque $(\theta - \theta_0)s$ est de l'ordre des dilatations que nous regardons comme très-petites : effectuons ce changement et mettons pour ε sa valeur (31), nous aurons

$$d\alpha - d\alpha_0 = (\theta - \theta_0)\left(\gamma\, d\alpha_0 + \frac{ds_0}{h}\right);$$

puis, en intégrant,

$$\alpha - \alpha_0 = (\theta - \theta_0)\left(\gamma\, \alpha_0 + \frac{s_0}{h}\right).$$

Nous n'écrivons pas de constante, ce qui suppose que les angles α, α_0 et les arcs s_0 sont comptés de la même origine, et que cette origine est le point d'encastrement des lames : en effet, au point d'encastrement où α_0 et s_0 sont nuls, on doit avoir $\alpha = 0$, quelle que soit la variation de température $\theta - \theta_0$. D'après le choix que nous avons fixé antérieurement pour l'origine des angles α, nous devons supposer que le point d'encastrement est situé sur le prolongement de l'axe des y.

Soit

(33) $$\omega = \frac{1}{h}\frac{s_0}{\alpha_0} + \gamma;$$

l'équation précédente deviendra

(34) $$\alpha - \alpha_0 = (\theta - \theta_0)\,\omega\alpha_0 \quad (*).$$

(*) On déduit inversement de la formule (34)

$$\theta - \theta_0 = \frac{\alpha - \alpha_0}{\omega\alpha_0},$$

équation qui montre comment les variations de température peuvent être mesurées au moyen de

La quantité ω pourra ainsi être considérée comme étant le coefficient de flexion angulaire ou d'inflexion de la lame.

On a maintenant entre les différentielles des coordonnées rectangulaires, celles de l'élément de longueur et les angles α et α_0, les relations

$$dx = \cos\alpha \; ds, \quad dy = \sin\alpha \; ds,$$
$$dx_0 = \cos\alpha_0 \, ds_0, \quad dy_0 = \sin\alpha_0 \, ds_0;$$

d'où, en vertu des relations (32) et (31),

$$dx - dx_0 = (\cos\alpha - \cos\alpha_0)\, ds_0 + (\theta - \theta_0)\,\gamma\cos\alpha \, ds_0,$$
$$dy - dy_0 = (\sin\alpha - \sin\alpha_0)\, ds_0 + (\theta - \theta_0)\,\gamma\sin\alpha \, ds_0 :$$

mais les déformations étant considérées comme des quantités très-petites du premier ordre, on a

$$\cos\alpha - \cos\alpha_0 = -\sin\alpha_0\,(\alpha - \alpha_0) = -(\theta - \theta_0)\,\omega\alpha_0 \sin\alpha_0,$$
$$\sin\alpha - \sin\alpha_0 = +\cos\alpha_0\,(\alpha - \alpha_0) = +(\theta - \theta_0)\,\omega\alpha_0 \cos\alpha_0,$$

en vertu de la rėlation (34). Substituant ces valeurs dans les équations précédentes, et observant que l'on y peut mettre α_0 à la place de α dans les derniers termes, il vient

$$dx - dx_0 = -(\theta - \theta_0)\,(\omega\alpha_0 \sin\alpha_0 - \gamma\cos\alpha_0)\,\frac{ds_0}{d\alpha_0}\,d\alpha_0,$$

$$dy - dy_0 = +(\theta - \theta_0)\,(\omega\alpha_0 \cos\alpha_0 + \gamma\sin\alpha_0)\,\frac{ds_0}{d\alpha_0}\,d\alpha_0;$$

ce qui donne, pour le cas général où la figure primitive de la lame est quelconque,

$$(35)\qquad \begin{aligned} x - x_0 &= (\theta - \theta_0)\int_0^{\alpha_0} (\gamma\cos\alpha_0 - \omega\alpha_0 \sin\alpha_0)\,\frac{ds_0}{d\alpha_0}\,d\alpha_0,\\ y - y_0 &= (\theta - \theta_0)\int_0^{\alpha_0} (\gamma\sin\alpha_0 + \omega\alpha_0 \cos\alpha_0)\,\frac{ds_0}{d\alpha_0}\,d\alpha_0. \end{aligned}$$

---

l'observation du changement de direction de la normale passant par un point donné d'une lame bimétallique de figure quelconque; deux observations des directions d'une normale et des températures correspondantes, suffisent pour déterminer le coefficient $\omega\alpha_0$ relatif au point considéré. Telle est la théorie de l'appareil connu sous le nom de *Thermomètre-Bréguet*.

Les limites de l'intégration sont telles, que les coordonnées du point d'encastrement ne varient pas avec la température.

8. Les intégrations indiquées ici s'effectueront aisément dans le cas où la figure de la lame peut être considérée comme approximativement circulaire à la température θ_0.

Soit en effet r_0 le rayon du cercle correspondant à la surface de séparation des lames à cette température, on a

$$(36) \qquad s_0 = r_0 \alpha_0, \quad \frac{ds_0}{d\alpha_0} = r_0:$$

si l'on pose alors

$$(37) \qquad \nu = \frac{r_0}{h},$$

la valeur de ω deviendra

$$(38) \qquad \omega = \nu + \gamma,$$

et les coefficients ν et ω seront indépendants de α_0. Mettant dans les équations (35) à la place de γ sa valeur $\omega - \nu$, et ayant égard à la deuxième équation (36), on aura

$$x - x_0 = (\theta - \theta_0) r_0 \int_0^{\alpha_0} [\omega(\cos\alpha_0 - \alpha_0 \sin\alpha_0) - \nu \cos\alpha_0]\, d\alpha_0,$$

$$y - y_0 = (\theta - \theta_0) r_0 \int_0^{\alpha_0} [\omega(\sin\alpha_0 + \alpha_0 \cos\alpha_0) - \nu \sin\alpha_0]\, d\alpha_0:$$

observant que

$$d.\alpha_0 \cos\alpha_0 = (\cos\alpha_0 - \alpha_0 \sin\alpha_0)\, d\alpha_0,$$
$$d.\alpha_0 \sin\alpha_0 = (\sin\alpha_0 + \alpha_0 \cos\alpha_0)\, d\alpha_0,$$

l'intégration va s'effectuer immédiatement, et il viendra

$$(38\ bis) \qquad \begin{aligned} x - x_0 &= (\theta - \theta_0) r_0 (\omega\alpha_0 \cos\alpha_0 - \nu \sin\alpha_0), \\ y - y_0 &= (\theta - \theta_0) r_0 [\omega\alpha_0 \sin\alpha_0 - \nu(1 - \cos\alpha_0)]. \end{aligned}$$

On peut, sans altérer le degré d'approximation, substituer à r_0 et α_0 les valeurs correspondantes à une température quelconque; cela nous permettra de supprimer les indices qui accompagnent r et α dans ces expressions et dans l'équation (37) : d'un autre côté, si l'on désigne par x' et y' les coordonnées correspondantes à une température θ', et qu'après avoir écrit les valeurs de $x' - x_0$ et de

$y' - y_0$ on en retranche les précédentes, on aura

$$(39)\qquad \begin{aligned} x' - x &= (\theta' - \theta)\, r\,(\omega\alpha \cos\alpha - \upsilon \sin\alpha), \\ y' - y &= (\theta' - \theta)\, r\,[\omega\alpha \sin\alpha - \upsilon\,(1 - \cos\alpha)], \end{aligned}$$

équations d'où la température θ_0 est éliminée, et qui feront connaître les variations des coordonnées correspondantes à une variation donnée $\theta' - \theta$ de température. Ces formules supposent la lame fixée de position au point où elle rencontre l'axe des y, et sa direction maintenue en ce point parallèle à l'axe des x; la concavité est d'ailleurs dirigée dans le sens des y positifs.

9. L'application des formules générales (35) au cas qui nous occupe, a l'inconvénient de ne pas mettre en évidence la nature de la courbe résultant de la variation de température. Voici une démonstration plus directe.

Le rayon de courbure ρ_0 étant constant à la température θ_0, dans le cas où la figure est circulaire, il résulte de la formule (24) que le rayon de courbure ρ à la température θ est pareillement constant. La lame bimétallique étant donc supposée circulaire à une certaine température, reste circulaire à toute autre température.

L'équation (24) donne, en posant $\frac{\rho_0}{h} = \upsilon$,

$$(40)\qquad \rho = \frac{\rho_0}{1 + \upsilon(\theta - \theta_0)};$$

d'où, aux quantités près du second ordre,

$$(41)\qquad \rho - \rho_0 = - \rho_0 \upsilon (\theta - \theta_0).$$

Cette expression permet d'assigner à la constante υ une signification précise; elle représente en effet ce que l'on pourrait appeler le *coefficient de contraction* du rayon ρ.

L'axe des y passant par le point d'encastrement, et la direction de l'encastrement étant perpendiculaire à cet axe, il s'ensuit que le centre du cercle reste constamment sur ce même axe. Si donc l'axe des x passe également par le point fixe, et que α et α_0 désignent les angles que font avec le prolongement de l'axe des y, aux températures θ et θ_0, les rayons aboutissant à un même point matériel de la lame, on aura

$$(42)\qquad x = \rho \sin\alpha, \qquad y = \rho\,(1 - \cos\alpha);$$

$$(43)\qquad x_0 = \rho_0 \sin\alpha_0, \qquad y_0 = \rho_0 (1 - \cos\alpha_0).$$

Mais on a vu que l'allongement proportionnel $\varepsilon = \gamma(\theta - \theta_0)$ est constant dans toute l'étendue de la lame; on aura donc, entre les arcs correspondants à un même point, et à compter du prolongement de l'axe des y,

$$\rho\alpha = \rho_0\alpha_0[1 + \gamma(\theta - \theta_0)];$$

d'où l'on tire, en vertu de l'équation (40), et posant la relation (38),

$$\alpha = \alpha_0[1 + \omega(\theta - \theta_0)],$$

résultat identique avec l'équation (34). Si donc on substitue pour ρ et α leurs valeurs précédentes dans les équations (42), on aura

$$x = \rho_0[1 - \upsilon(\theta - \theta_0)]\sin[\alpha_0 + \omega\alpha_0(\theta - \theta_0)],$$
$$y = \rho_0[1 - \upsilon(\theta - \theta_0)]\{1 - \cos[\alpha_0 + \omega\alpha_0(\theta - \theta_0)]\},$$

expressions qui feraient connaître directement les coordonnées d'un point défini par l'angle α_0 dans le cercle primitif. En effectuant le développement de ces expressions et négligeant les termes du second ordre, puis, ayant égard aux équations (43), on obtiendrait les valeurs explicites de $x - x_0$ et $y - y_0$ données sous le n° (38 *bis*). Les formules que nous venons d'établir ont l'avantage de pouvoir être appliquées, quelque grand que soit l'angle α_0; mais si les formules du numéro précédent cessent de convenir à de très-grandes valeurs de cet angle, elles suffisent encore pleinement au cas des chronomètres où il n'atteint pas une demi-circonférence.

10. *Détermination expérimentale des constantes* ω *et* υ. — Transportons actuellement l'origine des coordonnées de la lame bimétallique sur l'axe du balancier: il suffira, pour cela, de changer dans les équations (39) y en $y + r$ et y' en $y' + r[1 + \gamma(\theta' - \theta)]$, ou d'augmenter la variation $y' - y$ de la quantité $r\gamma(\theta' - \theta)$; tirant ensuite les valeurs de x' et y', il viendra

$$(44)\qquad \begin{aligned} x' &= x + (\theta' - \theta)\, r\,(\omega\alpha\cos\alpha - \upsilon\sin\alpha),\\ y' &= y + (\theta' - \theta)\, r\,[\omega\alpha\sin\alpha - \upsilon(1 - \cos\alpha) - \gamma'].\end{aligned}$$

Élevant au carré ces équations et ajoutant membre à membre, on a, en négligeant les termes du second ordre, et désignant par r' et r les rayons vecteurs aux températures θ' et θ,

$$r'^2 = r^2 + 2(\theta' - \theta)\, r\,\{\omega\alpha(x\cos\alpha + y\sin\alpha) - \upsilon[x\sin\alpha + y(1 - \cos\alpha)] - \gamma' y\}.$$

Or, relativement aux nouveaux axes, on a

$$x = r\sin\alpha, \qquad y = -r\cos\alpha;$$

d'où

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha = 0,$$
$$x\sin\alpha + y(1-\cos\alpha) = r(1-\cos\alpha):$$

il s'ensuit

$$(45)\qquad r'^2 = r^2 - 2(\theta'-\theta)r^2[\nu(1-\cos\alpha) - \gamma'\cos\alpha].$$

Cette formule nous servira au calcul des moments d'inertie. Passons r^2 dans le premier membre, et divisons ensuite par $r' + r$; nous aurons, aux termes près du second ordre,

$$(46)\qquad r' - r = -(\theta'-\theta)r[\nu(1-\cos\alpha) - \gamma'\cos\alpha]:$$

nous indiquerons plus loin l'usage de cette équation pour la détermination du coefficient ν.

Reprenons la relation (34) dont il a été donné une seconde démonstration n° **9**, nous en déduirons

$$\alpha' - \alpha_0 = \omega\alpha_0(\theta' - \theta_0),$$

équation qui, combinée avec la proposée, donne, en négligeant les termes du second ordre,

$$(47)\qquad \alpha' - \alpha = \omega\alpha(\theta'-\theta).$$

Imaginons qu'avant d'opérer la section des lames bimétalliques pour rendre l'une de leurs extrémités libres, on ait marqué, sur leur pourtour, des divisions qui fixent les valeurs primitives des angles α, l'origine de ces divisions étant au point même de jonction des lames et de la barrette; supposons, d'autre part, que l'on ait le moyen d'observer la variation des directions de la normale correspondante à une division α et de mesurer celles des températures : l'équation (47), appliquée à un nombre convenable d'observations, fournira la valeur du coefficient $\omega\alpha$, et l'on en déduira celle de ω.

Voici comment les observations angulaires pourront être faites : le balancier étant monté sur un cercle divisé, de manière que son axe coïncide ou à peu près avec l'axe du cercle, on disposera tangentiellement aux lames, et au point défini par l'angle α, un léger miroir plan ; on dirigera sur ce miroir une lunette munie d'un réticule, et l'on fera tourner le cercle qui porte le balancier de manière à amener dans le champ de la lunette l'image d'un objet éloigné et à faire coïncider cette image avec un fil du réticule parallèle à l'axe du balancier. La lunette sera dès lors fixée; on fera la lecture du cercle et l'on notera la température. Celle-ci venant à changer, la direction du miroir variera, et l'on agira sur le cercle de

manière à rétablir la coïncidence de l'image avec le fil du réticule. Il est clair que, dans cette nouvelle situation, le plan du miroir sera parallèle à sa direction primitive : la variation de la direction de la normale entre les deux observations sera donc accusée par la différence des lectures du cercle.

Soient l' et l les lectures correspondantes aux températures θ' et θ, lectures que nous supposerons croissantes quand on fera tourner le balancier en sens contraire de l'angle α, l'équation (47) deviendra

$$(48) \qquad l' - l = \omega\alpha\,(\theta' - \theta):$$

θ étant arbitraire, on le fera, pour plus de commodité, égal à la moyenne des valeurs observées de θ'; il s'ensuit que l'inconnue l aura précisément pour valeur la moyenne des lectures l'. L'ensemble des valeurs actuellement connues de $l' - l$ et de $\theta' - \theta$ fournira celle du coefficient $\omega\alpha$, et la différence entre les $l' - l$ observés et leurs valeurs calculées $\omega\alpha\,(\theta' - \theta)$ montrera jusqu'à quel point la lame bimétallique fonctionne régulièrement. La valeur de $\omega\alpha$ pourra être très-exacte sans qu'on réussisse à en obtenir une également satisfaisante de ω, attendu que l'angle α ne sera généralement donné qu'assez grossièrement ; pour cette raison, il conviendra de prendre cet angle égal à son maximum, en plaçant le miroir près de l'extrémité libre de la lame. Néanmoins, l'emploi du procédé que nous indiquons aura le grand avantage de déceler les moindres défauts d'une lame bimétallique, si l'on peut compter sur l'exacte évaluation des températures.

L'objet éloigné sera convenablement remplacé par une seconde lunette faisant fonction de collimateur, et dont le réticule sera vivement éclairé par une lampe placée à l'oculaire.

On pourrait encore remplacer les deux lunettes par une lunette unique dirigée normalement sur le miroir, et munie d'une glace mince à faces parallèles, inclinée à 45° sur l'axe de la lunette, et placée entre l'œil et l'oculaire : une lampe, disposée latéralement, enverrait par réflexion sa lumière sur les fils et déterminerait la formation d'une image négative des fils par les rayons réfléchis sur le miroir que porte la lame bimétallique ; l'observation consisterait à tourner le cercle de manière à amener la coïncidence entre l'un des fils et son image produite par réflexion.

Avec le système proposé, on se trouverait dans l'obligation d'étudier séparément chacune des deux lames ; mais on pourrait, à l'aide d'un artifice assez simple, les étudier simultanément. Il suffirait pour cela de placer les deux miroirs aux extrémités d'un même diamètre du balancier, en dirigeant leurs surfaces réfléchissantes dans le même sens, et limitant l'étendue de l'un des miroirs à un plan passant à peu près par l'axe de la lunette ; de cette manière, chacun des miroirs n'enverrait de rayons et n'en recevrait que par l'une des moitiés de l'objectif. On aurait donc à

la fois dans le champ les deux images produites par les miroirs; mais leurs intensités seraient réduites de moitié. Ayant réglé une première fois le parallélisme des miroirs en opérant la superposition des images réfléchies, il arrivera peut-être que les images resteront en coïncidence ou ne s'écarteront que très-peu : alors il suffira de pointer le milieu des images, et le résultat représentera la moyenne des deux lames. Les valeurs de α devront elles-mêmes différer très-peu et l'on en prendra la moyenne pour calculer ω.

Nous ne pouvons indiquer ici comment on assurera l'exacte détermination des températures; on aura sans doute à faire quelques essais avant d'y parvenir.

Le coefficient υ s'obtiendra par la mesure des variations de distance des points de la lame bimétallique à l'axe du balancier, ainsi qu'il résulte de l'équation (46); toutefois on ne l'obtiendrait entièrement dégagé du coefficient de dilatation γ', qu'en opérant sur un point de la lame distant de 90° du point d'encastrement. Quoi qu'il en soit, voici comment l'appareil de mesure pourrait être disposé. Établissons deux puissants microscopes dont les axes soient sensiblement parallèles et distants d'une quantité à peu près égale au diamètre moyen du balancier : ces microscopes, dont les objectifs auraient même distance focale, seraient munis d'un micromètre commun, formé d'une série de fils parallèles et rapprochés; le châssis, mû par la vis micrométrique, porterait deux fils perpendiculaires aux précédents et disposés de manière à pouvoir être amenés simultanément vers le milieu du champ de chacun des deux microscopes. Ce système étant fixement posé au-dessus du balancier, et l'axe de celui-ci répondant à peu près au milieu de l'intervalle des axes des microscopes, on ferait tourner le balancier autour de son axe jusqu'à ce que l'on pût voir, entre les deux mêmes fils rapprochés du réticule, les images de deux points choisis aux extrémités d'un même diamètre du système des lames : par un petit mouvement, il serait facile de donner à ce diamètre une direction sensiblement parallèle à celle des fils. On amènerait alors les fils mobiles du micromètre respectivement en coïncidence avec les deux points. Dans ces conditions, la distance des deux points, égale, en vertu de la parfaite similitude des lames, au double du rayon vecteur de l'un d'eux, sera mesurée par l'intervalle compris entre les positions des fils mobiles fournies par les pointés.

Il va sans dire que les microscopes sont supposés protégés contre les changements de température.

Soient : k la valeur commune d'un tour de vis des microscopes; ν et ν_1 les lectures correspondant respectivement aux pointés faits avec le microscope voisin de la tête de vis et avec le microscope opposé, lorsque la température est θ ; ν' et ν'_1 les lectures analogues lorsque la température devient θ'; χ la distance des axes op-

tiques des deux microscopes mesurée dans le plan des objets (*) : l'intervalle compris entre les points observés sera $\chi + k(\nu_1 - \nu)$ à la température θ, et $\chi + k(\nu'_1 - \nu')$ à la température θ' ; le premier étant égal à $2r$ et le second à $2r'$, on a

$$2(r' - r) = k(\nu'_1 - \nu_1) - k(\nu' - \nu);$$

d'où, en vertu de l'équation (46), et posant

$$(49) \qquad \begin{aligned} V &= \nu - \nu_1, \\ U &= 2\frac{r}{k}[\upsilon(1 - \cos\alpha) - \gamma'\cos\alpha], \end{aligned}$$

on déduit

$$(50) \qquad \nu' - \nu'_1 - V = U(\theta' - \theta).$$

θ étant arbitraire, on le prendra égal à la moyenne des températures observées θ' ; en conséquence, on devra prendre V égal à la moyenne des différences $\nu' - \nu'_1$.

Appliquant l'équation (50) à l'ensemble des observations, on obtiendra la valeur de U, et l'on aura ensuite

$$(51) \qquad \upsilon = \frac{\frac{k}{r}\frac{U}{2} + \gamma'\cos\alpha}{1 - \cos\alpha}.$$

Le résultat fourni par ce procédé ne sera pas sensiblement affecté de l'erreur commise sur α, si l'on opère sur des points voisins des extrémités des lames, pour lesquels α diffère peu de 180° ; mais alors υ dépend de γ'. Cependant on peut s'assurer que γ' n'est, dans les cas ordinaires de la pratique, qu'une assez faible fraction de $\frac{k}{r}\frac{U}{2}$, en sorte que la valeur de γ' telle que la donnent les auteurs, c'est-à-dire non obtenue au moyen d'expériences faites sur l'acier des lames bimétalliques, aurait encore toute la précision nécessaire.

On pourra, si l'on veut, déterminer le coefficient γ' au moyen de l'appareil lui-même ; et, bien que les dimensions dont on dispose soient très-faibles, le résultat sera plus sûrement applicable que celui que fourniraient les tables usuelles ; il aura d'ailleurs toute la précision que comporte le mode actuel de détermination de la quantité υ : on effectuera ainsi en même temps la mesure de r.

Pour cela, il faudra substituer aux deux points que nous considérions tout à l'heure, deux autres points pris sur un diamètre de la barrette et appartenant à la

(*) Nous désignons par axe optique d'un microscope la droite qui va du centre optique de l'objectif à la position du fil mobile correspondante à l'origine des tours de vis.

surface de séparation des lames bimétalliques. La distance de ces points étant $2r$ à la température θ, soit $2\overline{r'}$ leur distance à la température θ', et soient, comme plus haut, v, v_1, v' et v'_1 les pointés faits aux deux microscopes à ces températures, et $\overline{V}$ une constante; on aura

$$2r = \chi + k(v_1 - v),$$
$$2\overline{r'} - 2r = k(v'_1 - v' - \overline{V}):$$

mais cette dilatation a d'ailleurs pour expression $2r\gamma'(\theta' - \theta)$, on aura donc

$$v'_1 - v' - \overline{V} = \frac{2r}{k}\gamma'(\theta' - \theta).$$

Faisant θ égal à la moyenne des θ' et $\overline{V}$ égal à la moyenne des différences $v'_1 - v'$, on obtiendra la valeur du coefficient $\frac{2r}{k}\gamma'$ en appliquant cette formule à l'ensemble des observations, et l'on en déduira γ' quand $2r$ aura été mesuré.

Quant à cette mesure, soient : R l'intervalle connu de deux traits d'une règle divisée que l'on mettra sous les microscopes; w et w_1 les pointés faits sur ces traits; on aura

$$R = \chi + k(w_1 - w);$$

d'où, en substituant dans la précédente expression de $2r$,

$$2r = R + k[v_1 - w_1 - (v - w)],$$

équation que l'on appliquera, sans avoir égard à la température à laquelle auront été faits les pointés.

Il est évident qu'une simple addition, celle d'un cercle gradué, faite à l'appareil dont nous nous occupons, permettrait de remplacer celui qui nous a fourni l'évaluation de la quantité $\omega\alpha$; car le diamètre qui passe par les points considérés étant, dans les observations précédentes, toujours ramené suivant une même direction, les lectures du cercle accuseraient la variation de direction de ce diamètre, et, par suite, le changement de la direction du rayon vecteur de l'un des points observés. Soient en effet $\overline{\alpha}$ et $\overline{\alpha'}$ les angles des rayons vecteurs r et r' avec le prolongement de l'axe des y aux températures θ et θ', on a

$$x = r\sin\overline{\alpha}, \qquad y = -r\cos\overline{\alpha};$$
$$x' = r'\sin\overline{\alpha'}, \qquad y' = -r'\cos\overline{\alpha'}:$$

ces valeurs étant substituées dans les équations (44), il vient

$$r' \sin \bar{\alpha}' = + r \sin \bar{\alpha} + (\theta' - \theta)\, r [\omega\alpha \cos\alpha - \upsilon \sin\alpha]$$
$$- r' \cos \bar{\alpha}' = - r \cos \bar{\alpha} + (\theta' - \theta)\, r [\omega\alpha \sin\alpha - \upsilon(1 - \cos\alpha) - \gamma'];$$

d'où l'on tire, en négligeant les quantités du second ordre,

$$\sin(\bar{\alpha}' - \bar{\alpha}) = (\theta' - \theta)\,[\omega\alpha - (\upsilon + \gamma')\sin\alpha].$$

Soient l et l' les lectures du cercle correspondantes aux températures θ et θ', et posons, pour abréger,

(51 *bis*) $$W = \omega\alpha - (\upsilon + \gamma')\sin\alpha,$$

nous aurons

$$l' - l = (\theta' - \theta)\, W;$$

d'où l'on tirera, au moyen des observations et comme il a été dit plus haut, la valeur de W. Celle-ci, jointe à la valeur de υ obtenue ci-dessus, permettrait de déterminer ω si cela était nécessaire. Cette valeur serait sensiblement indépendante de υ et γ' dans le cas où α serait voisin de 180°.

On verra bientôt que le seul des deux coefficients ω et υ dont on ait à se servir est le second. Si donc, au lieu d'appliquer le procédé qui vient d'être décrit pour la détermination de υ, on préférait employer l'un de ceux qui font connaître ω indépendamment de υ, on aurait recours à l'équation (38), qui donne

(52) $$\upsilon = \omega - \gamma.$$

Mais on serait obligé de calculer le coefficient γ, au moyen des données physiques du balancier; cependant on verrait que cette quantité est une sorte de moyenne entre γ' et γ'', et qu'elle est une faible fraction de ω. Pour ce motif, on pourrait accepter le résultat d'un tel calcul, fait seulement en vue de la détermination de υ au moyen de ω. Dans ce cas, si l'on combine les équations (51 *bis*) et (52), il vient

(52 *bis*)
$$\upsilon = \frac{\dfrac{W}{\alpha} + \gamma\dfrac{\sin\alpha}{\alpha} - \gamma}{1 - \dfrac{\sin\alpha}{\alpha}},$$
$$\omega = \frac{\dfrac{W}{\alpha} + (\gamma' - \gamma)\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}}{1 - \dfrac{\sin\alpha}{\alpha}}.$$

Pour obtenir les meilleurés déterminations, il faudra encore que α soit le plus voisin possible d'une demi-circonférence.

Ces valeurs de υ et ω dépendent du coefficient de dilatation γ qu'il faudrait cependant obtenir directement, s'il est possible. Or la combinaison des deux modes d'observation qui ont fourni les coefficients U et W nous en offrira le moyen.

L'élimination de υ entre les équations (51) et (52 *bis*), conduit en effet aux valeurs suivantes de γ et ω,

(52 *ter*)
$$\gamma = \frac{W}{\alpha} - \frac{\frac{k}{r}\frac{U}{2}\left(1-\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right) + \gamma'\left(\cos\alpha - \frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)}{1-\cos\alpha},$$
$$\omega = \frac{W}{\alpha} + \frac{\frac{\sin\alpha}{\alpha}}{1-\cos\alpha}\left(\frac{k}{r}\frac{U}{2} + \gamma'\right).$$

Le même appareil peut donc à la fois servir à la mesure de r et à la détermination des coefficients γ, γ', υ et ω. Il serait intéressant de comparer le coefficient de dilatation γ ainsi obtenu, avec celui que donnerait son expression (30) en fonction des éléments constitutifs des lames.

Moment d'inertie du balancier autour de son axe de rotation.

11. *Masses compensatrices.* — Les moments d'inertie autour d'axes ne passant pas par le centre de gravité des masses sont, comme on le sait, égaux au produit des masses par le carré de la distance de leur centre de gravité à l'axe de rotation, augmenté du moment d'inertie autour d'un axe parallèle à celui-ci et passant par le centre de gravité.

Soient : M l'une des masses compensatrices, et $M\rho^2$ son moment d'inertie à la température θ, par rapport à un axe passant par son centre de gravité et parallèle à l'axe de rotation; νr la distance du centre de gravité à la courbe de jonction des lames partielles; ν désignant un nombre très-petit supposé positif quand le centre de gravité est extérieur à cette courbe; β la valeur de l'angle α correspondant à la normale passant par le centre de gravité. Il est évident que le carré de la distance du centre de gravité à l'axe de rotation s'obtiendra en changeant, dans la valeur (45) de r'^2, r en $r(1+\nu)$ et α en β : enfin ρ devenant $\rho\,[1+\gamma''(\theta'-\theta)]$ à la température θ', $M\rho^2$ se changera en $M\rho^2\,[1+2\gamma''(\theta'-\theta)]$. On aura donc, pour la somme des moments d'inertie des deux masses compensatrices, à la température θ',

(53) $$2Mr^2(1+2\nu) - 4Mr^2(\theta'-\theta)\,[\upsilon(1-\cos\beta) - \gamma\cos\beta] + 2M\rho^2\,[1+2\gamma''(\theta'-\theta)],$$

expression où les termes indépendants de $(\theta' - \theta)$ sont les sommes des moments d'inertie à la température θ.

12. *Lames bimétalliques*. — Décomposons chaque lame en éléments dm compris entre des plans normaux infiniment voisins, et soit $r(1 + \nu_1)$ le rayon vecteur du centre de gravité de l'un de ces éléments, ν_1 désignant une quantité très-petite et positive quand ce centre de gravité est extérieur à la courbe de contact des lames : il est évident qu'on aura le moment d'inertie de l'élément dm à la température θ', en multipliant dm par la valeur de r'^2 [équation (45)], dans laquelle on mettra $r(1 + \nu_1)$ à la place de r. Car, pour rester dans les mêmes limites d'approximation, il faudra négliger le moment de dm par rapport à l'axe passant par son centre de gravité, moment de l'ordre de $e'^2\, dm$ ou du second ordre par rapport au précédent.

Soient d'ailleurs Ω la section de la lame, D sa densité moyenne, on aura

$$dm = D\Omega r(1 + \nu_1)\, d\alpha,$$

puis, au moyen de l'équation (45), en y distinguant le rayon vecteur du centre de gravité de dm par l'indice $_1$,

$$r_1'^2\, dm = r^2(1 + 2\nu_1)\, dm - 2(\theta' - \theta) r^2 [\nu\, dm - (\nu + \gamma') D\Omega r(1 + \nu_1) \cos\alpha\, d\alpha].$$

En intégrant entre les limites 0 et α, il vient

$$\int r_1'^2\, dm = mr^2(1 + 2\nu_1) - 2(\theta' - \theta) r^2 [\nu m - (\nu + \gamma') D\Omega r(1 + \nu_1) \sin\alpha];$$

mais on a d'ailleurs, entre les mêmes limites et pour l'une des lames,

$$m = D\Omega r(1 + \nu_1)\alpha :$$

au moyen de cette relation, on obtient, pour la somme des moments d'inertie des deux lames, à la température θ',

$$(54) \qquad 2mr^2(1 + 2\nu_1) - 4mr^2(\theta' - \theta)\left[\nu - (\nu + \gamma') \frac{\sin\alpha}{\alpha}\right].$$

S'il était nécessaire de calculer la valeur de ν_1, on trouverait

$$(55) \qquad \nu_1 = \frac{1}{2r} \frac{D'' e''^2 - D' e'^2}{D'' e'' + D' e'},$$

D' désignant la densité de la lame d'épaisseur e', et D'' celle de la lame d'épaisseur e''.

Le calcul que nous venons de présenter est simple; mais comme l'emploi de la densité moyenne D pourrait ne pas paraître suffisamment clair, nous exposerons en note un autre mode de calcul (*).

(*) Soient (*fig.* 6) : O le centre du balancier; OA le rayon aboutissant à l'encastrement; AA_1 la courbe de contact des lames; ρ' son rayon à la température θ'; C le centre de courbure situé sur le rayon OA, ainsi qu'il a été dit n° 9. Menons deux plans normaux infiniment voisins et faisant avec OA les angles α' et $\alpha' + d\alpha'$, et soit dm l'élément de masse compris entre ces plans et deux surfaces cylindriques concentriques décrites de C avec les rayons $\rho' + u$ et $\rho' + u + du$; l étant la largeur des lames et D_1 la densité au point M situé à la distance u de la courbe de contact : on aura

$$dm = D_1 l (\rho' + u)\, d\alpha'\, du;$$

mais on peut substituer à cette expression celle qui répond au volume du même élément à la température θ, et pour laquelle, D désignant la densité, on a

$$dm = D l (r + u)\, d\alpha\, du.$$

Le moment d'inertie de cette masse élémentaire est

$$\overline{OM}^2 dm.$$

Or on a, en désignant la droite $\overline{OC}$ par c,

$$\overline{OM}^2 = (\rho' + u)^2 + c^2 + 2(\rho' + u) c \cos\alpha',$$

ou, en négligeant les termes du second ordre,

$$\overline{OM}^2 = \rho'^2 + 2\rho' u + 2\rho' c \cos\alpha.$$

Par des considérations déjà employées, on tirera aisément de l'équation (41)

$$\rho' = r - \upsilon r (\theta' - \theta).$$

Quant à c, sa valeur est $c = \overline{OA} - \overline{AC} = r[1 + \gamma'(\theta' - \theta)] - \rho'$; d'où

$$c = r(\upsilon + \gamma')(\theta' - \theta).$$

Substituant ces valeurs dans l'expression de $\overline{OM}^2$, il vient, aux termes près du second ordre,

$$\overline{OM}^2 = r^2[1 - 2\upsilon(\theta' - \theta)] + 2ru + 2r^2 \cos\alpha\, (\upsilon + \gamma')(\theta' - \theta);$$

au moyen de quoi, le moment d'inertie élémentaire devient

$$\overline{OM}^2 dm = r^2 dm [1 - 2\upsilon(\theta' - \theta)] + 2r^2 l d\alpha [D u du + r \cos\alpha\, (\upsilon + \gamma')(\theta' - \theta) D du].$$

Dans l'intégration relative à u, D variera d'une lame à l'autre. Soient D' la densité de la lame

13. *Masses régulatrices.* — Ces masses se meuvent le long d'une vis dirigée vers l'axe du balancier. Désignons-les par M', et soient, à la température θ : ξ' les distances de leurs centres de gravité à l'axe de rotation ; $M'\rho'^2$ leurs moments d'inertie autour d'axes parallèles à ce dernier et passant par leurs centres de gravité : les vis étant en acier, ainsi que la barrette sur laquelle elles sont fixées, tandis que les masses M' sont en laiton, on aura, pour la somme de leurs moments d'inertie à la température θ',

$$(56) \qquad 2M'\xi'^2[1+2\gamma'(\theta'-\theta)]+2M'\rho'^2[1+2\gamma''(\theta'-\theta)].$$

Barrette, axe et masses complémentaires. — Désignons par $\mathfrak{M}\mathfrak{K}^2$ le moment d'inertie à la température θ, des masses comprenant la barrette, l'axe du balancier et ses appendices, et par $\Sigma\mathfrak{M}'\mathfrak{K}'^2$ la somme des moments d'inertie des masses complé-

---

intérieure, D'' celle de la lame extérieure, e' et e'' leurs épaisseurs respectives; les limites de l'intégration étant $-e'$ et $+e''$, on aura

$$\int D\,du = D''e'' + D'e',$$

$$\int D\,u\,du = \frac{1}{2}(D''e''^2 - D'e'^2):$$

intégrant ensuite entre les limites o et α le terme qui dépend de cette variable, il viendra

$$\int \overline{OM}^2\,dm = mr^2[1-2\upsilon(\theta'-\theta)] + r^2 l\alpha(D''e''^2 - D'e'^2)$$
$$+ 2r^2 lr\sin\alpha(D''e'' + D'e')(\upsilon+\gamma')(\theta'-\theta).$$

Intégrant d'ailleurs l'expression de dm, on aura

$$m = l\alpha r(D''e'' + D'e') + \frac{1}{2}l\alpha(D''e''^2 - D'e'^2),$$

ou

$$m = l\alpha r(D''e'' + D'e')\left(1 + \frac{1}{2r}\frac{D''e''^2 - D'e'^2}{D''e'' + D'e'}\right).$$

Au moyen de ces valeurs, il vient

$$\int \overline{OM}^2\,dm = mr^2\left(1 + \frac{1}{r}\frac{D''e''^2 - D'e'^2}{D''e'' + D'e'}\right) - 2mr^2(\theta'-\theta)\left[\upsilon - (\upsilon+\gamma')\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right],$$

expression qui, étant doublée, s'accorde avec la somme (54), en vertu de la relation (55).

mentaires que nous supposerons être faites en acier ; on aura, à la température θ',

$$[\mathfrak{M}\mathfrak{R}^2 + \Sigma \mathfrak{M}'\mathfrak{R}'^2][1 + 2\gamma'(\theta' - \theta)] \quad (*) \tag{57}$$

pour la somme des moments d'inertie de ces diverses pièces.

On fait ici abstraction de la minime erreur introduite dans la variation des moments d'inertie des deux palettes en rubis, par l'application du coefficient γ' à ces appendices.

13 *bis*. Nous avons désigné (n^{os} **2** et **3**) par A le moment d'inertie du balancier à la température θ, et par $a = \frac{dA}{d\theta}$ l'accroissement qu'il subit par chaque accroissement d'un degré de température.

Pour former ces valeurs, il nous suffira de réunir les moments d'inertie obtenus sous les marques (53), (54), (56) et (57) ; la somme des termes indépendants de $(\theta' - \theta)$ sera égale à la constante A, et celle des coefficients de $(\theta' - \theta)$ sera la valeur de a. On aura ainsi

$$\begin{aligned} A = \; & 2Mr^2(1 + 2\nu) + 2M\rho^2 \\ & + 2mr^2(1 + 2\nu_1) \\ & + 2M'\xi'^2 \qquad + 2M'\rho'^2 \\ & + \mathfrak{M}\mathfrak{R}^2 \qquad + \Sigma\mathfrak{M}'\mathfrak{R}'^2, \end{aligned} \tag{58}$$

$$\begin{aligned} a = & -4Mr^2[\upsilon - (\upsilon + \gamma')\cos\beta] + 4M\rho^2\gamma'' \\ & - 4mr^2\left[\upsilon - (\upsilon + \gamma')\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right] \\ & + 4M'\xi'^2\gamma' \qquad + 4M'\rho'^2\gamma'' \\ & + 2\mathfrak{M}\mathfrak{R}^2\gamma' \qquad + 2\Sigma\mathfrak{M}'\mathfrak{R}'^2\gamma'. \end{aligned} \tag{59}$$

(*) Nous avons considéré les masses $\mathfrak{M}'$ comme fixées directement à la barrette, bien qu'elles soient insérées sur le prolongement des lames bimétalliques. Si l'on voulait tenir compte de cette circonstance, il faudrait les traiter comme des masses M, auxquelles correspondraient des angles β très-petits : il en résulterait, dans la valeur de a du numéro suivant, un terme

$$-4\Sigma\mathfrak{M}'\mathfrak{R}'^2(\upsilon + \gamma')\sin^2\frac{1}{2}\beta$$

que nous négligeons à cause de son extrême petitesse, et pour ne pas trop compliquer les calculs.

Les artistes pourraient, dans la construction, réduire de beaucoup ces angles β, et les termes négligés seraient effectivement sans influence.

On en tire, en négligeant les termes en ν et ν_1,

$$(59\ bis)\quad \begin{aligned} a - 2A\gamma' = & -4Mr^2(\nu+\gamma')(1-\cos\beta) + 4M\,\rho^2(\gamma''-\gamma') \\ & -4mr^2(\nu+\gamma')\left(1-\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right) + 4M'\rho'^2(\gamma''-\gamma'). \end{aligned}$$

La substitution des valeurs (58) et (59) dans l'équation (5) du n° **2**, en ayant égard à ce que a tient lieu de $\frac{dA}{d\theta}$, fournirait l'équation de condition relative à la compensation. C'est ici le lieu de faire une remarque. Quelques personnes pourraient croire que le problème de la compensation consiste à déterminer la position des masses compensatrices ou l'angle β qui la fixe ; en effet, supposons formée l'équation de la compensation, on pourra la résoudre par rapport à $\cos\beta$, qui entre dans le premier terme de la valeur de a et ne figure pas ailleurs ; mais il est fort improbable à priori qu'on en tire une valeur réelle de β, puisque son cosinus doit rester compris entre les limites ± 1. Pour que la solution soit réelle, il faut donc que les éléments du balancier remplissent déjà certaines conditions. Ce n'est pas seulement en faisant varier la position des masses compensatrices que l'on peut espérer réaliser la compensation ; car il est visible que la variation de l'angle β ne produira d'effet qu'autant que les masses M auront elles-mêmes une grandeur sensible. La compensation exige donc en outre une répartition des masses oscillantes remplissant de certaines conditions ; on ne peut pas d'ailleurs se borner à satisfaire à ces seules conditions, car on s'exposerait à construire un appareil dont les battements s'écarteraient trop de ceux qu'on se propose d'obtenir.

14. *Variations simultanées* ΔA *et* Δa. — On a vu (n° **4**) comment l'observation d'un chronomètre, soumis à des températures variables et modifié dans la composition de son balancier, permet d'obtenir les quantités A, a, x et $\frac{dx}{d\theta}$, pourvu que l'on puisse assigner les variations ΔA et Δa que cette modification produit dans les valeurs primitives de A et a. Maintenant que les valeurs explicites de ces quantités sont connues, il sera aisé d'évaluer leurs variations ΔA et Δa. Nous avons renoncé à obtenir le moment d'inertie du balancier à l'aide des formules que le calcul intégral permet d'établir pour chaque corps de forme définie, à cause de la complication de la figure de cet organe et des erreurs que pourraient entraîner les mesures directes effectuées sur des corps de très-petites dimensions. De même que la mesure d'une capacité de figure quelconque peut s'obtenir en la remplissant d'un certain nombre de volumes égaux d'un liquide que l'on sait mesurer facilement et avec exactitude à cause de leur forme simple et définie, de même il nous a paru que

l'évaluation du moment d'inertie du balancier pouvait être ramenée à dépendre de la mesure directe des moments d'inertie de pièces présentant une forme simple.

C'est aussi par les accroissements ΔA et Δa que nous avons donné le moyen d'obtenir A et a; ajoutons que les premiers détermineront généralement les seconds. En effet, la variation du moment d'inertie d'une pièce isolée du balancier produit un changement simultané dans les valeurs de A et de a [équations (58) et (59)]; et si l'on fait varier plusieurs moments d'inertie à la fois, il n'en pourra résulter de variation nulle dans A ou dans a qu'autant que les variations auront entre elles certains rapports que nous fixerons plus loin.

La lame bimétallique étant censée étudiée, on ne pourra pas se proposer d'en faire varier le moment d'inertie. On ne pourra pas non plus changer ceux de la barrette et de l'axe dont les masses réunies sont désignées par $\mathfrak{M}$. Il reste ceux des masses M, M' et $\mathfrak{M}'$.

Les masses compensatrices M sont celles qui déterminent le principal terme de a; leur variation peut donc être utilisée pour la détermination de cette quantité. Les masses régulatrices M' peuvent donner lieu à des changements dans les moments d'inertie, soit à raison d'un simple déplacement longitudinal, soit par la substitution d'autres masses; mais cette substitution ne sera pas nécessaire, attendu qu'on obtiendra le même effet en faisant varier le nombre des masses complémentaires $\mathfrak{M}'$, et la variation due au déplacement de M' permettra de compléter au besoin un changement fixé à l'avance. En conséquence, nous ne ferons pas varier les masses M'.

Le coefficient a peut encore varier avec l'angle β. Pour comprendre toutes les variations praticables, nous écrirons les variations de A et a comme il suit :

$$(60)\qquad \Delta A = +\,2\Delta[Mr^2(1+2\nu)+M\rho^2]+4M'\xi'\Delta\xi'\left(1+\frac{1}{2}\frac{\Delta\xi'}{\xi'}\right)+\Delta\Sigma\mathfrak{M}'\mathfrak{R}'^2,$$

$$(61)\qquad \begin{aligned}\Delta a = &-4\Delta\{Mr^2[\upsilon-(\upsilon+\gamma')\cos\beta]-M\rho^2\gamma''\}\\ &+8M'\xi'\Delta\xi'\left(1+\frac{1}{2}\frac{\Delta\xi'}{\xi'}\right)\gamma'+2\Delta\Sigma\mathfrak{M}'\mathfrak{R}'^2\gamma' \quad (*).\end{aligned}$$

(*) En formant ces variations, on a négligé la variation de $M'\rho'^2$. Or le moment d'inertie de la masse M' qui est un écrou, est la différence entre les moments d'inertie d'un cylindre plein et d'une vis à filet triangulaire; et l'on verra ci-dessous (n° 16) dans une note relative au calcul exact du moment d'inertie d'une vis à filet triangulaire, que ce moment varie avec l'angle que le rayon vecteur du creux du premier filet fait avec l'axe des moments. Toutefois on verra en même temps que le terme dépendant de cet angle est du second ordre de petitesse : nous pouvions donc négliger la variation de $M'\rho'^2$.

Nous donnerons ci-dessous l'expression des deux seules variations qu'il reste à évaluer, celles des moments d'inertie des masses M et des masses M'; mais il est évident, d'après ces formules, qu'il suffira, pour faire varier simultanément A et a, de faire varier le moment d'inertie $Mr^2 + M\rho^2$ des masses compensatrices M.

15. *Variations successives de* A *et* a. — Bien que l'on puisse trouver quelques inconvénients à opérer deux variations successives dans les moments d'inertie des pièces du balancier, peut-être ces inconvénients seront-ils compensés par quelques avantages.

1° *Variation de* A *seulement*. On égalera à zéro la valeur (61) de Δa, et l'on tirera celle de $\Delta\xi'$,

$$(62) \qquad \Delta\xi' = \frac{2\Delta\{Mr^2[\upsilon - (\upsilon + \gamma')\cos\beta] - M\rho^2\gamma''\} - \gamma'\Delta\Sigma\mathfrak{M}'\mathfrak{R}'^2}{4M'\xi'\gamma'\left(1 + \frac{1}{2}\frac{\Delta\xi'}{\xi'}\right)}.$$

Le coefficient υ excédant très-notablement γ' et γ'', la variation de Mr^2 devra n'être pas trop grande, afin que $\Delta\xi'$ reste une petite quantité; toutefois on parviendra aisément à ce résultat en disposant convenablement du nombre des masses $\mathfrak{M}'$. Il suffira, en effet, que la course disponible des masses régulatrices M' puisse équivaloir à l'addition ou à la suppression d'une paire de masses complémentaires $2\mathfrak{M}'$. D'après la valeur de $\Delta\xi'$, cette course disponible devrait être égale à $\frac{\mathfrak{M}'\mathfrak{R}'^2}{2M'\xi'}$ au moins, ou à $\frac{1}{2}\frac{\mathfrak{M}'}{M'}\xi'$, attendu que $\frac{\mathfrak{R}'}{\xi'}$ différera peu de l'unité (*).

La variation de ξ' étant effectuée au moyen de l'expression (62), on aura pour la variation correspondante de A

$$(63) \qquad \Delta A = 2\Delta\left\{Mr^2\left[1 + 2\nu + \frac{\upsilon - (\upsilon + \gamma')\cos\beta}{\gamma'}\right] - M\rho^2\frac{(\gamma'' - \gamma')}{\gamma'}\right\}.$$

2° *Variation de* a *seulement*. La variation ΔA devant être nulle, on tire de l'équation (60)

$$(64) \qquad \Delta\xi' = -\frac{2\Delta[Mr^2(1 + 2\nu) + M\rho^2] + \Delta\Sigma\mathfrak{M}'\mathfrak{R}'^2}{4M'\xi'\left(1 + \frac{1}{2}\frac{\Delta\xi'}{\xi'}\right)}.$$

(*) Soit $\xi' = 7^{mm}$, et la course disponible 2^{mm}; il faudra que $\mathfrak{M}'$ n'excède pas $\frac{4}{7}$ de M' : si la course disponible n'est que de 1^{mm}, $\mathfrak{M}'$ devra être moindre que $\frac{2}{7}$ M'.

On voit que les conditions relatives à la course disponible de M′ sont les mêmes que plus haut.

Ayant réglé la position de M′ d'après l'équation précédente, on obtiendra, par la substitution de $\Delta\xi'$ dans l'équation (61),

$$(65)\qquad \Delta a = -4\Delta\left\{ M r^2 \left[(1+2\nu)\gamma' + \nu - (\nu+\gamma')\cos\beta \right] - M\rho^2(\gamma''-\gamma') \right\}.$$

Cette expression n'est comparable que pour la forme à l'expression (63), attendu que les valeurs des variations Δ qui figurent dans leurs seconds membres seront généralement différentes.

L'application des formules de ce numéro et du précédent repose sur l'évaluation des changements des moments d'inertie des masses M et $\mathfrak{M}'$; nous allons présenter actuellement leur calcul.

Moments d'inertie des masses compensatrices et des masses complémentaires.

16. 1° *Masses compensatrices.* — Ces masses ont la forme de cylindres droits dont les génératrices sont parallèles à l'axe du balancier, à cela près qu'elles présentent une rainure circulaire dans laquelle la lame bimétallique est engagée; en outre, elles sont fixées sur les lames au moyen d'une vis. La rainure et la vis présentent une complication dont on se débarrassera aisément.

La variation du moment d'inertie des masses compensatrices s'obtiendra en substituant à l'une de ces masses une autre masse qui ne diffère de la première que par la hauteur de la partie cylindrique extérieure aux lames bimétalliques.

Les variations des Mr^2 et $M\rho^2$ seront égales aux produits de r^2 et ρ^2 par la différence des masses. Les quantités ν étant extrêmement petites, et leurs variations très-faibles, on négligera l'effet de ces dernières.

Voici un autre moyen d'éviter ces difficultés. Imaginons les masses M composées de deux pièces et de la vis, l'une se fixant sur la lame bimétallique comme d'ordinaire, mais terminée à l'une de ses faces parallèles par un filet de vis à axe parallèle à l'axe du balancier, l'autre ayant la forme d'un cylindre concentrique à ladite vis et présentant un écrou par lequel il puisse être fixé sur la première pièce, le diamètre de cet appendice pouvant être quelconque. Il est clair que la variation du moment d'inertie de M s'obtiendra par le changement de la seconde masse cylindrique, et que l'évaluation du moment d'inertie pourra se faire comme s'il s'agissait d'un cylindre plein, pourvu que la cavité où pénètre la vis soit la même dans tous les cas, et que l'on ne fasse pas varier l'angle β.

Dans les deux procédés, la quantité ν peut être considérée comme se rapportant à l'axe commun des parties cylindriques des masses; cette quantité ν sera connue

par des mesures directes, puisque $r(1+\nu)$ exprimera la distance du centre de gravité de la partie variable de la masse M à l'axe du balancier, et les facteurs de Mr^2 et $M\rho^2$ dans les expressions (60) à (65) seront des constantes déterminées, à l'exception de β que l'on peut faire varier à volonté.

On aura donc

(66) $$\Delta . Mr^2 = r^2 \Delta M,$$

et il restera à déterminer $\Delta . M\rho^2$.

Or on sait que le moment d'inertie d'une masse cylindrique M autour de son axe de figure est égal au produit de M par la moitié du carré du rayon du cylindre. Soit donc υ ce rayon, il viendra

(67) $$\Delta . M\rho^2 = \frac{1}{2}\upsilon^2 \Delta M, \qquad \Delta . M\rho^2 = \frac{1}{2}\Delta . M\upsilon^2,$$

suivant que le rayon du cylindre aura été conservé ou changé.

2° *Masses complémentaires.* Ces masses se composent d'une tête de vis ayant la forme d'un cylindre, et d'une vis à filet triangulaire de même axe que la tête de vis. Cet axe est perpendiculaire à celui du balancier.

Nous commencerons par calculer le moment d'inertie d'un cylindre autour d'une droite perpendiculaire à son axe de figure.

Prenons l'axe des moments pour axe des x et l'axe du cylindre pour celui des z : décomposons le cylindre en tranches par des plans perpendiculaires à l'axe des z; soient z la distance d'un de ces plans à l'origine des coordonnées, et $z + dz$ celle d'un autre plan infiniment voisin; décomposons la tranche d'épaisseur dz en secteurs cylindriques au moyen de plans passant par l'axe du cylindre, et soient α et $\alpha + d\alpha$ les angles que deux de ces plans consécutifs forment avec l'axe des moments; enfin décomposons le secteur élémentaire au moyen de surfaces cylindriques ayant pour axe commun l'axe des z, et soient ρ et $\rho + d\rho$ les rayons de deux surfaces consécutives. D étant la densité de la matière du cylindre et dm son élément de masse, on aura

$$dm = D dz\, \rho\, d\alpha\, d\rho;$$

et le moment d'inertie de cet élément dm aura pour expression

$$(y^2 + z^2)\, dm = D dz\, d\alpha\, (z^2 + \rho^2 \sin^2\alpha)\, \rho\, d\rho,$$

à cause de $y = \rho \sin\alpha$. Intégrons par rapport à ρ, de $\rho = 0$ à $\rho = r$ rayon du

cylindre, il viendra

$$\int_0^r (y^2+z^2)\,dm = \mathrm{D}\,dz\,d\alpha\left(z^2\frac{r^2}{2}+\frac{r^4}{4}\sin^2\alpha\right):$$

intégrant par rapport à α de $\alpha = 0$ à $\alpha = 2\pi$, on aura

$$\int_0^{2\pi}\int_0^r (y^2+z^2)\,dm = \mathrm{D}\pi r^2\left(z^2+\frac{1}{4}r^2\right)dz.$$

L'intégration par rapport à z entre les limites z_0 et z_1, abscisses des extrémités du cylindre, donnera

$$\begin{aligned}\int_{z_0}^{z_1}\int_0^{2\pi}\int_0^r (y^2+z^2)\,dm &= \mathrm{D}\pi r^2\left[\frac{z_1^3-z_0^3}{3}+\frac{1}{4}r^2(z_1-z_0)\right]\\ &= \mathrm{D}\pi r^2(z_1-z_0)\left(\frac{z_1^2+z_1z_0+z_0^2}{3}+\frac{1}{4}r^2\right).\end{aligned}$$

Soient $2l$ la longueur du cylindre, Z la distance du milieu de $2l$ à l'origine des coordonnées, ou l'abscisse du centre de gravité; on aura

$$z_1+z_0 = 2\mathrm{Z},$$
$$z_1-z_0 = 2l:$$

d'où

$$z_1 = \mathrm{Z}+l,$$
$$z_0 = \mathrm{Z}-l;$$

puis

$$z_1^2+z_0^2 = 2\mathrm{Z}^2+2l^2,$$
$$z_1z_0 = \mathrm{Z}^2-l^2.$$

Observons enfin que la masse m du cylindre a pour expression

$$m = \mathrm{D}\,2\pi r^2 l,$$

quantité égale au facteur $\mathrm{D}\pi r^2(z_1-z_0)$ de l'intégrale précédente, et nous aurons

$$\int (y^2+z^2)\,dm = m\left(\mathrm{Z}^2+\frac{1}{3}l^2+\frac{1}{4}r^2\right),$$

en écrivant pour plus de simplicité un seul signe d'intégration.

Soient donc, relativement à la tête de la vis $\mathfrak{M}'$: m' la masse, z' la distance du centre de gravité à l'axe du balancier, $2l'$ la longueur dans le sens de l'axe de figure,

r' le rayon ; le moment d'inertie sera

$$m'\left(z'^2+\frac{1}{3}l'^2+\frac{1}{4}r'^2\right).$$

Quant à la partie filetée, soient : m'' la masse, z'' et l'' les quantités analogues à z' et l', r'' une longueur comprise entre le rayon aboutissant au creux du filet et celui qui aboutit à son sommet ; le moment d'inertie pourra évidemment s'écrire

$$m''\left(z''^2+\frac{1}{3}l''^2+\frac{1}{4}r''^2\right),$$

puisqu'en prenant successivement r'' égal à l'une et à l'autre de ses limites, on aurait les moments d'inertie de deux cylindres pleins entre lesquels se trouve compris le moment d'inertie cherché. Disons immédiatement qu'on aura toute l'exactitude nécessaire en prenant r'' égal à la moyenne des deux rayons aboutissant au creux et au sommet du filet ; c'est ce que du reste nous démontrerons dans une note (*), pour ne pas nous interrompre.

(*) *Moment d'inertie d'une vis à filet triangulaire, autour d'un axe perpendiculaire à son axe de figure.* — Conservant les mêmes axes et le même mode de décomposition de la masse totale que dans le texte, nous aurons encore, après une première intégration,

$$dm = \mathrm{D}\,d\alpha\,dz\,\frac{1}{2}\rho^2,$$

$$(y^2+z^2)\,dm = \mathrm{D}\,d\alpha\,dz\,\frac{1}{2}\left(z^2\rho^2+\frac{1}{2}\rho^4\sin^2\alpha\right),$$

ρ désignant ici le rayon vecteur de la courbe intersection du filet de la vis par le plan z, rayon incliné de l'angle α sur l'axe des x. Nous supposerons que le sens positif de l'angle α soit de x vers y.

Il nous faut actuellement rechercher l'équation de la section du filet de vis.

Le filet est limité par deux surfaces distinctes tournant leur convexité, l'une vers les z positifs, l'autre vers les z négatifs. Soient : k le pas de la vis, r le rayon du creux, f la hauteur du filet, φ l'inclinaison de la génératrice sur l'axe de la vis.

Dans la première de ces surfaces, désignons par h la distance à l'origine des coordonnées, à laquelle la génératrice rencontre l'axe de la vis ; z étant l'abscisse d'un point m (*fig.* 7) de cette génératrice, on aura

$$\rho = (h - z)\tang\varphi,$$

et la valeur de h sera

(a) $$h = k\,\frac{(\alpha-\alpha_0)}{2\pi},$$

On aura donc pour l'une des masses complémentaires $\mathfrak{M}'$,

$$(68)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{M}' &= m' + m'', \\ \mathfrak{M}'\mathfrak{R}'^2 &= m'\left(z'^2 + \frac{1}{3}l'^2 + \frac{1}{4}r'^2\right) + m''\left(z''^2 + \frac{1}{3}l''^2 + \frac{1}{4}r''^2\right). \end{aligned}$$

α_0 désignant une constante. Or on a d'ailleurs

$$(b)\qquad f = \frac{1}{2}k \operatorname{tang}\varphi,$$

d'où

$$(c)\qquad h = f \cot\varphi\, \frac{\alpha - \alpha_0}{\pi};$$

on a donc, pour équation polaire de la section faite à la distance z,

$$(d)\qquad \rho = f\,\frac{\alpha - \alpha_0}{\pi} - z \operatorname{tang}\varphi.$$

Soit v la valeur de α pour laquelle on a $\rho = r$, on tire de cette équation

$$(e)\qquad v = \alpha_0 + \frac{\pi}{f}(r + z \operatorname{tang}\varphi).$$

Celle-ci fera connaître inversement la valeur de la constante α_0; il suffira pour cela de se donner la valeur de v correspondante à une section faite à une distance z quelconque.

Éliminons z entre les équations (d) et (e), l'équation de la section prendra cette autre forme

$$(f)\qquad \rho = r + f\,\frac{\alpha - v}{\pi}:$$

cette équation est celle d'une spirale.

Dans la seconde surface on a, relativement à un point m' (*fig.* 7),

$$\rho = (z - h')\operatorname{tang}\varphi,$$

h' désignant l'abscisse du point où la génératrice rencontre l'axe du cylindre. Les génératrices des deux surfaces étant censées appartenir à une même section faite suivant l'axe du cylindre, les valeurs de α sont les mêmes, et, en considérant les régions des deux surfaces qui se rencontrent dans le creux d'un filet, on a entre h' et h la relation

$$h - h' = 2r\cot\varphi.$$

Au moyen de cette relation et de la valeur (c) de h, l'équation précédente devient

$$\rho = r + r + z\operatorname{tang}\varphi - f\,\frac{\alpha - \alpha_0}{\pi},$$

L'évaluation des longueurs ne présentera pas de difficultés. On déterminera les

---

et l'on reconnaît que la valeur de α pour laquelle ρ devient égal à r est identique avec la valeur (e) de v. Les deux sections ont ainsi un point commun dont les coordonnées sont r et v. Par l'élimination de z au moyen de la relation (e) on trouve

$$(g) \qquad \rho = r - f\frac{(\alpha - v)}{\pi}.$$

La comparaison de cette équation avec l'équation (f) montre que la section de la seconde surface est une autre spirale symétrique avec la première, par rapport au rayon vecteur qui fait l'angle v avec l'axe des x. Passant dans un même membre tous les termes des équations (f) et (g), et multipliant ensuite, on a, pour l'équation unique qui représente les deux courbes,

$$(\rho - r)^2 - \left[\frac{f}{\pi}(\alpha - v)\right]^2 = 0.$$

En mettant dans cette équation la valeur (e) de v, on aurait l'équation de la surface d'une vis à filet triangulaire, entre les coordonnées z, α et ρ.

De la symétrie des deux courbes on conclut qu'elles doivent se rencontrer sur le prolongement du rayon r. Si dans l'équation de la première on fait $\alpha - v = \pi$, et dans celle de la seconde $\alpha - v = -\pi$, on obtient la valeur commune $\rho = r + f$. Les directions $v + \pi$ et $v - \pi$, dont l'angle est 2π, coïncident effectivement.

Posons, pour plus de commodité,

$$(h) \qquad u = \alpha - v,$$

les équations (f) et (g) deviendront respectivement

$$(i) \qquad \rho = r + f\frac{u}{\pi}, \qquad \rho = r - f\frac{u}{\pi}.$$

Nous aurons à remplacer $d\alpha$ par du et α par $v + u$ dans les expressions à integrer : les valeurs (i) de ρ devront y être successivement substituées, et les intégrations relatives à u s'étendront, pour la première, de $u = 0$ à $u = +\pi$; pour la seconde, de $u = -\pi$ à $u = 0$.

La valeur de $\int dm$ se composant d'éléments égaux deux à deux dans les deux sections, il suffit évidemment de considérer l'intégrale relative à l'une d'elles et de doubler le résultat : on a ainsi

$$dm = \mathrm{D}\,dz \int_0^\pi \left(r + \frac{f}{\pi}u\right)^2 du:$$

l'intégrale indéfinie est $\frac{\pi}{3f}\left(r + \frac{f}{\pi}u\right)^3$; d'où

$$(j) \qquad \int_0^\pi \left(r + \frac{f}{\pi}u\right)^2 du = \frac{\pi}{3f}[(r+f)^3 - r^3] = \pi\left(r^2 + rf + \frac{1}{3}f^2\right);$$

masses partielles m' et m'' en pesant un filet de vis pareil à celui dont il s'agit, et de

---

il s'ensuit

$$dm = \mathrm{D}\,dz\,\pi\left(r^2 + rf + \frac{f^2}{3}\right).$$

Enfin, $2l$ désignant la longueur de la vis, il vient, en intégrant par rapport à z,

$$(k) \qquad m = \mathrm{D}\,2\pi l\left(r^2 + rf + \frac{f^2}{3}\right).$$

Cette expression est remarquable en ce qu'elle est indépendante du pas de la vis.

Par la substitution des valeurs de ρ et de α, les expressions du moment d'inertie élémentaire propres à chacune des sections considérées deviennent respectivement

$$(x^2 + z^2)\,dm = \frac{\mathrm{D}\,dz}{2}\left[z^2\left(r + f\frac{u}{\pi}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(r + f\frac{u}{\pi}\right)^4 \sin^2(u + v)\right] du,$$

$$(x^2 + z^2)\,dm = \frac{\mathrm{D}\,dz}{2}\left[z^2\left(r - f\frac{u}{\pi}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(r - f\frac{u}{\pi}\right)^4 \sin^2(u + v)\right] du:$$

les limites des intégrations relatives à u sont o et π pour la première expression, et $-\pi$ et o pour la seconde. Or φu désignant une fonction de u, on a

$$\int_{-\pi}^{0} \varphi u\,du = -\int_{0}^{-\pi} \varphi u\,du = \int_{0}^{-\pi} \varphi u\,d(-u) = \int_{0}^{\pi} \varphi(-u)\,du:$$

il s'ensuit que, pour ramener les limites de la deuxième intégrale à coïncider avec celles de la première, il suffira de changer le signe de u dans le coefficient différentiel de la deuxième expression. De cette manière, le signe de $f\frac{u}{\pi}$ redeviendra le même que dans la première, tandis que $u + v$ se changera en $v - u$, et l'on aura, pour la somme des moments d'inertie élémentaires correspondants aux deux courbes,

$$(x^2 + y^2)\,dm = \mathrm{D}\,dz\left\{z^2\left(r + f\frac{u}{\pi}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(r + f\frac{u}{\pi}\right)^4 - \frac{1}{8}\left(r + f\frac{u}{\pi}\right)^4\left[\cos 2(v + u) + \cos 2(v - u)\right]\right\} du,$$

ou bien

$$(l) \quad (x^2 + y^2)\,dm = \mathrm{D}\,dz\left[z^2\left(r + f\frac{u}{\pi}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(r + f\frac{u}{\pi}\right)^4 - \frac{1}{4}\cos 2v\left(r + f\frac{u}{\pi}\right)^4 \cos 2u\right] du.$$

Nous avons obtenu, équation (j), l'intégrale de $\left(r + f\frac{u}{\pi}\right)^2 du$; on aura de même

$$(m) \qquad \int_0^{\pi}\left(r + f\frac{u}{\pi}\right)^4 du = \pi\left(r^4 + 2r^3 f + 2r^2 f^2 + rf^3 + \frac{1}{5}f^4\right).$$

la comparaison de sa longueur avec la longueur $2l''$ on déduira la masse m'' ; la masse totale $\mathfrak{M}'$ étant connue par une pesée, on aura m' en en retranchant m''.

L'expression précédente renferme le terme $\left(r+f\frac{u}{\pi}\right)^4\cos 2u\,du$ qu'il faut aussi intégrer. A cet effet, en intégrant par parties, on a les deux formules

$$\int\left(r+f\frac{u}{\pi}\right)^p\cos 2u\,du = +\frac{1}{2}\left(r+f\frac{u}{\pi}\right)^p\sin 2u - \frac{pf}{2\pi}\int\left(r+f\frac{u}{\pi}\right)^{p-1}\sin 2u\,du,$$

$$\int\left(r+f\frac{u}{\pi}\right)^p\sin 2u\,du = -\frac{1}{2}\left(r+f\frac{u}{\pi}\right)^p\cos 2u + \frac{pf}{2\pi}\int\left(r+f\frac{u}{\pi}\right)^{p-1}\cos 2u\,du;$$

d'où les intégrales définies

$$\int_0^\pi\left(r+f\frac{u}{\pi}\right)^p\cos 2u\,du = -\frac{pf}{2\pi}\int_0^\pi\left(r+f\frac{u}{\pi}\right)^{p-1}\sin 2u\,du,$$

$$\int_0^\pi\left(r+f\frac{u}{\pi}\right)^p\sin 2u\,du = +\frac{pf}{2\pi}\int_0^\pi\left(r+f\frac{u}{\pi}\right)^{p-1}\cos 2u\,du - \frac{1}{2}[(r+f)^p - r^p].$$

On en déduit successivement

$$\int_0^\pi\left(r+f\frac{u}{\pi}\right)^1\sin 2u\,du = -\frac{1}{2}f,$$

$$\int_0^\pi\left(r+f\frac{u}{\pi}\right)^2\cos 2u\,du = +\frac{1}{2}\frac{f^2}{\pi},$$

$$\int_0^\pi\left(r+f\frac{u}{\pi}\right)^3\sin 2u\,du = -\frac{3}{2}f\left(r^2+rf+\frac{1}{3}f^2-\frac{1}{2}\frac{f^2}{\pi^2}\right),$$

$$\int_0^\pi\left(r+f\frac{u}{\pi}\right)^4\cos 2u\,du = +3\frac{f^2}{\pi}\left(r^2+rf+\frac{1}{3}f^2-\frac{1}{2}\frac{f^2}{\pi^2}\right).$$

Substituant ces diverses valeurs dans l'intégrale du second membre de l'expression (l), il vient

$$(o)\qquad (x^2+y^2)\,dm = \mathrm{D}\pi\,dz\left[z^2\left(r^2+rf+\frac{1}{3}f^2\right)+\frac{1}{4}\left(r^4+2r^3f+2r^2f^2+rf^3+\frac{1}{5}f^4\right)\right.$$
$$\left. -\frac{3}{4}\cos 2\varphi\frac{f^2}{\pi^2}\left(r^2+rf+\frac{1}{3}f^2-\frac{1}{2}\frac{f^2}{\pi^2}\right)\right].$$

Or on a, par les équations (e) et (b),

$$(p)\qquad dz = \frac{f}{\pi}\cot\varphi\,d\varphi = \frac{k}{2\pi}\,d\varphi:$$

au moyen de cette valeur, et en mettant le polynôme $\left(r^2+rf+\frac{1}{3}f^2\right)$ en facteur commun, l'ex-

La variation des moments d'inertie $\mathfrak{M}'\mathfrak{R}'^2$ s'obtiendra, avons-nous dit, par l'addition ou la suppression d'un ou deux couples des masses $\mathfrak{M}'$; mais, si l'on devait

---

pression précédente devient

$$(x^2+y^2)\,dm = \mathrm{D}\pi\left(r^2+rf+\frac{1}{3}f^2\right)\left[z^2dz+\frac{1}{4}\left(r^2+rf+\frac{2}{3}f^2-\frac{1}{45}\frac{f^4}{r^2+rf+\frac{1}{3}f^2}\right)dz - \frac{3}{8}\frac{kf^2}{\pi^3}\left(1-\frac{1}{2}\frac{\frac{f^2}{\pi^2}}{r^2+rf+\frac{1}{3}f^2}\right)\cos 2v\,dv\right].$$

Intégrons entre les limites z_0 et z_1, v_0 et v_1, il viendra

$$(q)\quad \int (x^2+y^2)\,dm = \mathrm{D}\pi\left(r^2+rf+\frac{1}{3}f^2\right)\left[\frac{1}{3}(z_1^3-z_0^3)+\frac{1}{4}\left(r^2+rf+\frac{2}{3}f^2-\frac{1}{45}\frac{f^4}{r^2+rf+\frac{1}{3}f^2}\right)(z_1-z_0) - \frac{3}{16}\frac{kf^2}{\pi^3}\left(1-\frac{\frac{f^2}{2\pi^2}}{r^2+rf+\frac{1}{3}f^2}\right)(\sin 2v_1-\sin 2v_0)\right].$$

Posant, comme nous l'avons déjà fait,

$$(r)\quad \begin{aligned} 2\mathrm{Z} &= z_1+z_0,\\ 2l &= z_1-z_0, \end{aligned}$$

et mettant la quantité z_1-z_0 ou $2l$ en facteur, on aura, eu égard à la valeur (k) et aux formules (e) et (b),

$$(s)\quad \int (x^2+y^2)\,dm = m\left[\mathrm{Z}^2+\frac{1}{3}l^2+\frac{1}{4}\left(r+\frac{1}{2}f\right)^2+\frac{5}{48}f^2-\frac{1}{180}\frac{f^4}{r^2+rf+\frac{1}{3}f^2} - \frac{3}{4}\frac{f^2}{\pi^2}\left(1-\frac{\frac{f^2}{2\pi^2}}{r^2+rf+\frac{1}{3}f^2}\right)\frac{\sin 4\pi\frac{l}{k}}{4\pi\frac{l}{k}}\cos\left(2v_0+4\pi\frac{l}{k}\right)\right].$$

La quantité v_0 est l'angle formé par le rayon vecteur minimum r dans la section extrême dirigée vers les z négatifs.

On peut remarquer que le dernier terme est toujours moindre que $\frac{3}{4}\frac{f^2}{\pi^2}$; il est de l'ordre de f^2. Si

opérer par substitution, il y aurait avantage à employer des filets de vis pareils, ce qui réduirait la variation de $\mathfrak{M}'\mathfrak{R}'^2$ à celle du premier terme de la seconde expression (68).

17. *Réglage et compensation; première approximation.* — Nous avons présenté dans le numéro précédent les moyens d'évaluer les moments d'inertie des masses M, M' et $\mathfrak{M}'$ et leurs variations. Nous avons donné au n° **14** l'expression des variations simultanées ΔA et Δa qui résultent des changements opérés dans les moments d'inertie. Enfin le n° **15** contient l'exposé des procédés à employer pour faire varier isolément les quantités A et a. Nous pouvons considérer actuellement les variations ΔA et Δa comme connues.

Au moyen de ces éléments, les formules du n° **4** permettent toujours d'obtenir les valeurs de A et a; elles donneront en outre, suivant les cas, celles de x et $\frac{dx}{d\theta}$ que nous pourrons généralement nous dispenser d'employer.

Lorsque la marche d'un chronomètre dont les constantes A et a auront été déterminées, sera observée sous des températures variables, on aura, par les formules (9) et (12) du n° **3**, les valeurs des corrections δA et δa à appliquer aux constantes A et a, pour obtenir le réglage et réaliser la compensation. Il s'agit actuellement d'en déduire les modifications que doivent subir en conséquence les moments d'inertie des masses M, M' et $\mathfrak{M}'$.

---

donc on néglige les termes de cet ordre, l'expression du moment d'inertie se réduit à celle que nous avons obtenue en substituant à la vis un cylindre de rayon égal à $r + \frac{1}{2} f$.

La présence du terme en v_0 montre que le moment d'inertie d'une vis de densité donnée ne dépend pas seulement de ses dimensions et de la distance de son centre de gravité à l'axe des moments, mais encore des angles que font avec l'axe des moments les rayons vecteurs menés aux points correspondants au creux du filet dans les deux sections extrêmes : l'un d'eux étant v_0, l'autre $v_0 + 2\pi \frac{2l}{k}$.

A part le cas où l serait très-petit et le rapport $\dfrac{\sin 4\pi \frac{l}{k}}{4\pi \frac{l}{k}}$ égal à l'unité, le terme dont il s'agit disparaîtra dans deux circonstances : 1° lorsque le double du nombre $\frac{2l}{k}$ des filets de la vis sera un nombre entier; 2° lorsque le double de l'angle v_0, augmenté de l'amplitude angulaire de la vis $2\pi \frac{2l}{k}$, sera égal à un nombre impair de quadrants, ou, en d'autres termes, quand le rayon vecteur du creux du filet correspondant au milieu de la longueur de la vis fera un angle de 45° avec l'axe des moments.

A cet effet, reprenons les équations (60) et (61) du n° **14**, et changeons-y les Δ en δ; posons, en outre, pour plus de simplicité,

$$(69) \qquad \delta\lambda = 4M'\xi'\delta\xi'\left(1 + \frac{1}{2}\frac{\delta\xi'}{\xi'}\right) + \delta\Sigma\mathfrak{M}'\mathfrak{R}'^2,$$

$$(70) \qquad \upsilon' = \upsilon - (\upsilon + \gamma')\cos\beta;$$

enfin, convenons que les quantités r^2, ρ^2, ν et β ne varieront pas, afin d'éviter les complications inutiles; les équations ci-dessus donneront

$$2[(1 + 2\nu)r^2 + \rho^2]\delta M + \delta\lambda = \delta A,$$
$$-4(\upsilon' r^2 - \gamma''\rho^2)\delta M + 2\gamma'\delta\lambda = \delta a:$$

on en tire

$$(71) \quad \{[\upsilon' + (1 + 2\nu)\gamma']r^2 - (\gamma'' - \gamma')\rho^2\}\delta M = \frac{1}{2}\gamma'\delta A - \frac{1}{4}\delta a,$$

$$(72) \quad \{[\upsilon' + (1 + 2\nu)\gamma']r^2 - (\gamma'' - \gamma')\rho^2\}\delta\lambda = (\upsilon' r^2 - \gamma''\rho^2)\,\delta A + \frac{1}{2}[(1 + 2\nu)r^2 + \rho^2]\delta a.$$

Ces formules feront connaître δM et $\delta\lambda$; néanmoins on remarquera que les résultats seront d'autant mieux déterminés que le coefficient de ces inconnues différera davantage de zéro. Or, en vertu de la valeur de υ', ce coefficient se transforme en

$$\left[2(\upsilon + \gamma')\sin^2\frac{1}{2}\beta + 2\nu\gamma'\right]r^2 - (\gamma'' - \gamma')\rho^2,$$

quantité qui s'annulerait sensiblement si l'on avait $\beta = 0$; car on doit se rappeler que γ', γ'' et ν sont des quantités très-faibles par rapport à υ. On aurait les résultats les mieux déterminés, si les masses M étaient établies aux extrémités des lames bimétalliques pour lesquelles β est voisin de 180°; mais ce ne serait pas convenable, attendu que dans la seconde approximation on fera varier l'angle β, et que, si l'on avait tout d'abord $\beta = 180°$, $\cos\beta$ n'éprouverait plus de variation sensible dans le voisinage de cet angle. La variation de $\cos\beta$ sera le plus sensible quand β approchera d'être un angle droit; c'est pourquoi nous conseillerons de suivre en cela les usages des praticiens, qui placent les masses compensatrices à angle droit avec la barrette.

Dans ces conditions, les formules (71) et (72), jointes à la relation (70), serviront convenablement à déterminer δM et $\delta\lambda$.

La correction δM sera facile à réaliser, puisque le rayon de gyration ρ ou le rayon correspondant du cylindre peut rester le même que celui de la masse primitive M. Si δM est positif, il faudra remplacer la masse M par une autre égale à

$M + \delta M$; ce que l'on obtiendra en construisant un cylindre d'une hauteur un peu trop grande : on réduira ensuite graduellement cette hauteur, jusqu'à ce que l'on soit parvenu, en consultant les indications d'une bonne balance, à obtenir le poids correspondant à $M + \delta M$. Il va sans dire que si δM est négatif, on n'aura qu'à réduire la masse primitive en ayant encore recours à l'emploi de la balance.

Quant aux moments d'inertie des masses M' et $\mathfrak{M}'$, on tire de l'équation (69), en ce qui les concerne,

$$(73) \qquad \delta\xi' = \frac{\delta\lambda - \delta\Sigma\mathfrak{M}'\mathfrak{R}'^2}{4M'\xi'\left(1 + \frac{1}{2}\frac{\delta\xi'}{\xi'}\right)}.$$

On examinera d'abord si la valeur de $\delta\lambda$ pourra résulter d'un simple déplacement des masses M'. A cet effet, supprimant le terme dépendant des masses $\mathfrak{M}'$ dans l'équation (73), on obtiendra une valeur de $\delta\xi'$, qui sera ou ne sera pas réalisable, selon que la course disponible sera ou ne sera pas suffisante. Dans le premier cas, il n'y aura point à faire varier les moments d'inertie $\mathfrak{M}'\mathfrak{R}'^2$. Dans le deuxième cas, il faudra augmenter ou diminuer, par paires, le nombre des masses $\mathfrak{M}'$, ou même opérer au besoin des substitutions de ces masses, de telle manière que la valeur de $\delta\xi'$ fournie par l'équation (73), en ayant égard à la variation $\delta\Sigma\mathfrak{M}'\mathfrak{R}'^2$, tombe entre des limites qui permettent de la réaliser.

C'est ici le lieu de faire remarquer qu'avant d'expérimenter un balancier, il conviendra de placer les masses M' vers le milieu de leur course.

Il est sans doute superflu d'indiquer que la variation $\delta\xi'$ sera mesurée au moyen du nombre de tours et parties de tour des vis qui conduisent les masses M', et dont la grandeur du pas est censée connue.

18. *Réglage et compensation; deuxième approximation.* — Les opérations décrites dans le numéro précédent fourniraient la solution du problème, si l'on pouvait compter sur la parfaite exactitude avec laquelle elles devraient être accomplies, et si, en outre, l'inertie du ressort spiral se trouvait exactement représentée par les différences entre les valeurs vraies de A, a, x, $\frac{dx}{d\theta}$ et celles fournies par l'observation de la marche du chronomètre. Il est donc probable que le résultat fourni par la première approximation laissera généralement à désirer; mais il sera néanmoins suffisamment approché, pour qu'il ne soit plus nécessaire que d'opérer de petites corrections.

Les valeurs de A et a, correspondantes à l'état du balancier après la première approximation, s'obtiendront en ajoutant respectivement aux valeurs primitives de ces quantités les corrections δA et δa réalisées lors de cette première approximation.

Dans ce qui va suivre, A et *a* désigneront les quantités ainsi obtenues, et δA et δa exprimeront les nouvelles corrections à appliquer à ces mêmes quantités. Ce que nous disons de A et *a* s'appliquera également à toutes les autres quantités dont les variations ont été réalisées dans la première approximation.

Le chronomètre ayant été de nouveau soumis à des températures variées et sa marche observée, les formules (9) et (12) du n° 3, en y introduisant les nouvelles valeurs de A et *a*, feront connaître δA et δa. Pour effectuer ces corrections, nous reprendrons encore les équations (60) et (61), en y changeant les Δ en δ.

Les variations δA et δa étant par hypothèse très-faibles, et supposant d'ailleurs que la course disponible des masses régulatrices M' soit encore suffisante, nous ne conserverons que les variations de ξ' et $\cos\beta$. Alors les équations (60) et (61) donneront

$$4M'\xi'\left(1+\frac{1}{2}\frac{\delta\xi'}{\xi'}\right)\delta\xi' = \delta A,$$

$$4Mr^2(\upsilon+\gamma')\,\delta\cos\beta + 8\gamma' M'\xi'\left(1+\frac{1}{2}\frac{\delta\xi'}{\xi'}\right)\delta\xi' = \delta a;$$

d'où

$$(74)\qquad \delta\xi' = \frac{\delta A}{4M'\xi'\left(1+\frac{1}{2}\frac{\delta\xi'}{\xi'}\right)},$$

$$(75)\qquad \delta\cos\beta = \frac{\delta a - 2\gamma'\delta A}{4Mr^2(\upsilon+\gamma')}.$$

La valeur de $\delta\xi'$ peut être réalisée sans difficulté. Quant à celle de $\delta\cos\beta$, on y pourrait substituer la variation $\delta . r\cos\beta$ qui exprimerait le chemin dont il faudrait déplacer les masses M dans le sens du rayon qui va au point d'encastrement des lames bimétalliques. Cette manière d'opérer paraît susceptible de quelques avantages.

Si l'on croit devoir pratiquer directement la correction angulaire $\delta\beta$ correspondante à $\delta\cos\beta$, on pourra ajouter à $\cos\beta$ la correction $\delta\cos\beta$, et chercher dans les tables l'angle correspondant au cosinus corrigé, angle dont l'excès sur la valeur primitive de β sera la correction $\delta\beta$: autrement, il faudrait tirer cette correction de la formule

$$(76)\qquad \sin\frac{1}{2}\delta\beta = -\frac{\delta\cos\beta}{2\sin\left(\beta+\frac{1}{2}\delta\beta\right)}\ (*).$$

(*) On aura sans doute remarqué que, dans nos calculs sur les différences finies Δ et δ, les termes des ordres supérieurs par rapport aux Δ et δ n'ont été négligés nulle part. Cela était nécessaire, attendu

19. *De la possibilité d'opérer le réglage sans altérer la compensation.* — Un chronomètre étant compensé, mais son mouvement étant jugé trop lent ou trop rapide pour l'usage auquel on le destine, est-il possible de faire varier sa marche au moyen des vis réglantes M', sans en altérer la compensation? Peut-on, par exemple, transformer un chronomètre de temps moyen en chronomètre de temps sidéral, ou *vice versâ*, sans risquer d'en faire disparaître la compensation? Telle est la question que nous nous proposons d'examiner ici.

Reprenons les formules du n° **3**, où δy désigne le changement que l'on veut obtenir dans l'intervalle des battements, et z la variation de cet intervalle par degré de température. Les deux formules qui donnent les variations de A et a sont (9) et (12) : la première détermine δA en fonction de δy; mais la seconde doit être simplifiée en conséquence de l'hypothèse que le chronomètre proposé est déjà compensé. Faisant donc $z = 0$ dans cette équation, on en tire, attendu que y n'est pas nul,

$$\frac{\delta a}{\delta A} = \frac{a}{A}.$$

Or les équations qui déterminent les variations de ξ' et $\cos\beta$ propres à réaliser δa et δA sans substitution de masses, sont les équations (74) et (75) du numéro précédent : la première servirait à déterminer la position des masses régulatrices; quant à la seconde, en y faisant $\delta \cos\beta = 0$, puisqu'il ne peut être question que de régler et non de modifier la compensation, on en tire

$$\frac{\delta a}{\delta A} = 2\gamma',$$

équation qui, combinée avec la précédente, fournit la condition

$$\frac{a}{A} = 2\gamma'.$$

Mais si l'on fait aussi $z = 0$ dans l'équation (11) du n° **3**, ce qui revient à écrire l'équation relative à la compensation, il vient

$$\frac{a}{A} - \frac{1}{x}\frac{dx}{d\theta} = 0:$$

---

que les différences Δ en particulier ne devaient pas être supposées petites, et que les autres pouvaient acquérir des valeurs trop considérables pour qu'il fût permis de négliger leurs puissances ou produits des ordres supérieurs. Or, bien que nous supposions la première approximation déjà satisfaisante, il se pourrait, dans quelques cas extrêmes, que la formule $\delta\beta = -\frac{\delta \cos\beta}{\sin\beta}$ fût insuffisante; c'est pourquoi nous avons donné la formule (76).

on devrait donc avoir, entre les constantes du ressort spiral et le coefficient de dilatation de l'acier, la relation

$$(76\ bis)\qquad \frac{1}{x}\frac{dx}{d\theta} = 2\gamma'.$$

Telle est la condition qui devrait être remplie pour que le réglage fût praticable sans troubler la compensation. Elle ne pourrait l'être qu'autant que $\frac{dx}{d\theta}$ serait positif, ce qui est peu probable. En fût-il d'ailleurs ainsi, il faudrait sans doute, pour satisfaire à la condition précédente, modifier les proportions du ressort spiral. Or ces modifications seraient-elles conciliables avec les conditions relatives à l'isochronisme que les artistes ont déjà tant de peine à remplir?

Il ne paraît donc pas possible de changer la marche d'un chronomètre au moyen des seules vis de réglage, sans altérer plus ou moins la compensation.

20. *Des effets du réglage sur la compensation.* — D'après ce qui vient d'être exposé, il peut y avoir quelque intérêt à rechercher dans quelles limites on peut modifier la marche d'un chronomètre au moyen des vis de réglage, sans trop nuire à la compensation. Désignant toujours par y et y' la durée de l'intervalle des battements aux températures θ et θ', on a, suivant l'équation (7) du n° **3**,

$$(77)\qquad \delta y' = \delta y + (\theta' - \theta)\,\delta z.$$

z ayant avec les éléments du balancier la relation (11)

$$2\frac{z}{y} = \frac{a}{A} - \frac{1}{x}\frac{dx}{d\theta}:$$

on en déduit

$$2\frac{y\,\delta z - z\,\delta y}{y(y+\delta y)} = \frac{A\,\delta a - a\,\delta A}{A(A+\delta A)};$$

on a d'ailleurs, suivant l'équation (9),

$$\frac{\delta A}{A} = 2\frac{\delta y}{y} + \frac{\delta y^2}{y^2};$$

enfin les variations de a et A, lorsqu'on opère seulement au moyen des vis de réglage, ont entre elles la relation

$$\delta a = 2\gamma'\,\delta A,$$

tirée de l'équation (75), comme il a été dit dans le numéro précédent. Éliminant

δa et δA entre les trois dernières équations, on trouve, toutes réductions faites,

$$(78) \qquad \delta z = z\frac{\delta y}{y} + \left(2y' - \frac{a}{A}\right)\left(1 - \frac{\frac{1}{2}\frac{\delta y}{y}}{1+\frac{\delta y}{y}}\right)\delta y.$$

Si l'on suppose que le chronomètre était compensé primitivement, auquel cas on a $z = 0$ et $\frac{a}{A} = \frac{1}{x}\frac{dx}{d\theta}$, la valeur de $\delta y'$ devient

$$(79) \qquad \delta y' = \delta y + (\theta' - \theta)\left(2y' - \frac{1}{x}\frac{dx}{d\theta}\right)\left(1 - \frac{\frac{1}{2}\frac{\delta y}{y}}{1+\frac{\delta y}{y}}\right)\delta y.$$

Le second terme de cette formule exprime l'altération due au réglage pratiqué isolément dans un chronomètre compensé.

Les valeurs de δz et $\delta y'$ ne peuvent être discutées, au point de vue numérique, tant que les rapports $\frac{a}{A}$ ou $\frac{1}{x}\frac{dx}{d\theta}$ n'auront pas été fournis par l'observation.

La condition, pour que la compensation ne soit point altérée par le réglage, s'obtiendrait en égalant à zéro le coefficient de $(\theta' - \theta)$ dans l'expression (79) : on retomberait ainsi sur l'équation (76 *bis*) du numéro précédent.

21. *Mode de réglage et de compensation n'exigeant pas l'étude préalable des lames bimétalliques.* — Nous avons supposé que ces appareils ne jouissent pas toujours de toutes les qualités désirables. Dans le but d'éviter des travaux que la discussion des observations pourrait faire rejeter, nous avons conseillé l'étude préalable des lames bimétalliques. Mais il se pourrait que certains procédés praticables permissent à un artiste d'obtenir sûrement de bonnes lames bimétalliques; et l'étude que nous avons recommandée ne manquerait pas de mettre rapidement ce fait en évidence. Alors on trouvera sans doute plus commode de demander toutes les déterminations dont on a besoin, à l'observation du changement de marche du chronomètre, produit par des changements connus dans les moments d'inertie de certaines pièces du balancier.

Voici comment on pourra procéder dans cette circonstance : la durée y' des battements correspondante à la température θ', étant toujours représentée par la formule

$$y' = y + (\theta' - \theta)z,$$

complétée au besoin par un terme en $(\theta' - \theta)^2$, et θ désignant une température arbitraire et donnée; supposons qu'une première série d'observations ait fait connaître les valeurs de y et z.

On procédera à une nouvelle série d'expériences en faisant varier les quantités A et a, et appliquant, à cet effet, les formules (60) et (61) du n° **14** (*). On fera varier le moment d'inertie de M, ou encore $\Sigma \mathfrak{M}' \mathfrak{R}'^2$, en changeant simplement le nombre des masses $\mathfrak{M}'$, ce qui sera sans doute préférable ; on fera varier en outre l'angle β.

Mais Δa sera inconnu : distinguons par l'indice 1 les précédentes variations, et soient y_1, z_1 et β_1, les valeurs de y, z et β qui leur correspondent dans la nouvelle série d'expériences, on aura

$$(80)\qquad \Delta_1 y = y_1 - y, \qquad \Delta_1 z = z_1 - z :$$

les formules (14) du n° **4** donneront

$$(81)\qquad A = \frac{\Delta_1 A}{\frac{2\Delta_1 y}{y} + \left(\frac{\Delta_1 y}{y}\right)^2}, \qquad \varkappa = 4\pi^2 \frac{\Delta_1 A}{2y\,\Delta_1 y + \Delta_1 y^2} = \frac{4\pi^2}{y^2} A.$$

A et $\varkappa$ seront ainsi déterminés, sans qu'il soit même nécessaire de faire varier la température ; mais les autres déterminations exigent l'emploi de températures variées pendant les trois séries d'expériences, ainsi qu'on le verra plus loin.

La variation $\Delta_1 A$ n'étant pas supposée nulle, ni même trop faible, nous ferons usage des équations (15) et (16). Posons, pour simplifier,

$$(82)\qquad \begin{aligned} (1) &= \frac{1}{1 + \frac{1}{2}\frac{\Delta_1 y}{y}} \left[\frac{z}{y} + \left(1 + \frac{\Delta_1 y}{y}\right)\frac{\Delta_1 z}{\Delta_1 y}\right], \\ [1] &= \left(1 + \frac{\frac{1}{2}\frac{\Delta_1 y}{y}}{1 + \frac{1}{2}\frac{\Delta_1 y}{y}}\right) \frac{z\Delta_1 y - y\Delta_1 z}{y\,\Delta_1 y}; \end{aligned}$$

ces équations deviendront

$$(83)\qquad \frac{1}{\varkappa}\frac{d\varkappa}{d\theta} = \frac{\Delta_1 a}{\Delta_1 A} - (1), \qquad \frac{a}{A} = \frac{\Delta_1 a}{\Delta_1 A} + [1].$$

(*) On ne pourrait pas se proposer de faire varier seulement A, attendu que, v étant inconnu, la valeur de $\Delta\xi'$ ne pourrait s'obtenir qu'en supposant nul le premier terme du numérateur de l'équation (62), et faisant seulement varier $\Sigma \mathfrak{M}' \mathfrak{R}'^2$; mais alors, suivant l'équation (63), la valeur de ΔA se réduirait à $2\Delta . M\rho^2 \left(\frac{\gamma' - \gamma''}{\gamma'}\right)$, quantité qui serait trop faible pour conduire à une bonne détermination de A.

Dans une troisième série d'expériences, il conviendra de conserver la même variation de A, ou de faire $\Delta_2 A = \Delta_1 A$; mais on pourra faire varier de nouveau l'angle β : il en résultera une variation $\Delta_2 a$ différente de $\Delta_1 a$. Soient alors y_2, z_2 et β_2 les nouvelles valeurs de y, z et β, et posons

$$(84) \qquad \Delta_2 y = y_2 - y, \qquad \Delta_2 z = z_2 - z;$$

les valeurs de A et x devant rester les mêmes, on aura, entre les quantités observées, la relation

$$2y\,\Delta_1 y + \Delta_1 y^2 = 2y\,\Delta_2 y + \Delta_2 y^2,$$

qui se réduit à

$$\Delta_2 y = \Delta_1 y.$$

Si l'on pose encore

$$(85) \qquad \begin{cases} (2) = \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{2}\dfrac{\Delta_2 y}{y}}\left[\dfrac{z}{y} + \left(1 + \dfrac{\Delta_2 y}{y}\right)\dfrac{\Delta_2 z}{\Delta_2 y}\right], \\ [2] = \left(1 + \dfrac{\dfrac{1}{2}\dfrac{\Delta_2 y}{y}}{1 + \dfrac{1}{2}\dfrac{\Delta_2 y}{y}}\right)\dfrac{z\Delta_2 y - y\Delta_2 z}{y\Delta_2 y}, \end{cases}$$

on aura, comme plus haut,

$$(86) \qquad \frac{1}{x}\frac{dx}{d\theta} = \frac{\Delta_2 a}{\Delta_1 A} - (2), \quad \frac{a}{A} = \frac{\Delta_2 a}{\Delta_1 A} + [2];$$

or ces valeurs devant être identiques avec celles que fournit la deuxième série d'expériences, il faudra que l'on ait

$$\frac{\Delta_2 a - \Delta_1 a}{\Delta_1 A} = (2) - (1) = -[2] + [1].$$

Si l'on suppose réalisée la relation $\Delta_2 y = \Delta_1 y$, ces deux expressions conduisent à la valeur unique

$$\Delta_2 a - \Delta_1 a = \left(1 + \frac{\dfrac{1}{2}\dfrac{\Delta_1 y}{y}}{1 + \dfrac{1}{2}\dfrac{\Delta_1 y}{y}}\right)\frac{\Delta_2 z - \Delta_1 z}{\Delta_1 y}\,\Delta_1 A.$$

Reportons-nous à l'équation (59) et désignons par C la somme des termes indé-

pendants de $\cos\beta$, les trois valeurs successives de a seront

$$\begin{aligned} a &= 4(v+\gamma')r^2 M\cos\beta + C, \\ a+\Delta_1 a &= 4(v+\gamma')r^2(M+\Delta_1 M)\cos\beta_1 + C + \Delta_1 C, \\ a+\Delta_2 a &= 4(v+\gamma')r^2(M+\Delta_1 M)\cos\beta_2 + C + \Delta_1 C; \end{aligned} \tag{87}$$

on en tire

$$\Delta_2 a - \Delta_1 a = 4(v+\gamma')r^2(M+\Delta_1 M)(\cos\beta_2 - \cos\beta_1). \tag{88}$$

De cette nouvelle expression, comparée à celle que nous avons obtenue tout à l'heure, on déduit, en remplaçant $\Delta_2 z - \Delta_1 z$ par sa valeur $z_2 - z_1$, et supprimant les indices devenus inutiles,

$$v+\gamma' = \left(1 + \frac{\frac{1}{2}\frac{\Delta y}{y}}{1+\frac{1}{2}\frac{\Delta y}{y}}\right)\frac{z_2 - z_1}{4(M+\Delta M)r^2(\cos\beta_2 - \cos\beta_1)}\frac{\Delta A}{\Delta y}. \tag{89}$$

Il est clair, d'après cette expression, que $v+\gamma'$ sera d'autant mieux déterminé, que les trois facteurs du dénominateur $M+\Delta M$, $\cos\beta_2 - \cos\beta_1$ et Δy seront plus considérables; mais, attendu que le premier ne saurait dépasser certaines limites, il conviendra de faire ΔM positif en prenant, s'il est nécessaire, M assez faible. Quant aux angles β, β_1 et β_2, il paraît convenable de faire $\beta = 90^\circ$, et de prendre les deux autres angles dans le voisinage, l'un de zéro, l'autre de 180°, de manière que la différence $\cos\beta_2 - \cos\beta_1$ atteigne sa plus grande valeur absolue.

Les valeurs de $\Delta_1 y$ et $\Delta_2 y$ pouvant ne pas se trouver exactement concordantes, on prendra pour Δy leur moyenne, si la discordance reste d'ailleurs tolérable.

Ayant ainsi obtenu $v+\gamma'$, on en déduira v. Formant alors la valeur ΔC à l'aide de l'équation (61), on aura

$$\Delta C = -4vr^2\Delta M + 4\gamma''\Delta.M\rho^2 + 8\gamma' M'\Delta\xi'\left(1+\frac{1}{2}\frac{\Delta\xi'}{\xi'}\right) + 2\gamma'\Delta\Sigma\mathfrak{M}'\mathfrak{R}'^2, \tag{90}$$

et les équations (87) et (88) donneront

$$\begin{aligned} \Delta_1 a &= 4(v+\gamma')r^2[M(\cos\beta_1 - \cos\beta) + \cos\beta_1\Delta M] + \Delta C, \\ \Delta_2 a &= 4(v+\gamma')r^2(M+\Delta M)(\cos\beta_2 - \cos\beta_1) + \Delta_1 a. \end{aligned} \tag{91}$$

Au moyen de ces valeurs, les équations (83) et (86), jointes aux quantités auxiliaires (82) et (85), feront connaître deux systèmes de valeurs de $\frac{1}{x}\frac{dx}{d\theta}$ et $\frac{a}{A}$. Les

valeurs de la dernière de ces deux quantités sont les seules qui nous intéressent. Dans le cas d'une discordance tolérable, on prendra les moyennes.

Les auxiliaires (82) et (85) contiennent respectivement les différences $\Delta_1 z$ et $\Delta_2 z$ ou $z_1 - z$ et $z_2 - z$; par conséquent, il est nécessaire que les trois séries d'observations soient faites par des températures variées, comme on l'a dit plus haut.

Les trois opérations que nous venons d'indiquer fournissent le moyen de déterminer les valeurs de A, a et v; et si l'on suppose que la première ait été faite en prenant β peu différent d'un angle droit, les procédés décrits nos **17** et **18** permettront de procéder au réglage et à la compensation du chronomètre proposé. Seulement, il ne faudra pas perdre de vue que les corrections δA, δa et celles des éléments correspondants du balancier se rapporteront à l'état dans lequel il se trouvait lors de la première expérience, état défini par les quantités A, a ou les éléments qu'elles représentent.

22. *Remarques concernant les applications numériques.* — Les dimensions et poids des pièces d'un balancier étant très-petites relativement aux dimensions et poids des pièces des machines auxquelles on a fait jusqu'ici l'application des principes de la mécanique, il y aurait quelques inconvénients pratiques à conserver les unités de longueur et de poids en usage dans le calcul des machines.

A l'effet de fixer convenablement le choix des unités, revenons à l'équation fondamentale (1) du no **2**,

$$y = 2\pi\sqrt{\frac{A}{x}},$$

où y désigne un temps, A une somme de moments d'inertie et x le produit d'une force par une longueur. La quantité $\frac{A}{x}$ est de la forme $\frac{mr^2}{Fl}$: remplaçons-y la masse m par son poids p divisé par l'espace g double de l'espace que la masse m décrirait pendant la première unité de temps dans sa chute libre; $\frac{A}{x}$ prendra la forme $\frac{p}{F}\frac{r}{g}\frac{r}{l}$. Or cette quantité ne contenant que des rapports de forces et de longueurs, il est visible que la valeur numérique de y, qu'elle représente, est tout à fait indépendante des unités de force et de longueur. Seulement, on ne doit pas oublier que g dépend essentiellement du choix de l'unité de temps.

Nous ne trouvons pas d'inconvénient sérieux à conserver la seconde de temps moyen comme unité de temps dans les cas les plus usuels; mais nous ne pourrons songer à exprimer les longueurs ou les forces que nous aurons à employer, en les rapportant au mètre ou au kilogramme. Il nous paraît convenable de prendre le centimètre pour unité linéaire, et le gramme pour unité de poids : de cette

manière, les poids se déduiront des volumes en multipliant ceux-ci par les densités tabulaires. L'unité de temps étant la seconde de temps moyen, la valeur de g à employer sera celle que l'on connaît, exprimée en centimètres : ainsi, à Paris, on aura

(92) $$g = 980^{cm},88; \qquad (\log = 2,991\,616).$$

Les explications qu'on vient de présenter peuvent être généralisées et étendues au cas où l'on aurait à changer l'unité de temps. C'est ce que nous allons faire succinctement.

L'équation du mouvement d'un point matériel rapporté à des axes fixes est, relativement à l'un d'eux,

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \Sigma F \cos(F, x);$$

remplaçons-y encore m par $\frac{p}{g}$, nous aurons, en divisant ensuite par p,

$$\frac{d^2x}{g\,dt^2} = \frac{\Sigma F \cos(F, x)}{p}.$$

Le second membre de cette équation se compose de rapports de forces multipliés par des nombres abstraits; quant au premier membre, d^2x et g étant des longueurs, leur rapport est pareillement un nombre abstrait : il s'ensuit que dt est nécessairement un nombre abstrait; c'est le nombre de fois que le temps représenté par dt contient l'unité de temps. Si donc on veut que dt désigne effectivement un espace de temps, il faut rendre homogène l'équation précédente, et, pour cela, remplacer le dt qui s'y trouve par $\frac{dt}{\tau}$; τ désignant la grandeur de l'unité de temps. On a ainsi

$$\frac{\tau^2}{g}\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\Sigma F \cos(F, x)}{p},$$

équation où, en vertu de l'homogénéité, le choix de chacune des unités de force, de longueur et de temps est absolument arbitraire.

Supposons actuellement que l'on veuille substituer à τ une nouvelle unité τ'; la quantité g, étant liée par définition à τ, devra être remplacée par une nouvelle ligne g' telle que l'on ait

$$\frac{\tau'^2}{g'} = \frac{\tau^2}{g};$$

d'où

$$g' = g\left(\frac{\tau'}{\tau}\right)^2.$$

Le problème des chronomètres va nous fournir l'occasion d'appliquer ces considérations. En effet, les observations astronomiques ne fournissent pas directement le temps moyen, mais bien le temps sidéral : d'un autre côté, le plus grand nombre des expériences à faire sur les chronomètres, donnera lieu à des oscillations s'écartant tellement des fractions données de la seconde de temps moyen, qu'il n'y aura aucun avantage à conserver cette unité de temps dans les calculs relatifs aux chronomètres même destinés à donner le temps moyen. En adoptant la seconde de temps sidéral pour unité, on évitera les calculs qu'il y aurait à faire chaque jour pour obtenir le temps moyen.

Enfin, faisons remarquer que s'il s'agit de régler et compenser un chronomètre destiné à donner le temps sidéral, il sera évidemment préférable d'adopter pour unité de temps la seconde de temps sidéral.

La rotation diurne de la Terre s'accomplit en $23^h\,56^m\,4^s{,}0906$ ou en 1 jour $-\,3^m\,55^s{,}9094$ de temps moyen : soient donc τ' et τ les durées respectives de la seconde de temps sidéral et de la seconde de temps moyen, on aura

$$\frac{\tau'}{\tau} = 1 - \frac{235{,}9094}{86400} = 0{,}997\,269\,567:$$

en faisant usage de la valeur de g relative à Paris, on trouve

$$(93) \qquad g' = 975^{cm}{,}531\,; \qquad (\log = 2{,}989\,241).$$

Telle est, en centimètres, la valeur qu'il faudra substituer à g, quand on prendra la seconde de temps sidéral pour unité.

Si le chronomètre doit être réglé sur le temps moyen, et que l'on se propose de rapporter les observations de sa marche au temps sidéral, en conservant la seconde de ce temps pour unité, il faudra alors convertir en temps sidéral l'intervalle donné Y des battements, ce qui se fera en le multipliant par

$$(94) \qquad \frac{\tau}{\tau'} = 1{,}0027379; \qquad (\log = 0{,}001\,18743).$$

Indiquons comment l'intervalle y' des battements du chronomètre, à la température θ', se déduira de la comparaison avec un chronomètre ou une pendule dont l'état est censé connu.

Soient, pour nous conformer aux usages des artistes, C l'état du chronomètre

ou mieux son avance sur le temps moyen ou sidéral, lors d'une première comparaison; C' son avance lors d'une seconde comparaison, séparée de la première par un nombre J de jours et fractions de jour exprimés en temps du chronomètre; μ le mouvement diurne ou par 24 heures du chronomètre, on aura

$$\mu = \frac{C' - C}{J}; \tag{95}$$

soit d'ailleurs i le nombre de battements par seconde du chronomètre, on aura

$$iy' = 1 - \frac{\mu}{86400}. \tag{96}$$

Enfin nous présenterons une dernière remarque concernant le calcul des masses et des moments d'inertie. Non-seulement il serait incommode d'appliquer constamment le diviseur g ou g' aux poids des pièces, pour en déduire les masses et les moments d'inertie; mais il en résulterait l'inconvénient d'opérer sur des nombres significatifs constamment précédés de deux ou trois zéros. On évitera ces inconvénients dans les calculs relatifs à la compensation, en remplaçant partout les masses par les poids; ce qui est possible, attendu que l'emploi des quantités x et $\frac{dx}{d\theta}$ n'est nullement nécessaire. Si cependant on voulait avoir leurs valeurs numériques, il suffirait de diviser par les nombres g ou g' celles qu'on aurait obtenues en substituant les poids aux masses.

RÉSUMÉ

DES OPÉRATIONS ET CALCULS A EFFECTUER POUR RÉGLER ET COMPENSER UN CHRONOMÈTRE.

23. *Remarques préliminaires.* — Les formules qui vont être résumées fournissent le moyen d'annuler dans l'expression de la marche des chronomètres, l'ensemble des termes qui dépendent de la première puissance des variations de température. Ainsi qu'on le verra dans le chapitre consacré à l'examen de l'influence des termes affectés du carré des variations de température, une partie de ces termes disparaît en même temps que les précédents, et les termes sensibles qui restent peuvent être réduits, sinon annulés, moyennant de certaines conditions auxquelles les lames bimétalliques et le ressort spiral doivent satisfaire. Or, les constantes spécifiques de ces organes étant au nombre des données du problème de la compensa-

tion limitée aux termes du premier ordre, on peut évidemment supposer ces données telles que les fixent les conditions résultant de la considération des termes du second ordre. Étant donc proposé d'effectuer la compensation jusque dans les termes de cet ordre, il faudra tout d'abord satisfaire autant que possible aux conditions qui seront présentées à ce sujet nos **34** à **37** (*).

Ceci admis, nous rappellerons l'hypothèse qui sert de point de départ à nos recherches : le ressort spiral est supposé isochrone ; mais il ne suffit pas que cette propriété ait été constatée, il faut encore que l'invariabilité de la position d'équilibre du balancier soit assurée pour toute température, au moyen d'une disposition spéciale du point d'attache du ressort sur le châssis du chronomètre. Cette disposition consisterait (*voir* n° **2**) à fixer l'extrémité du ressort sur une plaque d'acier portant une douille concentrique à l'axe du balancier : c'est par la douille que la plaque serait reliée au châssis.

Nous présentons deux solutions du problème : la première exige l'étude des lames compensatrices au moyen d'appareils d'optique ; la seconde n'exige pas l'emploi de ces appareils : mais on ne doit employer cette dernière qu'après avoir constaté que les lames bimétalliques provenant d'un atelier jouissent des propriétés requises, et seulement pour les chronomètres provenant d'une telle origine. L'étude des lames bimétalliques dispensera d'ailleurs d'effectuer une des séries d'observations de la marche du chronomètre qui sont nécessaires pour la détermination numérique de certains éléments constitutifs du balancier.

Étant donné un chronomètre à régler et compenser, voici quelles seront généralement les opérations à effectuer :

1° Étudier les lames bimétalliques, à l'effet de vérifier si le mouvement angulaire d'une normale à ces lames varie proportionnellement aux changements de température, ou encore, si la distance de deux points diamétralement opposés sur les deux lames ou la direction de cette distance, varient suivant la même loi de proportionnalité aux changements de température. Nous avons indiqué n° **10** deux appareils propres à résoudre ces questions : ces appareils permettront d'obtenir, en même temps, les coefficients spécifiques des lames bimétalliques, et de mesurer leur diamètre et le coefficient de dilatation de l'acier employé.

2° Mesurer les masses régulatrices et les distances de leurs centres de gravité ;

(*) Nous regrettons d'être obligés de remettre à la fin de ce Mémoire la discussion relative à l'influence des termes du second ordre; mais la détermination de certains éléments, nécessaire à la solution du problème, repose sur des opérations et calculs qui vont être résumés : nous n'avons cru pouvoir mieux faire que de présenter immédiatement le résumé concernant la compensation des termes affectés de la première puissance des variations de température.

mesurer les masses complémentaires et déterminer leurs moments d'inertie autour de l'axe du balancier; mesurer les masses compensatrices et calculer leurs moments d'inertie; effectuer les mêmes choses pour un nouveau système de masses compensatrices qui pourra ne différer du précédent que par une addition ou soustraction de matière.

3° Observer la marche du chronomètre à diverses températures et dans deux états différents, relativement à la distribution des masses. (Dans le cas où l'on n'aurait pas étudié préalablement les lames bimétalliques, on ferait varier la position des masses compensatrices dans la seconde série d'observations, en la ramenant à l'une de ses positions limites, et l'on ferait une troisième série dans laquelle les masses compensatrices seraient amenées à l'autre position limite.)

4° Déduire des observations précédentes les constantes du balancier dans son état primitif.

5° Calculer les corrections à appliquer aux éléments du balancier pour produire approximativement le réglage et la compensation.

6° Ayant effectué les corrections, observer la marche du chronomètre à des températures variées.

7° Déduire des observations le déplacement que doivent subir finalement les masses compensatrices et régulatrices et effectuer ces déplacements.

On a exposé (n° **22**) qu'il conviendra, dans les calculs numériques, de prendre le centimètre et le gramme pour unités de longueur et de poids; les poids se déduiront alors des volumes, en multipliant par les densités tabulaires.

Si l'on prend la seconde de temps moyen pour unité de temps, le diviseur par lequel on passe des poids aux masses, prendra, pour Paris, la valeur

$$g = 980^{\text{cm}},88; \qquad (\log = 2,991\,616).$$

Quand on aura à sa disposition un chronomètre ou une pendule de temps sidéral, il conviendra d'y comparer le chronomètre proposé; alors il conviendra également de prendre la seconde de temps sidéral pour unité, et la valeur de g, pour Paris, deviendra

$$g = 975^{\text{cm}},531; \qquad (\log = 2,989\,241).$$

Si, en outre, le chronomètre proposé est un chronomètre destiné à donner le temps moyen, l'intervalle des battements que l'on veut réaliser, devra être converti en temps sidéral, ce qui se fera en le multipliant par le facteur

$$1,002\,737\,9; \qquad (\log = 0,001\,187\,43).$$

Quelle que soit l'unité de temps que l'on adopte, soient : μ l'avance diurne du chronomètre rapportée au temps de ce chronomètre, i le nombre de battements par seconde du chronomètre ; l'intervalle y' des battements s'obtiendra par la formule

$$[\text{I}] \qquad iy' = 1 - \frac{\mu}{86400}.$$

Enfin, pour éviter l'emploi de nombres dont les figures significatives seraient constamment précédées de deux ou trois zéros, on pourra substituer partout les poids aux masses : seulement si, en dehors des exigences du problème actuel, on voulait obtenir les valeurs numériques des quantités x et $\frac{dx}{d\theta}$ dont la signification sera donnée plus loin, il faudrait diviser par le nombre g les valeurs que l'on aurait obtenues en faisant cette substitution.

PREMIÈRE SOLUTION.

24. *Étude des lames bimétalliques : 1° Détermination du coefficient d'inflexion; observation du mouvement d'une normale aux lames sous l'influence de la température, et calcul de la constante* v. — L'appareil a été décrit (n° **10**) : l'axe du balancier étant monté concentriquement sur l'axe d'un cercle divisé et les lames bimétalliques munies chacune d'un réflecteur plan, l'observation consiste à maintenir constante la direction du réflecteur, au moyen d'un mouvement imprimé à l'axe du cercle. Soient alors : θ' la température et l' la lecture correspondante des divisions du cercle, supposée croissante quand le balancier tourne dans le sens des extrémités libres des lames à leurs extrémités fixes; θ la moyenne des θ'; l la moyenne des l'; on écrira, pour chacune des observations, la relation

$$[\text{II}] \qquad l' - l = \omega\alpha(\theta' - \theta),$$

et de l'ensemble on déduira, par les méthodes connues, la valeur du produit $\omega\alpha$. Calculant avec cette valeur celles que prend le second membre de l'équation [II] et comparant avec les nombres $l' - l$ fournis par l'observation, on pourra juger du degré de perfection des lames bimétalliques, par la petitesse des différences et la marche irrégulière de leurs signes. La quantité α est l'angle compris entre l'origine fixe des lames bimétalliques et le point d'insertion des réflecteurs. Cet angle est mesuré au moyen de traits marqués sur les lames. Du produit $\omega\alpha$ on déduira le coefficient d'inflexion ω en divisant par α.

Ce procédé exige que l'on ait recours à quelques données physiques pour obtenir le coefficient de dilatation longitudinale des lames composées. Mais, eu égard à ce que ce coefficient est assez faible relativement à ω, les erreurs des

données physiques que l'on puisera dans les Tables en usage, seront généralement sans importance.

Désignons par

γ' le coefficient de dilatation de l'acier,

E′ son coefficient d'élasticité,

e' l'épaisseur de la lame d'acier,

γ'' le coefficient de dilatation du laiton,

E″ son coefficient d'élasticité,

e'' l'épaisseur de la lame de laiton,

$e = e' + e''$ l'épaisseur totale de la lame bimétallique,

γ le coefficient de dilatation longitudinale de la lame composée en ses points communs aux deux lames partielles; on aura

$$\text{[III]} \qquad \tang\zeta = \frac{e'}{e''}\sqrt{\frac{E'}{E''}}\ (*),$$

$$\text{[IV]} \qquad \gamma = \frac{\dfrac{e''\gamma' + e'\gamma''}{e} + \dfrac{e'e''}{2e^2}\dfrac{\cos 2\zeta}{\sin^2 2\zeta}[\gamma'' - \gamma' + (\gamma'' + \gamma')\cos 2\zeta]}{1 + \dfrac{e'e''}{e^2}\cot^2 2\zeta},$$

$$\text{[V]} \qquad v = \omega - \gamma.$$

25. 2° *Détermination de la constante v au moyen des mesures micrométriques.* — Ce procédé pourra être préféré au précédent, parce qu'il fournira en même temps

---

(*) Quand les artistes voudront obtenir d'une épaisseur donnée e l'effet le plus considérable, ils devront la partager dans le rapport

$$\frac{e'}{e''} = \sqrt{\frac{E''}{E'}};$$

alors on aura simplement

$$\gamma = \frac{e''\gamma' + e'\gamma''}{e}.$$

Les valeurs de E″ et E′ obtenues par G. Wertheim conduisent très-approximativement aux valeurs suivantes :

$$\frac{e'}{e''} = \frac{12}{17}, \quad \frac{e'}{e} = \frac{12}{29}, \quad \frac{e''}{e} = \frac{17}{29};$$

en y joignant des données telles que $\gamma' = 0{,}000\,0125$, $\gamma'' = 0{,}000\,0185$ pour 1° centigrade, on aurait

$$\gamma = 0{,}000\,015,$$

nombre qui, dans aucun cas, ne devrait être en erreur de plus de $\frac{1}{15}$ de sa valeur.

la mesure exacte du diamètre du balancier et le coefficient de dilatation γ' de l'acier dont le balancier est formé. Bien qu'on ne puisse songer, en opérant sur de faibles dimensions, à obtenir beaucoup d'exactitude dans l'évaluation d'un coefficient de dilatation, cependant le résultat qu'on obtiendra conviendra mieux au métal auquel on a affaire qu'un coefficient plus exact, mais se rapportant à d'autres échantillons : l'exactitude sera d'ailleurs tout à fait comparable à celle du coefficient υ que l'on a plus particulièrement en vue.

L'appareil décrit (n° **10**) consiste en deux microscopes à axes parallèles et destinés à observer deux points diamétralement opposés et marqués sur les lames bimétalliques. Ces microscopes ont même distance focale et sont munis d'une vis micrométrique commune : ils sont d'ailleurs protégés contre les variations de température. Dans le plan focal commun, sont tendus des fils parallèles très-rapprochés et de directions perpendiculaires aux deux fils mobiles portés sur le châssis de la vis micrométrique : l'observation consiste à amener les images des deux points entre les mêmes fils et à des distances visiblement égales de l'un d'eux ; on amène alors successivement les fils mobiles à coïncider avec ces images, et on fait les lectures correspondantes de la vis micrométrique.

Soient, relativement à la température θ', ν' et ν'_1 les lectures qui correspondent respectivement aux pointés faits avec le microscope le plus voisin de la tête de vis et avec le microscope opposé ; V la moyenne des différences observées $\nu' - \nu'_1$; θ la moyenne des températures θ' ; on posera, pour chaque observation, la relation

$$\text{[VI]} \qquad \nu' - \nu'_1 - \mathrm{V} = \mathrm{U}(\theta' - \theta),$$

d'où l'on déduira, par les méthodes connues, la valeur numérique du coefficient U. La substitution de cette dernière dans le second membre de l'équation précédente et la comparaison avec le premier membre fournira, comme plus haut, un moyen de juger de la qualité des lames bimétalliques.

Soient : k la valeur linéaire d'un tour de la vis micrométrique, nombre que l'on obtiendra en observant au microscope une échelle divisée en parties connues ; r le demi-diamètre aboutissant à la surface de séparation des lames partielles ; γ le coefficient de dilatation de l'acier employé ; α l'angle exprimant la distance des points observés à l'extrémité fixe des lames, les valeurs de r et γ' seront fournies par des mesures faites parallèlement à l'axe de la barrette (*), et l'on aura

$$\text{[VII]} \qquad \upsilon = \frac{\frac{k}{r}\frac{\mathrm{U}}{2} + \gamma' \cos\alpha}{1 - \cos\alpha}.$$

(*) On choisira deux points sur un diamètre de la barrette et appartenant à la surface de sépara-

Les opérations faites en prenant $\alpha = 90°$ fourniraient un résultat indépendant de γ'; en opérant sur des points choisis vers les extrémités libres des lames, la valeur de υ sera le mieux déterminée, bien qu'on doive faire usage de γ' : notons que la connaissance de ce coefficient est d'ailleurs nécessaire pour parvenir à effectuer la compensation.

26. 3° *Détermination du coefficient d'inflexion par des mesures micrométriques, et calcul de* υ. — L'appareil à employer est le même que le précédent, à cela près qu'on le suppose complété par l'addition d'un cercle gradué, destiné à la mesure des déplacements angulaires effectués pour amener les images des deux points entre les mêmes fils. Soient donc, à la température θ', l' la lecture du cercle supposée croître dans le sens qui a été désigné à l'occasion du premier procédé, θ la moyenne des θ', l la moyenne des l' et α la même quantité que ci-dessus; on posera, pour chaque observation, la relation

$$[\text{VIII}] \qquad l' - l = \text{W}(\theta' - \theta).$$

Ces équations serviront à déterminer W et à vérifier, comme plus haut, la qualité des lames. A l'aide des équations [III] et [IV], on calculera γ et l'on aura

$$[\text{IX}] \qquad \omega = \frac{\frac{\text{W}}{\alpha} + (\gamma' - \gamma)\frac{\sin\alpha}{\alpha}}{1 - \frac{\sin\alpha}{\alpha}}, \qquad \upsilon = \frac{\frac{\text{W}}{\alpha} + \gamma'\frac{\sin\alpha}{\alpha} - \gamma}{1 - \frac{\sin\alpha}{\alpha}}.$$

---

tion des deux lames : soient v et v_1 les pointés faits sur les images de ces points. Au commencement ou à la fin des observations, on mettra sous les microscopes une règle divisée, et l'on observera deux traits de cette règle dont l'intervalle connu R soit peu différent de $2r$: soient w et w_1 les pointés correspondants, on aura

$$2r = \text{R} + k[v_1 - w_1 - (v - w)].$$

Quant au coefficient γ', désignons par v' et v'_1 les pointés faits sur la barrette à la température θ', $\overline{\text{V}}$ la moyenne des différences $v'_1 - v'$, θ la moyenne des θ'; on aura, pour chaque observation,

$$v'_1 - v' - \overline{\text{V}} = \frac{2r}{k}\gamma'(\theta' - \theta);$$

d'où l'on tirera le coefficient $\frac{2r}{k}\gamma'$ en faisant usage de l'ensemble des observations. La quantité $2r$ étant connue par ce qui précède, on aura ensuite γ'.

La quantité W étant un angle; le rapport $\frac{W}{\alpha}$ s'obtiendra sous la seule condition que W et α soient exprimés en la même espèce d'unités. Quant au facteur $\frac{\sin\alpha}{\alpha}$, il est nécessaire pour l'obtenir que l'angle α y soit exprimé en nombre abstrait.

On aura les meilleures déterminations de ω et υ quand les points observés seront pris vers les extrémités libres des lames. La première équation [IX] permettra de comparer le système actuel d'observations avec celui qui repose sur l'emploi des surfaces réfléchissantes.

4° *Combinaison des deux procédés micrométriques pour la détermination des coefficients d'inflexion et de dilatation des lames bimétalliques.* — Il ne s'agit plus ici d'obtenir υ que l'équation [VII] détermine suffisamment, mais d'avoir des moyens d'éprouver les procédés indiqués. Ayant obtenu les valeurs de U et W, on déduit de leur combinaison

$$\text{[X]} \qquad \omega = \frac{W}{\alpha} + \frac{\frac{\sin\alpha}{\alpha}}{1-\cos\alpha}\left(\frac{k}{r}\frac{U}{2} + \gamma'\right);$$

et l'on a ensuite

$$\text{[XI]} \qquad \gamma = \omega - \upsilon = \frac{W}{\alpha} - \frac{\frac{k}{r}\frac{U}{2}\left(1 - \frac{\sin\alpha}{\alpha}\right) + \gamma'\left(\cos\alpha - \frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)}{1-\cos\alpha}.$$

L'épreuve consistera à comparer les valeurs de ω fournies par l'emploi des surfaces réfléchissantes et par la combinaison actuelle; les résultats devront s'accorder sensiblement. La valeur de γ fournie par l'application des formules [III] et [IV] aux données physiques et géométriques des lames pourra ne pas concorder aussi bien avec celle qu'on vient d'obtenir; mais cela est à peu près indifférent ici.

L'expérience montrera quel est, parmi les différents modes d'opérer qu'on vient d'exposer, celui qui peut offrir le plus d'avantages.

27. *Masses compensatrices, régulatrices et complémentaires; moments d'inertie et variations des moments d'inertie de ces masses.* — La détermination des masses s'obtiendra au moyen de pesées, et en divisant les poids exprimés en grammes par celle des valeurs de g qui se rapporte à l'unité de temps que l'on aura choisie; mais, ainsi qu'il a été dit n° **24**, on pourra substituer les poids aux masses et se dispenser ainsi d'effectuer les divisions par le nombre g.

Les masses que nous considérons sont supposées égales deux à deux et symé-

triquement placées par rapport à l'axe du balancier; les notations qui s'y rapportent sont :

M masse compensatrice,

M' masse régulatrice,

$\mathfrak{M}'$ masse complémentaire.

β est l'angle formé par le rayon vecteur allant au centre de gravité de M avec l'origine fixe de la lame bimétallique.

ξ' est la distance du centre de gravité de M' à l'axe du balancier.

L'angle β et la distance ξ' doivent avoir été mesurés avec soin, avant les expériences auxquelles le balancier doit être soumis.

Masses compensatrices. — Leur forme extérieure est celle d'un cylindre à axe parallèle à l'axe du balancier. On peut faire varier les masses et leurs moments d'inertie de deux manières : 1° en substituant une autre masse à la masse primitive sous la condition d'en conserver le diamètre; 2° en ajoutant à la masse primitive un appendice de forme cylindrique et de même axe, mais de diamètre quelconque.

Δ étant la caractéristique des variations finies, et ι désignant le rayon des cylindres qui limitent les masses M, on aura

$$\text{[XII]}\qquad \begin{gathered} \Delta . M r^2 = r^2 \Delta M, \\ \Delta . M \rho^2 = \frac{1}{2} \iota^2 \Delta M \quad \text{ou} \quad \Delta . M \rho^2 = \frac{1}{2} \Delta . M \iota^2, \end{gathered}$$

suivant que le rayon des cylindres aura été conservé ou changé.

Masses complémentaires. — Ces masses consistent en un cylindre formant tête de vis et en un corps de vis à filet triangulaire, ayant un axe commun.

Soient m' la masse d'une tête de vis, r' son rayon, $2l'$ sa longueur, z' la distance de son centre de gravité à l'axe du balancier;

m'' la masse du corps de la vis ou de la partie filetée, r'' la moyenne des rayons aboutissant au sommet et au creux des filets, $2l''$ sa longueur, z'' la distance de son centre de gravité à l'axe du balancier;

$\mathfrak{M}'$ la masse totale, $\mathfrak{M}'\mathfrak{R}'^2$ son moment d'inertie par rapport à l'axe du balancier; on aura, avec toute l'exactitude nécessaire,

$$\text{[XIII]}\qquad \begin{aligned} \mathfrak{M}' &= m' + m'', \\ \mathfrak{M}'\mathfrak{R}'^2 &= m'\left(z'^2 + \frac{1}{3} l'^2 + \frac{1}{4} r'^2\right) + m''\left(z''^2 + \frac{1}{3} l''^2 + \frac{1}{4} r''^2\right). \end{aligned}$$

On pèsera les masses $\mathfrak{M}'$ et un échantillon de vis filetée pareil au filet de vis des masses complémentaires et ayant une certaine longueur; la comparaison de

celle-ci avec la longueur $2l''$ permettra de déduire le poids de la masse m'' ; retranchant ce poids du poids total de $\mathfrak{M}'$, on aura celui de m'.

La variation de $\Sigma\mathfrak{M}'\mathfrak{R}'^2$ s'obtiendra par l'addition, la suppression ou même le changement de couples des masses $\mathfrak{M}'$; $\Delta\Sigma\mathfrak{M}'\mathfrak{R}'^2$ sera l'excès des valeurs de la somme des quantités $\mathfrak{M}'\mathfrak{R}'^2$ après et avant leur changement.

28. *Variations du moment d'inertie total du balancier et de sa dérivée par rapport à la température.*

A désignant le moment d'inertie du balancier,

a sa dérivée par rapport à la température,

ΔA et Δa se déduiront des variations ΔM, $\Delta . M\rho^2$ et $\Delta\Sigma\mathfrak{M}'\mathfrak{R}'^2$ qu'on vient de calculer, et de la variation $\Delta\xi'$ de la distance ξ' du centre de gravité des masses régulatrices M' à l'axe du balancier, par deux procédés différents.

Le premier, dans lequel on fera varier A et a simultanément, exigera que, des deux séries d'observations de la marche du chronomètre, l'une au moins, soit faite par des températures variables.

Le second, où A et a varieront successivement, permettrait d'opérer à température constante, si l'on avait seulement à déterminer A et a; mais on ne peut cependant se dispenser d'observer la marche du chronomètre à des températures variées, pour obtenir la valeur d'une inconnue z. Il sera nécessaire que la course disponible des masses régulatrices soit au moins égale à $\frac{1}{2}\frac{\mathfrak{M}'}{M'}\xi'$, en prenant ici pour $\mathfrak{M}'$ la plus petite des masses complémentaires.

La première des séries d'observations devant servir ultérieurement de point de départ aux corrections des éléments A et a, il conviendra en outre de fixer les masses compensatrices sur un diamètre à peu près perpendiculaire à l'axe de la barrette.

1° *Variations simultanées de* A *et* a. — Désignant par $(1+\nu)r$ la distance des centres de gravité des masses compensatrices à l'axe du balancier, β la distance angulaire des mêmes centres de gravité à l'origine fixe des lames bimétalliques, on aura, pour expression générale des variations ΔA et Δa,

$$[\mathrm{XIV}]\quad \begin{cases} \Delta A = 2\Delta[Mr^2(1+2\nu)+M\rho^2]+4M'\xi'\Delta\xi'\left(1+\frac{1}{2}\frac{\Delta\xi'}{\xi'}\right)+\Delta\Sigma\mathfrak{M}'\mathfrak{R}'^2, \\ \Delta a = -4\Delta\{Mr^2[\nu-(\nu+\gamma)\cos\beta]-M\rho^2\gamma''\}+8M'\xi'\Delta\xi'\left(1+\frac{1}{2}\frac{\Delta\xi'}{\xi'}\right)\gamma'+2\Delta\Sigma\mathfrak{M}'\mathfrak{R}'^2\gamma'. \end{cases}$$

Il est évident qu'on pourra se borner le plus généralement à faire varier la masse M. Cependant on pourra encore employer avantageusement la variation de l'angle β, que nous avons laissé en conséquence sous le signe Δ.

2° *Variations de* A *seulement*. — On aura

$$\text{[XV]} \qquad \Delta\xi' = \frac{2\Delta\left\{Mr^2[\nu-(\nu+\gamma')\cos\beta]-M\rho^2\gamma''\right\}-\gamma'\Delta\Sigma\mathfrak{M}'\mathfrak{R}'^2}{4M'\xi'\gamma'\left(1+\frac{1}{2}\frac{\Delta\xi'}{\xi'}\right)}.$$

Cette équation servira à fixer la position des masses régulatrices M'; et afin que $\Delta\xi'$ rentre dans les limites de course disponible, on ajoutera ou l'on supprimera au besoin une ou plusieurs paires des masses $\mathfrak{M}'$.

A ces variations correspondront les valeurs suivantes :

$$\text{[XVI]} \qquad \begin{aligned} \Delta A &= 2\Delta\left[Mr^2\left(1+2\nu+\frac{\nu-(\nu+\gamma')\cos\beta}{\gamma'}\right)-M\rho^2\frac{\gamma''-\gamma'}{\gamma'}\right], \\ \Delta a &= 0. \end{aligned}$$

Variation de a seulement. — On fixera la position des masses régulatrices d'après la formule

$$\text{[XVII]} \qquad \Delta\xi' = -\frac{2\Delta[Mr^2(1+2\nu)+M\rho^2]+\Delta\Sigma\mathfrak{M}'\mathfrak{R}'^2}{4M'\xi'\left(1+\frac{1}{2}\frac{\Delta\xi'}{\xi'}\right)}, \quad (*)$$

en prenant les mêmes précautions que tout à l'heure, pour obtenir une valeur de $\Delta\xi'$ qui soit réalisable. Il s'ensuivra

$$\text{[XVIII]} \qquad \begin{aligned} \Delta A &= 0, \\ \Delta a &= -4\Delta\left\{Mr^2[(1+2\nu)\gamma'+\nu-(\nu+\gamma')\cos\beta]-M\rho^2(\gamma''-\gamma')\right\}. \end{aligned}$$

29. *Détermination des valeurs du moment d'inertie* A *du balancier, du moment* $\varkappa$ *de la force du ressort spiral et de leurs dérivées a et* $\frac{d\varkappa}{d\theta}$ *relatives à la température et correspondantes à l'état primitif du chronomètre*.

Cas des variations simultanées de A *et a*. — Soient, relativement à l'état du balancier défini par A et a, y et y' les valeurs de l'intervalle compris entre deux battements consécutifs, et correspondantes aux températures θ et θ'; la température θ

(*) *N. B.* Dans cette formule et les suivantes [XVIII], les variations se rapportent arbitrairement à l'état primitif du balancier ou à celui qui résulte d'une première variation : seulement, il ne faut pas négliger d'employer les variations qui se correspondent exactement. En faisant l'application de ces formules, nous aurons l'occasion de considérer des variations qui résulteront de la comparaison avec l'état déterminé par une variation antérieure.

désignant d'ailleurs celle à laquelle se rapportent les moments A et $\varkappa$, on posera, pour chaque observation, une équation de la forme

[XIX] $$y' = y + (\theta' - \theta) z + (\theta' - \theta)^2 \zeta :$$

de l'ensemble des équations on déduira les valeurs de y et de z.

Dans une seconde série d'expériences, l'état du balancier étant défini par $A + \Delta A$ et $a + \Delta a$, soient y_1 et z_1 les valeurs de y et de z que fournira la résolution d'équations de la forme [XIX], et posons

[XX] $$\Delta y = y_1 - y, \quad \Delta z = z_1 - z;$$

π désignant le rapport de la circonférence au diamètre, on aura

[XXI] $$A = \frac{\Delta A}{2\frac{\Delta y}{y} + \left(\frac{\Delta y}{y}\right)^2}, \qquad \varkappa = 4\pi^2 \frac{A}{y^2}.$$

[XXII] $$a = \frac{\frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}\frac{\Delta y}{y}} \left[y \frac{\Delta a}{\Delta y} + \left(1 + \frac{\frac{1}{2}\frac{\Delta y}{y}}{1 + \frac{1}{2}\frac{\Delta y}{y}} \right) \frac{z\Delta y - y\Delta z}{\Delta y} \frac{\Delta A}{\Delta y} \right],$$
$$\frac{1}{\varkappa}\frac{d\varkappa}{d\theta} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}\frac{\Delta y}{y}} \left[\frac{1}{2}\frac{y}{A}\frac{\Delta a}{\Delta y} - \frac{z}{y} - \left(1 + \frac{\Delta y}{y}\right)\frac{\Delta z}{\Delta y} \right].$$

Le calcul des valeurs de $\varkappa$ et $\frac{d\varkappa}{d\theta}$ n'est pas indispensable; néanmoins il fournira des moyens de contrôle, lorsqu'on aura l'occasion de réitérer ces épreuves, et le point de départ de la discussion des changements que le ressort spiral pourrait éprouver avec le temps.

Cas des variations successives de A *et* a. — Les observations de la marche du chronomètre se feront, à des températures variées, dans l'une des séries au moins, la première par exemple; les deux autres pourront avoir lieu à une même température θ, cette température étant celle que l'on aura prise arbitrairement pour terme de comparaison dans la première. Les états successifs du balancier étant définis par A, a; $A + \Delta A$, a; $A + \Delta A$, $a + \Delta a$; soient y, y_1, y_2 les valeurs respectives de la durée de l'intervalle des battements à la température θ, déduites des observations, z la deuxième inconnue fournie par la résolution des équations correspondantes à la première série : nous poserons

[XXIII] $$\Delta y = y_1 - y, \quad \Delta y_1 = y_2 - y_1;$$

et l'on aura, Δa et ΔA étant successivement nuls,

$$\text{[XXIV]} \quad A = \frac{\Delta A}{2\frac{\Delta y}{y} + \left(\frac{\Delta y}{y}\right)^2}, \qquad \varkappa = \left(\frac{2\pi}{y}\right)^2 A,$$
$$a = \frac{\Delta a}{2\frac{\Delta y_1}{y_1} + \left(\frac{\Delta y_1}{y_1}\right)^2}.$$

Ce procédé ne permet pas d'obtenir $\frac{d\varkappa}{d\theta}$; mais cela est sans inconvénient dans le problème actuel. Il faudrait, pour déterminer cette inconnue, que la seconde série fût faite également à des températures variées; alors, z_1 désignant la valeur de z fournie par la seconde série, et posant

$$\text{[XXV]} \quad \Delta z = z_1 - z,$$

on aurait

$$\text{[XXVI]} \quad \frac{1}{\varkappa}\frac{d\varkappa}{d\theta} = -\frac{1}{1 + \frac{1}{2}\frac{\Delta y}{y}}\left[\frac{z}{y} + \left(1 + \frac{\Delta y}{y}\right)\frac{\Delta z}{\Delta y}\right].$$

30. *Réglage et compensation.* — *Première approximation.* Connaissant les quantités A et a, y et z relatives à l'état primitif du chronomètre, et supposant que l'on ait alors tenu compte exactement de l'état et de la situation des masses compensatrices, régulatrices et complémentaires; on aura, Y désignant l'intervalle des battements qu'on veut réaliser,

$$\text{[XXVII]} \quad \begin{aligned} \delta y &= Y - y, \\ \delta A &= A\left[2\frac{\delta y}{y} + \left(\frac{\delta y}{y}\right)^2\right], \\ \delta a &= \frac{a}{A}\delta A - 2\frac{z}{y}(A + \delta A). \end{aligned}$$

Telles sont les expressions des corrections à appliquer aux valeurs primitives de A et a, pour opérer le réglage et la compensation.

Observant que β et ι^2 se rapportent à l'état primitif du balancier, on calculera ensuite

$$\text{[XXVIII]} \quad \begin{aligned} \nu' &= \nu - (\nu + \gamma')\cos\beta, \\ Q &= [\nu' + (1 + 2\nu)\gamma']r^2 - (\gamma'' - \gamma')\frac{\iota^2}{2}, \end{aligned}$$

[XXIX]
$$\delta M = \frac{1}{Q}\left(\frac{1}{2}\gamma'\delta A - \frac{1}{4}\delta a\right),$$
$$\delta\lambda = \frac{1}{Q}\left\{\left(\upsilon' r^2 - \gamma''\frac{\iota^2}{2}\right)\delta A + \frac{1}{2}\left[(1+2\upsilon)r^2 + \frac{\iota^2}{2}\right]\delta a\right\}.$$

La valeur de δM sera la correction à appliquer aux valeurs primitives des masses compensatrices, en observant, pour plus de facilité, la condition de conserver le rayon ι du cylindre qui limite ces masses, si l'on doit opérer la correction en substituant de nouvelles masses aux anciennes.

Quant au réglage, il résultera de la formule

[XXX]
$$\delta\xi' = \frac{\delta\lambda - \delta\Sigma\mathfrak{M}'\mathfrak{R}'^2}{4M'\xi'\left(1 + \frac{1}{2}\frac{\delta\xi'}{\xi'}\right)}.$$

Pour appliquer cette formule, on disposera de la variation $\delta\Sigma\mathfrak{M}'\mathfrak{R}'^2$, en ajoutant ou supprimant une ou plusieurs paires des masses $\mathfrak{M}'$, de telle sorte que la valeur de $\delta\xi'$ rentre dans les limites de course disponible des masses M' : il est bien entendu que $\delta\xi'$ est la correction à appliquer à la valeur primitive de ξ'.

31. *Réglage et compensation. — Deuxième approximation.* Désignons actuellement par A et a les valeurs obtenues pour résultat de la première approximation, ou les quantités $A + \delta A$ et $a + \delta a$ du numéro précédent. Convenons aussi que M, ξ' et β se rapporteront également au résultat de la première approximation. Nous supposerons que, dans son nouvel état, la marche du chronomètre ait été observée à des températures variées : soient y et z les valeurs fournies par les équations de la forme [XIX] appliquées aux observations; on fera usage des formules [XXVII] pour calculer les nouvelles corrections δA et δa, que l'on doit actuellement supposer très-petites. Pour les réaliser, on calculera les corrections

[XXXI]
$$\delta\xi' = \frac{\delta A}{4M'\xi'\left(1 + \frac{1}{2}\frac{\delta\xi'}{\xi'}\right)},$$
$$\delta\cos\beta = \frac{\delta a - 2\gamma'\delta A}{4Mr^2(\upsilon + \gamma')}:$$

la première permettra d'assigner le déplacement des masses régulatrices, déplacement qui, par hypothèse, est encore réalisable; la seconde servira à opérer celui des masses compensatrices. En multipliant $\delta\cos\beta$ par r, on aurait le mouvement linéaire que les masses M doivent subir parallèlement au diamètre qui passe par l'origine fixe des lames bimétalliques et dans le sens dirigé vers cette origine. Si l'on

préfère opérer un déplacement angulaire, on pourra déduire la correction $\delta\beta$ de celle de $\cos\beta$ au moyen de tables de sinus naturels, ou de la formule

$$\text{[XXXII]} \qquad \sin\frac{1}{2}\delta\beta = -\frac{\delta\cos\beta}{2\sin\left(\beta+\frac{1}{2}\delta\beta\right)}.$$

SECONDE SOLUTION.

32. *Mode de réglage et de compensation n'exigeant pas l'étude préalable des lames bimétalliques.* — Nous considérerons la présente solution comme utilement applicable aux appareils provenant d'un atelier qui aura produit des lames bimétalliques reconnues antérieurement comme jouissant des qualités requises, de manière que l'on puisse se dispenser de les étudier préalablement au moyen des appareils optiques. Le mode que nous allons indiquer pourrait, il est vrai, être également employé à l'étude des lames; mais on le trouvera peut-être d'une application moins simple que celui que nous avons proposé n° **24**.

Nous supposerons que l'on ait effectué préalablement les opérations indiquées n° **27** en ce qui concerne les variations Δ des masses et de leurs moments d'inertie.

Trois séries d'observations de la marche du chronomètre devront être faites par des températures variées, et à chacune desquelles correspondra un état particulier du balancier.

Les second et troisième états seront, dans ce qui va suivre, comparés au premier : nous définirons ces trois états par les symboles :

$$A,\ a; \quad A+\Delta A,\ a+\Delta_1 a; \quad A+\Delta A,\ a+\Delta_2 a.$$

Comme on le voit, le moment d'inertie A ne subira qu'une seule variation; sa dérivée a en subira deux, $\Delta_1 a$ et $\Delta_2 a$, qui ne peuvent être déterminées à priori. Ces variations résulteront de celles que l'angle β, compris entre les diamètres passant par les centres des masses compensatrices et les origines fixes des lames bimétalliques, subira lui-même.

Dans la première série on fera l'angle β d'environ 90°.

Dans la seconde on réduira l'angle β à sa plus petite valeur, que nous désignerons par β_1, et l'on fera varier A suivant la formule

$$\text{[XXXIII]} \quad \Delta A = 2r^2(1+2\nu)\Delta M + \Delta . M\iota^2 + 4M'\xi'\Delta\xi'\left(1+\frac{1}{2}\frac{\Delta\xi'}{\xi'}\right) + \Delta\Sigma\mathfrak{M}'\mathfrak{R}'^2:$$

on doit observer qu'il suffira d'y faire varier le dernier terme ou les masses complémentaires, ce qui offrira plus de simplicité (*voir* n° **27** pour la signification des lettres).

Dans la troisième série, conservant la variation précédente de ΔA, on se bornera à faire varier l'angle β, en plaçant les masses compensatrices le plus près possible des extrémités libres des lames bimétalliques; nous désignerons par β_2 la valeur de l'angle β ainsi déterminée.

Désignant, comme précédemment, par y' l'intervalle des battements correspondant à la température θ', on posera, pour chacune des observations d'une même série, l'équation

$$\text{[XXXIV]} \qquad y' = y + (\theta' - \theta)\, z + (\theta' - \theta)^2 \zeta,$$

où θ est une température arbitraire, mais la même pour les trois séries. La résolution de ces équations fera connaître les valeurs de y et de z correspondantes à chacune des séries. Affectant les lettres y et z sans indices aux valeurs fournies par la première, nous distinguerons par les indices 1 et 2 celles qui correspondent à la seconde et à la troisième.

En conséquence du mode suivi dans la variation de A, on devra avoir $y_1 = y_2$. Nous poserons dès lors

$$\text{[XXXV]} \qquad \begin{aligned} \Delta y &= y_1 - y = y_2 - y, \\ \Delta_1 z &= z_1 - z, \quad \Delta_2 z = z_2 - z. \end{aligned}$$

Mais il arrivera que les deux valeurs de Δy ne s'accorderont pas tout à fait, sans que leur discordance soit inadmissible; on les combinera donc en ayant égard au degré de précision dont les quantités y_1 et y_2 peuvent jouir respectivement. On aura alors

$$\text{[XXXVI]} \qquad A = \frac{\Delta A}{2\dfrac{\Delta y}{y} + \left(\dfrac{\Delta y}{y}\right)^2}, \quad \varkappa = \left(\frac{2\pi}{y}\right)^2 A;$$

puis

$$\text{[XXXVII]} \qquad \upsilon + \gamma' = \left(1 + \frac{\dfrac{1}{2}\dfrac{\Delta y}{y}}{1 + \dfrac{1}{2}\dfrac{\Delta y}{y}}\right) \frac{z_2 - z_1}{4(M + \Delta M)\, r^2 (\cos\beta_2 - \cos\beta_1)} \frac{\Delta A}{\Delta y}.$$

(La quantité ΔM sera nulle si l'on n'a pas fait varier la masse M.) Cette équation fera connaître υ quand on aura la valeur du coefficient γ' de dilatation de l'acier. Nous devons faire remarquer à cet égard que les opérations actuelles ne peuvent pas le déterminer séparément : il faudra donc expérimenter des échantillons de l'acier avec lequel a été fabriqué le disque du balancier, après les avoir

soumis préalablement à un mode de travail du genre de celui qui a été pratiqué dans le travail de la barrette, et en déduire le coefficient de dilatation : ce coefficient ne pourra être employé dans nos calculs, que si les diverses déterminations d'où il résultera présentent un degré de concordance suffisant. Autrement on serait obligé de le déterminer par les mesures micrométriques que le mode actuel de procéder était destiné à éviter.

Calculant ensuite les quantités ΔC, $\Delta_1 a$, $\Delta_2 a$ par les formules

$$[\text{XXXVIII}] \quad \Delta C = -4\upsilon r^2 \Delta M + 2\gamma'' \Delta . M\upsilon^2 + 8\gamma' M' \Delta\xi' \left(1 + \frac{1}{2}\frac{\Delta\xi'}{\xi'}\right) + 2\gamma' \Delta \Sigma \mathfrak{M}' \mathfrak{R}'^2;$$

$$[\text{XXXIX}] \quad \begin{aligned} \Delta_1 a &= 4(\upsilon + \gamma') r^2 [M(\cos\beta_1 - \cos\beta) + \cos\beta_1 \Delta M] + \Delta C, \\ \Delta_2 a &= 4(\upsilon + \gamma') r^2 (M + \Delta M)(\cos\beta_2 - \cos\beta_1) + \Delta_1 a, \end{aligned}$$

formules d'où disparaîtront nécessairement les variations Δ qui affectent les quantités que l'on n'aura pas fait varier.

Soient actuellement

$$[\text{XL}] \quad (1) = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}\frac{\Delta y}{y}} \left[\frac{z}{y} + \left(1 + \frac{\Delta y}{y}\right)\frac{\Delta_1 z}{\Delta y}\right], \quad [1] = \left(1 + \frac{\frac{1}{2}\frac{\Delta y}{y}}{1 + \frac{1}{2}\frac{\Delta y}{y}}\right)\frac{z\Delta y - y\Delta_1 z}{y\Delta y};$$

$$[\text{XLI}] \quad (2) = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}\frac{\Delta y}{y}} \left[\frac{z}{y} + \left(1 + \frac{\Delta y}{y}\right)\frac{\Delta_2 z}{\Delta y}\right], \quad [2] = \left(1 + \frac{\frac{1}{2}\frac{\Delta y}{y}}{1 + \frac{1}{2}\frac{\Delta y}{y}}\right)\frac{z\Delta y - y\Delta_2 z}{y\Delta y};$$

on aura

$$[\text{XLII}] \quad a = A\left(\frac{\Delta_1 a}{\Delta A} + [1]\right) = A\left(\frac{\Delta_2 a}{\Delta A} + [2]\right);$$

$$[\text{XLIII}] \quad \frac{1}{x}\frac{dx}{d\theta} = \frac{\Delta_1 a}{\Delta A} - (1) = \frac{\Delta_2 a}{\Delta A} - (2).$$

Il arrivera sans doute que les deux valeurs de a ne s'accorderont pas parfaitement, non plus que celles de $\frac{1}{x}\frac{dx}{d\theta}$; on adoptera une combinaison de ces valeurs fondée sur leur degré de précision. Bien que le calcul des quantités x et $\frac{dx}{d\theta}$ ne soit par nécessaire, il est cependant convenable de l'effectuer, la concordance des valeurs de $\frac{dx}{d\theta}$ présentant un moyen de vérifier l'exactitude des opérations précédentes. Ces deux quantités pourront d'ailleurs servir de base à des recherches d'une autre nature.

Les quantités y, z, v, A, a, relatives à l'état primitif du chronomètre, étant actuellement connues, on n'aura plus qu'à appliquer les procédés décrits nos **30** et **31**, pour effectuer le réglage et la compensation.

33. *Des altérations que le réglage pratiqué isolément peut produire dans la compensation.* — Il arrive fréquemment qu'on règle un chronomètre plus ou moins exactement compensé, et pour cela on se borne à déplacer les vis régulatrices. Or il importe de savoir si l'opération qu'on se propose d'effectuer n'altérera pas sensiblement la compensation du chronomètre.

Supposons que l'intervalle y' des battements à la température θ' soit représenté par la formule

$$[\text{XLIV}] \qquad y' = y + z(\theta' - \theta),$$

et admettons que l'on connaisse approximativement les éléments A et a du balancier dans son état actuel, ce qui aura lieu si le chronomètre a été compensé et réglé par nos procédés; nous désignerons par δy l'accroissement, à la température θ, de l'intervalle y des battements, que l'on se propose de produire. On aura, pour expression de la variation de y' due à δy,

$$[\text{XLV}] \qquad \delta y' = \delta y + \left[\frac{z}{y} + \left(2\gamma' - \frac{a}{A}\right)\left(1 - \frac{\frac{1}{2}\frac{\delta y}{y}}{1 + \frac{\delta y}{y}}\right)\right]\delta y\,(\theta' - \theta);$$

en sorte que l'altération de l'intervalle des battements par chaque degré de température sera égal au coefficient de $(\theta' - \theta)$ dans cette expression. On jugera, d'après sa valeur, si l'opération sera nuisible ou non. Si, par exemple, la valeur absolue du même coefficient n'excède pas celle de z, on n'aura pas à craindre de constituer le chronomètre dans un état moins satisfaisant que le primitif : il pourra même arriver qu'il en résulte une amélioration; mais si le chronomètre était primitivement compensé, auquel cas on avait $z = 0$ et $\frac{a}{A} = \frac{1}{x}\frac{dx}{d\theta}$, le réglage aura pour effet de produire un défaut de compensation, car on n'aura probablement pas la relation $2\gamma' - \frac{1}{x}\frac{dx}{d\theta} = 0$. Quoi qu'il en soit, on sera en état d'apprécier les conséquences du réglage projeté.

DE L'INFLUENCE DES TERMES DÉPENDANTS DU CARRÉ DES VARIATIONS DE TEMPÉRATURE.

34. En formant (nº **2**) les équations de condition relatives au réglage et à la compensation, nous avons négligé les termes dépendants du carré des variations de température : cela nous a permis de présenter sous une forme relativement simple l'ensemble des opérations à effectuer pour régler et compenser un chronomètre. Nous devons actuellement examiner quelle peut être l'influence des termes négligés et rechercher les moyens de compenser ou d'affaiblir ceux de ces termes qui pourraient acquérir des valeurs sensibles.

La condition à remplir pour annuler les termes du second ordre que fournit la seconde équation (3) est

$$\frac{1}{A}\frac{d^2A}{d\theta^2} - \frac{1}{\varkappa}\frac{d^2\varkappa}{d\theta^2} = 0. \tag{97}$$

Nous supposerons que cette équation ne soit pas satisfaite, et nous rechercherons quelles variations pourront en résulter dans la marche du chronomètre, puis l'expression du changement que la dérivée seconde de A doit subir pour que les termes du second ordre disparaissent.

Dans ce qui suit, nous n'exposerons pas le détail des calculs par lesquels il nous a fallu passer ; nous nous bornerons à présenter des résultats que chacun obtiendrait sans peine, en reprenant les calculs et tenant compte des termes les plus influents de l'ordre immédiatement supérieur à celui auquel nous nous sommes arrêtés.

Reprenons l'expression théorique (2) de l'intervalle y' des battements en fonction des variations de température $\theta' - \theta$: en ayant égard à l'équation (1) et posant

$$(98)\quad \begin{gathered} a = \frac{dA}{d\theta}, \quad b = \frac{d^2A}{d\theta^2}, \\ z = \frac{1}{2}y\left(\frac{a}{A} - \frac{1}{\varkappa}\frac{d\varkappa}{d\theta}\right), \quad \zeta = \frac{1}{4}y\left(\frac{b}{A} - \frac{1}{\varkappa}\frac{d^2\varkappa}{d\theta^2}\right) - \frac{1}{4}z\left(\frac{a}{A} + 3\frac{1}{\varkappa}\frac{d\varkappa}{d\theta}\right), \end{gathered}$$

on parvient aisément à la formule

$$y' = y + z(\theta' - \theta) + \zeta(\theta' - \theta)^2. \tag{99}$$

On reconnaît encore ici que l'une des équations relatives à la compensation est $z = 0$: elle coïncide avec l'équation (5), à laquelle nous avons indiqué les moyens de satisfaire. L'autre équation est $\zeta = 0$, et l'on peut remarquer que si la

première est supposée satisfaite, la seconde s'identifie avec l'équation (97) obtenue directement.

Supposons que le chronomètre étant soumis à diverses températures θ', on ait constaté les valeurs correspondantes de y', et que de l'ensemble des observations on ait déduit les trois constantes y, z et ζ correspondantes à une valeur choisie arbitrairement θ de θ'.

La valeur numérique du terme du second ordre $\zeta(\theta' - \theta)^2$, relative au chronomètre non compensé ou mal compensé, sera connue dès qu'on assignera à θ' une valeur déterminée; ce terme peut acquérir une valeur très-sensible. Il est effectivement reconnu que la marche de beaucoup de chronomètres ne peut être représentée au moyen de formules d'interpolation, qu'en tenant compte des carrés des variations de température. Quelques chronomètres, il est vrai, ont une marche que l'on représente très-bien en ne tenant compte que de la première puissance de ces variations : la valeur de ζ est donc insensible pour ces instruments. Mais ces chronomètres ne sont pas compensés, car la valeur de z n'y est pas nulle; les termes du second ordre qui leur correspondent ne disparaissent qu'à la faveur du défaut de compensation entre les termes du premier ordre : il y a seulement destruction mutuelle des deux termes dont se compose la valeur de ζ (*).

Si l'on suppose la compensation des termes du premier ordre réalisée ou z nul, on aura, par le fait, annulé une partie des termes du second ordre, et la valeur de ζ se réduira à son premier terme : les observations de la marche du chronomètre montreront si cette quantité ζ ainsi réduite est ou non négligeable.

Au surplus, soit qu'il s'agisse d'un chronomètre compensé approximativement

---

(*) Disons en passant que si l'on devait renoncer à obtenir la compensation complète et que l'on préférât les chronomètres dont la marche varie proportionnellement à la température, à ceux dont la marche dépend à la fois de la première et de la seconde puissance des variations de température, les artistes parviendraient aisément à donner satisfaction aux nouvelles exigences. En effet, on sait fort bien comment s'y prendre pour obtenir une accélération ou une diminution de marche par rapport à l'accroissement de la température : il serait donc facile aux artistes, en appliquant les procédés de tâtonnements qui leur sont familiers, de faire varier z de manière à rendre ζ insensible. On objectera sans doute que s'ils peuvent si facilement faire varier z, ils devraient pouvoir l'annuler et compenser ainsi les termes dépendants de la première puissance des variations de température. L'objection ne serait fondée qu'en apparence; car, pour obtenir ce dernier résultat, il est nécessaire que z, s'il n'est effectivement annulé, soit au moins réduit au point d'être négligeable, tandis que le terme du second ordre étant déjà très-petit, il n'est pas nécessaire que z soit déterminé avec le même degré de précision que tout à l'heure, pour que la valeur de ζ soit rendue insensible.

Mais nous sommes loin de regarder le problème de la compensation comme insoluble.

ou non compensé, on aura, pour calculer la correction de b, l'équation

$$(100)\qquad \frac{\delta b}{A} = 6\frac{z^2}{y^2} - 4\left(\frac{a}{A}\frac{z}{y} + \frac{\zeta}{y}\right) + \left[\frac{b}{A} + 6\frac{z^2}{y^2} - 4\left(\frac{a}{A}\frac{z}{y} + \frac{\zeta}{y}\right)\right]\frac{\delta A}{A},$$

qu'il faudrait joindre aux équations (9) et (12) pour déterminer les corrections des divers éléments du balancier. La correction δA et les quantités A et a ont été obtenues quand il s'est agi de la compensation des termes du premier ordre : on voit que la seule inconnue qui reste dans le second membre de l'équation (100) est la quantité b.

Voici les formules au moyen desquelles on obtiendrait la valeur de b et celle de $\frac{1}{x}\frac{d^2x}{d\theta^2}$, en suivant la méthode que nous avons appliquée à la détermination de A et a.

Les quantités y, z et ζ répondant à l'état du balancier défini par A, a, b, soient

$$y_1 = y + \Delta y, \qquad z_1 = z + \Delta z, \qquad \zeta_1 = \zeta + \Delta\zeta,$$

les valeurs de y, z et ζ relatives à l'état défini par $A + \Delta A$, $a + \Delta a$, $b + \Delta b$, on trouve

$$(101)\qquad \begin{aligned} \frac{1}{x}\frac{d^2x}{d\theta^2} = {} & \frac{y^2}{A(y+y_1)}\frac{\Delta b}{\Delta y} - \frac{1}{y_1}\left(4\zeta_1 + 3\frac{1}{x}\frac{dx}{d\theta}z_1 + \frac{y^2 z_1}{A(y+y_1)}\frac{\Delta a}{\Delta y}\right) \\ & - \frac{y}{y_1(y+y_1)}\left[4\frac{y\Delta\zeta - \zeta\Delta y}{\Delta y} + \left(\frac{a}{A} + 3\frac{1}{x}\frac{dx}{d\theta}\right)\frac{y\Delta z - z\Delta y}{\Delta y}\right], \end{aligned}$$

$$(102)\qquad \frac{b}{A} = \frac{1}{x}\frac{d^2x}{d\theta^2} + 4\frac{\zeta}{y} + \frac{z}{y}\left(\frac{a}{A} + 3\frac{1}{x}\frac{dx}{d\theta}\right).$$

Les variations ΔA et Δa ont été données n^{os} **14** et **15**; quant à Δb, nous ne pourrons l'obtenir qu'après avoir formé l'expression analytique de la quantité b elle-même; ce qui exige que nous revenions sur la théorie des lames bimétalliques. Au reste, l'expression que nous obtiendrons permettrait de calculer directement la valeur de b avec le degré d'exactitude nécessaire; alors l'équation (102) pourrait servir au calcul de $\frac{1}{x}\frac{d^2x}{d\theta^2}$.

35. *Modifications de la théorie des lames bimétalliques pour avoir égard aux termes dépendant du carré des variations de température.* — Le classement des termes des ordres supérieurs résultera pour nous de la comparaison des valeurs numériques des coefficients γ, γ', γ'', υ et ω. En partant des valeurs $\gamma' = 0{,}000\,012\,5$, $\gamma'' = 0{,}000\,018\,5$, nous avons trouvé $\gamma = 0{,}000\,015$, dans le cas où les épaisseurs des lames partielles ont entre elles le rapport qui répond au maximum de sensi-

bilité des lames composées. La valeur de h (équation 23) se réduit dans cette circonstance à $\frac{2}{3}\frac{e}{\gamma''-\gamma'}$, et celle de v (équation 37) devient égale à $\frac{3}{2}\frac{r_0}{e}(\gamma''-\gamma')$. Soit, par exemple, $\frac{r_0}{e}=13,33$, nombre correspondant aux données de la *fig.* (4), d'où $\frac{3}{2}\frac{r_0}{e}=20$; il vient $v=0,000\,12$, et, à cause de la relation (38), $\omega=0,000\,135$. Ces nombres sont 9 à 11 fois plus grands que γ et γ'. Admettons, pour fixer les idées, que la limite des variations $\theta'-\theta$ de température par rapport à une certaine température moyenne θ soit $\pm 18°$, on aura par exemple

$$18\omega=0,002\,43,\qquad 18\gamma=0,000\,270,\qquad (18\omega)^2=0,000\,005\,9,$$

$$(18\omega)(18\gamma)=0,000\,000\,66,\qquad (18\gamma)^2=0,000\,000\,073.$$

Le second de ces nombres est 9 fois plus faible que le premier et 46 fois plus fort que le troisième, et l'on voit que ceux qui dépendent de ω^2, $\omega\gamma$ et γ^2 sont à peu près comme 9, 1 et $\frac{1}{9}$. Considérant dès lors γ, γ' et γ'' comme étant du même ordre de grandeur, et v et ω comme étant aussi d'un même ordre de grandeur, mais différent du précédent, nous conserverons les termes en v^2 et ω^2, et nous négligerons les produits de v et ω par γ, γ' et γ'', ainsi que les carrés des trois dernières quantités. Il s'ensuit que nous pourrons écrire indifféremment l'une des quantités v^2, $v\omega$ et ω^2 à la place des deux autres.

On a d'ailleurs à considérer des produits de quantités très-petites telles que les allongements des fibres par les distances de ces fibres à la surface de séparation des lames partielles, produits que nous avons négligés suivant l'usage; pareillement, nous avons négligé les variations que ces distances des fibres subissent par suite des changements de température et des actions élastiques dans le sens de ces distances ou des normales aux lames. Enfin nous avons supposé que le coefficient d'élasticité E ne varie pas avec la température. Or, si l'on observe que le rapport $\frac{u}{\rho}$ des distances dont il s'agit au rayon de courbure, n'excède guère la fraction $\frac{1}{20}$ dans les balanciers de chronomètre; si, d'autre part, on admet que le rapport $\frac{dE}{d\theta}:E$ soit de l'ordre de grandeur des coefficients de dilatation γ' et γ'', on pourra s'assurer que l'expression du rayon de courbure (40)

$$\rho=\frac{\rho_0}{1+v(\theta-\theta_0)}$$

n'est point en erreur de quantités de l'ordre de v^2 ou ω^2. Mais l'expression (41) que nous en avons déduite est affectée d'erreurs de cet ordre.

Ajoutons que si l'on se proposait de pousser l'exactitude plus loin, si l'on voulait, par exemple, tenir compte des termes de l'ordre de $\omega\gamma$, le mode d'analyse que nous avons suivi dans notre exposé de la théorie des lames bimétalliques serait insuffisant.

36. Voici maintenant l'expression de b à laquelle nous sommes parvenus en reprenant nos calculs à partir de l'équation (40), dans le but de tenir compte des termes de l'ordre de ω^2 :

$$(103)\qquad \begin{aligned} b &= 8\,\mathrm{M}r^2\nu\omega\,[2\,(1-\cos\beta)-\beta\sin\beta] \\ &\quad + 8\,mr^2\,\nu\omega\left(2+\cos\alpha-3\,\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right). \end{aligned}$$

Quant aux valeurs de A et a, nous les avons complétées en tenant compte des termes dont il s'agit; les expressions nouvelles que nous avons obtenues diffèrent extrêmement peu de celles qui ont été présentées n° **13**. Les erreurs que l'on pourrait redouter de l'emploi de ces dernières disparaîtront pour ainsi dire complétement, si la détermination de ν résulte de l'observation de la marche du chronomètre, au lieu d'être obtenue par des mesures directes.

Les expressions que nous avons employées des variations $\Delta\mathrm{A}$ et Δa en fonction des variations des éléments constitutifs du balancier, ainsi que celles de ces dernières en fonction des $\delta\mathrm{A}$ et δa, devraient, à la rigueur, être modifiées légèrement, pour tenir compte des termes négligés, puisque les valeurs de A et a ont éprouvé les changements mentionnés il y a un instant. Mais ces modifications auraient tout au plus une influence sensible sur le résultat de la première approximation; il est visible qu'elles n'en sauraient avoir sur le résultat de la seconde.

En conséquence, nous pourrons considérer les diverses expressions obtenues en négligeant les termes dépendant du carré des variations de température comme n'étant susceptibles d'être modifiées qu'à raison de l'emploi de b et des deux variations Δb et δb.

La valeur de Δb qui servirait au calcul de $\frac{1}{x}\frac{d^2x}{d\theta^2}$ et à celui de b suivant les formules (101) et (102) serait, en vertu de la composition analytique de b (103),

$$(104)\qquad \Delta b = 8\nu\omega r^2\Delta\{\mathrm{M}[2(1-\cos\beta)-\beta\sin\beta]\};$$

mais la quantité b, qui ne figure que dans les termes dépendants du carré des variations de température, n'a pas besoin d'être obtenue avec une grande exactitude, et l'on trouvera sans doute plus simple de la calculer au moyen de la formule (103), en ayant recours aux mesures directes des dimensions, poids et angles, et calculant

au besoin m à l'aide des dimensions et densités des lames bimétalliques. Si l'on voulait alors connaître $\frac{1}{x}\frac{d^2x}{d\theta^2}$, on tirerait sa valeur de l'équation (102).

Au surplus, on pourrait appliquer les deux procédés et reconnaître, par la différence des résultats, l'influence des termes des ordres supérieurs que l'on a négligés.

Supposons actuellement que l'on juge nécessaire de tenir compte des carrés des variations de température, et qu'en conséquence on ait obtenu la valeur de la correction δb au moyen de l'équation (100), on aura, par l'équation (103),

$$(105) \qquad \delta b = 8\upsilon\omega r^2 \delta \{ M [2(1-\cos\beta) - \beta\sin\beta] \}.$$

Telle est l'expression qu'il faudrait joindre à celles de δA et δa en fonctions de δM, $\delta\beta$, $\delta\xi'$ et $\delta\Sigma\mathfrak{M}'\mathfrak{R}'^2$. Il resterait à résoudre les équations pour en tirer les valeurs de ces corrections.

Nous n'effectuerons pas ce calcul, dont les résultats ne pourraient être discutés en l'absence de données numériques relatives aux propriétés physiques du ressort spiral. Nous nous bornerons à présenter les conséquences d'hypothèses auxquelles l'absence de ces données conduit naturellement.

37. On a vu (n° **34**) que, pour la plupart des chronomètres, le terme de l'expression de leur marche, qui dépend des carrés des variations de température, est loin d'être insensible, mais que la grandeur de ce terme peut tenir au défaut de compensation des termes dépendant seulement de la première puissance des variations de température, ou de ce que la quantité z (équations 98) n'est pas nulle.

Supposons qu'on ait appliqué nos formules à la compensation des termes du premier ordre, et que, par suite, on ait satisfait à la condition $z = 0$; l'expression y' de l'intervalle des battements donnera

$$\frac{y'-y}{y} = \frac{1}{4}\left(\frac{b}{A} - \frac{1}{x}\frac{d^2x}{d\theta^2}\right)(\theta'-\theta)^2,$$

en vertu de la valeur (98) de ζ.

Transformons ce résultat pour en déduire la variation du mouvement diurne μ: on aura d'abord suivant l'expression (96),

$$\frac{\delta y'}{y'} = -\frac{\delta\mu}{86400-\mu};$$

d'où, sensiblement,

$$(106) \qquad \delta\mu = -21600\left(\frac{b}{A} - \frac{1}{x}\frac{d^2x}{d\theta^2}\right)(\theta'-\theta)^2.$$

Telle sera la variation du mouvement diurne produite par les termes dépendants du carré de la variation de température, dans les chronomètres compensés d'après nos formules.

En se reportant à l'expression (103), on reconnaîtra aisément que chacun des deux termes dont se compose b est effectivement positif. Cela étant, s'il arrivait que la dérivée $\frac{d^2 x}{d\theta^2}$ fût négative, l'expression (106) montre que le mouvement diurne serait toujours moindre que celui correspondant à la température θ, et l'on ne pourrait atténuer ce défaut de compensation, qu'en réduisant autant que possible la valeur de b, sans cesser de satisfaire à l'équation de condition fournie par les termes du premier ordre. Abstraction faite des variations de M et m, on réduirait b en diminuant ω ou v, ce qui reviendrait à diminuer la sensibilité des lames bimétalliques; ce résultat s'obtiendrait en augmentant leur épaisseur.

Mais, autant qu'on en peut juger par analogie, il est présumable que $\frac{d^2 x}{d\theta^2}$ est une quantité sensiblement négligeable. Voici l'analogie qui le ferait présumer. Nous avons reconnu que les termes dépendants du carré des dilatations $\gamma'(\theta' - \theta)$ et $\gamma''(\theta' - \theta)$ ne produisent, dans les mouvements diurnes, que des variations insignifiantes; tandis que les termes dépendants des carrés ou des produits de l'ordre de $v^2(\theta' - \theta)^2$ représentent des variations sensibles, ainsi qu'on s'en convaincra dans un instant : mais ces termes sont dus aux déformations *forcées* que l'association de deux métaux différents détermine dans les lames bimétalliques. Si le balancier n'était donc composé que de pièces se dilatant librement, les termes du second ordre qui lui correspondraient seraient négligeables. Or ne pourrait-on pas supposer, sans trop s'écarter de la vérité, et vu l'état de liberté du ressort spiral, que les variations du moment x de sa force élastique ne contiennent pas de termes sensibles qui dépendent du carré des variations de température?

Admettons qu'il en soit ainsi, il nous sera facile d'obtenir une valeur approximative de $\delta\mu$, qui suffira pour faire apprécier l'ordre de grandeur auquel cette variation appartient. Pour cela, nous calculerons d'abord les valeurs de b et A : soit, pour fixer les idées, $\beta = 90°$; la parenthèse du premier terme de b (équation 103) aura pour valeur 0,43..., et l'on trouve que pour une certaine valeur de α comprise entre 138° et 139° la parenthèse du second terme devient égale à la précédente. Admettant, pour plus de simplicité, que l'amplitude des lames soit limitée à cette valeur de α, ce qui rentre dans les données de la pratique, et écrivant ω à la place de v, on aura

$$b = 0,43\ldots 8\omega^2(\mathrm{M}r^2 + mr^2).$$

D'un autre côté, la valeur de A (équation 58) peut s'écrire

$$A = 2(Mr^2 + mr'^2)(1 + \sigma),$$

σ désignant le rapport des moments d'inertie autres que $2Mr^2$ et $2mr^2$ à la somme de ceux-ci : σ sera une fraction telle que $\frac{1}{4}, \frac{1}{5} \cdots$ On aura donc

$$\frac{b}{A} = 1,72 \frac{\omega^2}{1+\sigma}.$$

Soit $\sigma = \frac{1}{4}$, et $\omega = 0,000\,135$, comme au n° **35**; la valeur de $\frac{b}{A}$ sera 0,000 000 025, et l'expression (106), réduite à son premier terme, deviendra

$$\delta\mu = -0^s,00054\,(\theta' - \theta)^2.$$

Pour un écart $\theta' - \theta = \pm 18^\circ$, on aurait

$$\delta\mu = -0^s,17.$$

Les lames bimétalliques auxquelles répond ce nombre ont 1 millimètre d'épaisseur : or, comme la valeur de ω est à peu près en raison inverse de l'épaisseur e des lames, on voit que s'il s'agissait d'un balancier dont les lames n'auraient que $\frac{1}{2}$ millimètre d'épaisseur, le rayon restant le même, la valeur de $\delta\mu$ pour ce balancier serait quadruple; elle s'élèverait à $-0^s,7$.

Il est donc évident que si, comme cela est présumable, la valeur de $\frac{1}{x}\frac{d^2x}{d\theta^2}$ est très-faible, il y aura convenance à diminuer la sensibilité des lames bimétalliques, autant que possible, et cela, en augmentant simplement leur épaisseur : il en résulterait des avantages notables relativement à la compensation.

Si nous voulons actuellement supposer la dérivée $\frac{d^2x}{d\theta^2}$ positive, la valeur (106) de $\delta\mu$ pourra être réduite à zéro. C'est dans ce cas seulement que l'on pourrait songer à faire usage de l'équation (105) : or, à moins que la valeur de δb fournie par l'équation (100) ne soit effectivement très-faible, il n'est guère présumable que l'équation (105) puisse être satisfaite par des valeurs admissibles de δM et $\delta\beta$: le facteur du second ordre $\upsilon\omega$ rend presque insensible l'effet de telles variations. Nous avons vu d'ailleurs qu'il importe que β reste voisin de 90°, en sorte que la variation de M sera seule praticable. Si cette variation est inefficace, le seul moyen de satisfaire à l'équation (105) serait alors d'augmenter la valeur du facteur $\omega\upsilon$ ou la sensibilité des lames bimétalliques en diminuant leur épaisseur.

38. En résumé, la compensation des termes dépendants de la première puissance des variations de température étant obtenue par nos formules, la compensation des termes des ordres supérieurs présentera trois cas : la dérivée seconde $\frac{d^2x}{d\theta^2}$ sera négative, nulle ou positive. Dans les deux premiers cas, la compensation des termes du second ordre ne pourra être effectuée rigoureusement ; mais on réduirait les variations de marche du chronomètre dépendantes des termes du second ordre, en employant des lames bimétalliques moins sensibles, et dans le second cas les variations subsistantes pourraient être rendues négligeables. Dans le troisième cas, les variations de marche dues aux termes du second ordre seraient annulées ou rendues négligeables, moyennant un accroissement de sensibilité des lames bimétalliques. Le second cas paraît être celui que doivent présenter les ressorts spiraux les mieux établis.

Il sera donc très-important de calculer, dans tous les cas, les valeurs de $\frac{1}{x}\frac{d^2x}{d\theta^2}$ et de $\frac{b}{A}$ au moyen des données fournies par l'observation de la marche des chronomètres soumis à des températures variées et modifiés dans les éléments constitutifs de leurs balanciers. On pourra dès lors s'assurer s'il est nécessaire ou non de modifier la sensibilité des lames bimétalliques dans un sens déterminé, pour rendre négligeables les altérations de marche dues aux carrés des variations de température. Ces modifications reviendraient évidemment au changement même du balancier. Des études du même genre, faites sur plusieurs chronomètres, apprendraient si la valeur de $\frac{1}{x}\frac{d^2x}{d\theta^2}$ est ou non constante, si elle est généralement négative, nulle ou positive. On trouverait sans doute que la valeur de $\frac{b}{A}$ varie beaucoup, les artistes ne s'assujettissant pas à des règles communes relativement à la sensibilité des lames bimétalliques.

Les recherches ainsi poursuivies auraient pour résultat de fixer les idées des constructeurs sur des points encore obscurs, et la facilité de réaliser la compensation y gagnerait assurément.

39. *Des formules à l'aide desquelles on peut parvenir à représenter la marche des chronomètres plus ou moins imparfaitement compensés.* — La théorie d'un phénomène quelconque a pour objet la détermination des relations qui existent entre certaines fonctions et les variables dont elles dépendent. Dans l'état actuel de nos connaissances, il n'est pas toujours possible d'obtenir ces relations. Cependant, il arrive qu'il soit nécessaire de connaître non plus les expressions analytiques de ces fonctions, mais les valeurs numériques de leurs variations entre des limites

déterminées des valeurs des variables : on peut généralement résoudre le problème à l'aide du théorème de Taylor; il est seulement nécessaire qu'entre ces limites la fonction ne soit pas sujette à des variations brusques, telles que celles qui résulteraient d'un changement d'état des corps, etc. Dans l'ignorance où l'on pourrait se trouver à cet égard, il convient toujours de tenter l'application du théorème; car la comparaison des résultats obtenus, avec des observations correspondantes à des valeurs suffisamment rapprochées des variables, fera toujours connaître à posteriori si l'on est ou non dans le cas d'exception dont il s'agit.

Soient, par exemple, y' une fonction de deux variables t' et θ', y la valeur de la fonction correspondante à des valeurs particulières t et θ de t' et θ'; on aura

$$(107)\quad \begin{aligned} y' = y &+ \frac{dy}{dt}(t'-t) + \frac{dy}{d\theta}(\theta'-\theta) + \frac{d^2y}{dt^2}\frac{(t'-t)^2}{1.2} + \frac{d^2y}{dt\,d\theta}\frac{(t'-t)}{1}\frac{(\theta'-\theta)}{1} \\ &+ \frac{d^2y}{d\theta^2}\frac{(\theta'-\theta)^2}{1.2} + \ldots. \end{aligned}$$

On ne peut songer à obtenir directement les dérivées de la fonction y par rapport à t et θ que renferme cette expression, puisque la forme de la fonction y est, par hypothèse, inconnue. Alors on est conduit à emprunter à l'observation les données nécessaires à la détermination de leurs valeurs numériques. Admettons donc que l'observation ait fait connaître plusieurs systèmes de valeurs correspondantes de y', t' et θ' : l'équation précédente étant appliquée à chacun de ces systèmes, on aura autant d'équations que d'observations, et qui serviraient à obtenir autant d'inconnues, s'il n'était nécessaire de faire la part des erreurs des observations, et si, d'ailleurs, les termes qui dépendent des coefficients non déterminés étaient négligeables. Voici donc comment on pourra procéder :

Les valeurs de t et θ étant arbitraires, il conviendra de les prendre vers le milieu des intervalles compris entre les limites assignées de ces variables, ou mieux de prendre pour t et θ les moyennes respectives des valeurs observées de t' et θ'.

Ayant écrit les équations particulières à chacune des observations, on emploiera à l'élimination successive des inconnues une méthode dans laquelle le nombre des équations ne soit point modifié, et qui permette, après chaque élimination, d'assigner les valeurs numériques des différences entre la fonction y' et la somme des termes du second membre correspondante aux inconnues éliminées. Quand on sera parvenu à des différences ou restes d'un ordre de grandeur tel qu'on puisse les imputer aux erreurs des observations, les calculs d'élimination seront terminés et l'on sera certain de n'avoir négligé aucun terme important de la série.

Ceci suppose que l'on fasse abstraction des poids des observations, et qu'en conséquence les parties connues des équations ne soient point *individuellement* l'objet de multiplications ou divisions; cette supposition est admissible dans le

problème des chronomètres : on peut toujours, en effet, obtenir leur état à l'aide d'une bonne pendule, quand les observations astronomiques font accidentellement défaut.

Considérons en particulier le cas des chronomètres. L'étude de la marche de ces instruments, faite par divers officiers de marine, montre qu'effectivement la formule (107) peut servir à la représenter pendant tout le cours d'une année, sans qu'il soit nécessaire de faire usage des puissances et produits du temps et de la température qui excèdent le second degré. Désignant les temps par t' et les températures par θ', la formule (107), limitée aux termes qui s'y trouvent, est donc applicable à la marche de ces instruments pendant une année; elle le serait sans doute à des intervalles beaucoup plus étendus, puisque, dans les études que nous venons de rappeler, on n'a pas jugé nécessaire d'avoir égard au terme dépendant du carré du temps (*).

L'emploi de chacun des termes de la formule (107) est facile à justifier. On sait, par exemple, que les huiles s'épaississent avec le temps; le frottement des pivots augmente lui-même, au moins jusqu'à une certaine limite; ces deux causes réunies ont pour effet d'accélérer la marche des chronomètres (nous avons fait connaître l'expression théorique de ce changement de marche en fonction de la résistance des pivots et des amplitudes) : il n'est donc pas étonnant que la valeur de y' contienne des termes en $(t'-t)$ et $(t'-t)^2$. Nous n'avons rien à ajouter à ce qui a été dit dans les numéros précédents au sujet des termes en $(\theta'-\theta)$ et $(\theta'-\theta)^2$. Il nous reste à considérer le terme affecté du produit $(t'-t)(\theta'-\theta)$. Nous venons de rappeler que la fluidité des huiles varie avec le temps; or, chacun sait que la fluidité varie aussi avec la température. Si donc f désigne l'effet de cette fluidité au bout du temps t et à la température θ, on aura, à l'époque t', $f+\frac{df}{dt}(t'-t)$; mais, f variant aussi avec θ', il faudra remplacer ici f par $f+\frac{df}{d\theta}(\theta'-\theta)$, ce qui donnera $f+\frac{df}{dt}(t'-t)+\frac{df}{d\theta}(\theta'-\theta)+\frac{d^2f}{dt\,d\theta}(t'-t)(\theta'-\theta)$. Ainsi se

(*) Nous avons admis, dans la première partie de ce Mémoire, que la résistance de l'air est proportionnelle au carré de la vitesse ; et nous avons trouvé qu'alors la résistance de l'air n'affecterait en rien la marche des chronomètres. Si cette hypothèse est inexacte, le théorème de Taylor permettra de le reconnaître : il suffirait de compléter l'expression (107) par les termes suivants

$$\frac{dy}{dh}(h'-h)+\frac{d^2y}{dh^2}\frac{(h'-h)^2}{1.2}+\frac{d^2y}{dh\,dt}\frac{(h'-h)}{1}\frac{(t'-t)}{1}+\frac{d^2y}{dh\,d\theta}\frac{(h'-h)}{1}\frac{(\theta'-\theta)}{1},$$

où $h'-h$ désigne la variation de hauteur du baromètre. La résolution d'équations ainsi complétées montrerait si les coefficients des nouveaux termes sont sensibles ou non.

trouve justifié l'emploi d'un terme dépendant du produit des variations de la température et du temps.

M. Lieussou, ingénieur hydrographe, dans ses *Recherches sur la marche des chronomètres*, a tenu compte des termes proportionnels au temps et aux deux premières puissances de la température ; il a même indiqué l'opportunité d'avoir égard, dans certains cas, aux termes dépendants du carré du temps ; mais il a omis de tenir compte du terme dépendant du produit du temps et de la température. Cette omission a été réparée par M. le capitaine Pagel, dans un Mémoire publié par l'Administration de la Marine sous le titre de *Recherches chronométriques* (V[e] Cahier). Les deux auteurs que nous venons de citer ont suivi une voie que nous ne pouvons nous empêcher de critiquer : ils ont mis la constante et les termes qui dépendent seulement de la température, sous la forme d'un binôme composé d'une constante et d'un terme affecté du carré d'une certaine différence de température. Soit donc

(108) $$y' = y + z(\theta' - \theta) + \zeta(\theta' - \theta)^2$$

l'expression de y' réduite aux termes dépendants de la température seulement ; il est clair que l'on est en droit d'écrire le second membre sous la forme

(109) $$y' = p + \zeta(\Theta - \theta')^2;$$

il suffit, pour cela, de poser

(110) $$p = y - \frac{z^2}{4\zeta}, \qquad \Theta = \theta - \frac{z}{2\zeta}.$$

Mais cette forme a un grave inconvénient, celui de montrer les faits sous un faux jour, dans les cas où ils présentent le moins de complication. Considérons en effet un chronomètre pour lequel la variation de marche soit sensiblement proportionnelle à celle de la température, et pour lequel en conséquence ζ sera une quantité très-petite et négligeable ; la valeur (108) de y' se réduira à ses deux premiers termes et offrira l'interprétation la plus simple. Or z ne pouvant être nul dans ce cas, car alors le chronomètre serait très-exactement compensé, la constante p et, ce qui est plus grave, la température fictive Θ dite de *réglage*, acquerront des valeurs démesurées et qui seraient infinies si ζ se trouvait être exactement nul.

Ainsi, les chronomètres dont l'usage serait le plus commode, ceux dont la marche varierait comme la température, sont ceux que les formules des auteurs que nous critiquons feraient figurer comme des appareils tout à fait anormaux. Or nous avons trouvé, dans les publications du premier de ces auteurs, des chronomètres qui, sans être réputés défectueux, sont précisément dans ce cas.

Enfin l'introduction de la température fictive Θ, qui se présente comme une

inconnue, exige des développements particuliers dans la détermination des coefficients de l'expression de y'.

Nous sommes donc fondés à conclure que la forme (107) résultant de la considération du théorème de Taylor, doit être substituée à celle (109) dans la recherche des coefficients; la première se prêtera à l'emploi des méthodes connues de résolution des équations de condition.

Il est peut-être bon d'indiquer pourquoi MM. Lieussou et Pagel ont adopté la forme que nous critiquons. La lecture des Mémoires de ces auteurs manifeste leur constante préoccupation de trouver une *loi*, quand il n'y avait pas lieu d'en rechercher une. La solution du problème était indiquée par le théorème de Taylor: si M. Lieussou y avait eu recours, il n'aurait eu besoin de se livrer à aucune recherche autre que celle des coefficients, et il n'aurait pas manqué de reconnaître la nécessité de tenir compte du terme que M. Pagel a su conserver.

La vraie recherche de la loi du phénomène consistait, non à trouver les valeurs numériques des coefficients, mais bien leurs expressions analytiques; c'est celle que nous avons entreprise à l'égard des termes qui se rapportent à la compensation.

Malgré les imperfections que nous venons de signaler dans les travaux de MM. Lieussou et Pagel, nous devons rendre justice aux louables efforts qu'ils ont faits pour rétablir dans les habitudes des navigateurs, les usages des observatoires où l'on détermine soigneusement les erreurs des instruments, avant d'utiliser leurs indications. On avait déjà fait un grand pas en tenant compte des erreurs des instruments d'optique; il restait à appliquer les corrections que nécessitent les appareils servant à la mesure du temps. M. Lieussou, en recommandant avec insistance à nos officiers de marine l'emploi des méthodes appliquées par les illustres navigateurs qui ont les premiers fait usage de chronomètres, a rendu à la navigation un service qu'on ne saurait méconnaître.

Le but que nous nous sommes proposé dans ce Mémoire est précisément d'éviter la nécessité d'effectuer les pénibles calculs que réclame l'état encore imparfait des chronomètres, tant pour en déterminer la marche avant le départ, que pour obtenir les corrections à appliquer pendant la durée des voyages, corrections qui exigent l'observation soutenue des températures.

Nous n'espérons certainement pas affranchir les observateurs de tout souci à l'égard de la marche des chronomètres; mais nous osons croire qu'en suivant nos procédés, on arrivera à réaliser la compensation assez exactement, pour qu'il ne reste plus à effectuer que des calculs insignifiants, dans les usages ordinaires de ces instruments.

SUR

LES INÉGALITÉS A LONGUES PÉRIODES DU MOUVEMENT DES PLANÈTES,

PAR V. PUISEUX.

PREMIÈRE SECTION.

EXPOSÉ DE LA MÉTHODE DE M. CAUCHY POUR LE CALCUL DES INÉGALITÉS A LONGUES PÉRIODES DES LONGITUDES MOYENNES DES PLANÈTES (*).

Formules préliminaires.

Il conviendra, pour plus de clarté, de rappeler d'abord quelques formules dont il est fait usage dans le Mémoire de M. Cauchy et qui pourraient n'être pas familières à tous les lecteurs.

I. Soit $f(z)$ une fonction de la variable imaginaire z qu'on suppose développable en une série ordonnée, suivant les puissances entières, positives et négatives de z, en sorte qu'on ait

$$f(z) = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \ldots + A_{-1} z^{-1} + A_{-2} z^{-2} + \ldots.$$

Posons

$$z = re^{p\sqrt{-1}},$$

r désignant le module et p l'argument de la quantité imaginaire z : si, après avoir multiplié les deux membres de l'équation (1) par $\frac{1}{2\pi} z^{-n} dp$, nous les intégrons en faisant varier p de $-\pi$ à $+\pi$ et laissant r constant, nous trouverons la

(*) La méthode dont il s'agit se trouve expliquée dans les Notes annexées à un Rapport sur un Mémoire de M. Le Verrier (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, tome XX). La concision de ces Notes ayant arrêté quelques lecteurs, M. le Directeur de l'Observatoire a pensé qu'on ferait une chose utile en les reproduisant avec quelques développements et quelques changements de notation propres à lever les difficultés qu'on y a rencontrées. Tel est le but que j'ai essayé d'atteindre dans cette première Section, où l'on voudra bien ne voir qu'un commentaire sur le travail de M. Cauchy.

formule

(1) $$A_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(z)\, z^{-n}\, dp,$$

dans laquelle n est un nombre entier quelconque, positif ou négatif.

II. Désignons par $\mathcal{E}_l$ le coefficient de z^l dans le développement de l'expression $e^{\gamma\left(z-\frac{1}{z}\right)}$, suivant les puissances entières, positives ou négatives de z, en sorte qu'on ait

(2) $$e^{\gamma\left(z-\frac{1}{z}\right)} = \Sigma_l\, \mathcal{E}_l\, z^l,$$

la somme désignée par Σ_l s'étendant à toutes les valeurs entières de l, de $-\infty$ à $+\infty$. On obtiendra l'expression d'un coefficient quelconque $\mathcal{E}_l$ en multipliant membre à membre les deux équations

$$e^{\gamma z} = 1 + \frac{\gamma}{1} z + \frac{\gamma^2}{1.2} z^2 + \ldots, \qquad e^{-\frac{\gamma}{z}} = 1 - \frac{\gamma}{1} z^{-1} + \frac{\gamma^2}{1.2} z^{-2} + \ldots.$$

on trouvera ainsi, en désignant par n un nombre positif, les deux formules

$$\mathcal{E}_n = \frac{\gamma^n}{1.2\ldots n}\left(1 - \frac{\gamma^2}{1\,(n+1)} + \frac{\gamma^4}{1.2\,(n+1)(n+2)} - \ldots\right),$$

$$\mathcal{E}_{-n} = (-1)^n \frac{\gamma^n}{1.2\ldots n}\left(1 - \frac{\gamma^2}{1.(n+1)} + \frac{\gamma^4}{1\,2.(n+1)(n+2)} - \ldots\right) = (-1)^n\, \mathcal{E}_n.$$

Il existe entre les valeurs de $\mathcal{E}_l$ correspondantes à trois valeurs consécutives de l une relation propre à faciliter le calcul de ces quantités. Pour l'obtenir, différentions l'équation (2) par rapport à z; il viendra

(3) $$\gamma\left(1 + \frac{1}{z^2}\right) e^{\gamma\left(z-\frac{1}{z}\right)} = \Sigma_l\, l\,\mathcal{E}_l\, z^{l-1},$$

ou bien

$$\gamma\left(1 + \frac{1}{z^2}\right) \Sigma_l\, \mathcal{E}_l\, z^l = \Sigma_l\, l\,\mathcal{E}_l\, z^{l-1}.$$

On en déduit, en égalant les coefficients de z^l dans les deux membres,

$$\gamma\,(\mathcal{E}_l + \mathcal{E}_{l+2}) = (l+1)\,\mathcal{E}_{l+1},$$

ou

(4) $$\mathcal{E}_l + \mathcal{E}_{l+2} = \frac{l+1}{\gamma}\,\mathcal{E}_{l+1}.$$

Ajoutons encore une remarque qui nous sera utile : multiplions les deux membres de l'équation (3) par $\frac{\varepsilon z}{2\gamma}$ et retranchons-la de l'équation (2); il viendra

$$e^{\gamma\left(z-\frac{1}{z}\right)}\left[1-\frac{\varepsilon}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right]=\Sigma_l\left(1-\frac{\varepsilon l}{2\gamma}\right)\mathcal{E}_l\, z^l.$$

Si donc on attribue à γ la valeur particulière

$$\gamma=\frac{n\varepsilon}{2},$$

on aura, pour ce cas,

$$(5)\qquad e^{\gamma\left(z-\frac{1}{z}\right)}\left[1-\frac{\varepsilon}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right]=\Sigma_l\left(1-\frac{l}{n}\right)\mathcal{E}_l\, z^l.$$

III. Désignons par H_n le coefficient de x^n dans le développement du produit

$$\left(1-\frac{\alpha}{x}\right)^{-s}\left(1-\frac{x}{\beta}\right)^{-t},$$

suivant les puissances entières, positives et négatives de x : on peut écrire ce produit

$$\left(1-\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-s}\left(1-\frac{x}{\beta}\right)^{-t}\left(1-\frac{1}{1-\frac{\alpha}{\beta}}\cdot\frac{1-\frac{x}{\beta}}{\frac{x}{\alpha}}\right)^{-s},$$

ou bien, en développant le dernier facteur par la formule du binôme,

$$\begin{aligned}&\left(1-\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-s}\left(1-\frac{x}{\beta}\right)^{-t}\left[1+\frac{s}{1}\left(1-\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-1}\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{-1}\left(1-\frac{x}{\beta}\right)\right.\\&\qquad\left.+\frac{s(s+1)}{1.2}\left(1-\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-2}\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{-2}\left(1-\frac{x}{\beta}\right)^{2}+\dots\right]\\&=\sum_{m=0}^{m=\infty}\frac{s(s+1)\dots(s+m-1)}{1.2\dots m}\left(1-\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-(s+m)}\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{-m}\left(1-\frac{x}{\beta}\right)^{m-t}.\end{aligned}$$

Mais dans l'expression $\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{-m}\left(1-\frac{x}{\beta}\right)^{m-t}$ le coefficient de x^n est, en supposant n positif,

$$\begin{aligned}&(-1)^{m+n}\frac{(m-t)(m-t-1)\dots(-t-n+1)}{1.2\dots(n+m)}\,\frac{\alpha^m}{\beta^{n+m}}\\&=(-1)^m\frac{t(t+1)\dots(t+n-1)}{1.2\dots n}\cdot\frac{(1-t)(2-t)\dots(m-t)}{(n+1)(n+2)\dots(n+m)}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^m\beta^{-n}.\end{aligned}$$

Le coefficient H_n sera donc donné, dans le cas de n positif, par la formule

$$H_n = \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{s(s+1)\ldots(s+m-1)}{1.2\ldots m}\left(1-\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-(s+m)}$$
$$\times(-1)^m \frac{t(t+1)\ldots(t+n-1)}{1.2\ldots n}\cdot\frac{(1-t)(2-t)\ldots(m-t)}{(n+1)(n+2)\ldots(n+m)}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^m \beta^{-n}$$

que l'on peut écrire

$$H_n = \frac{t(t+1)\ldots(t+n-1)}{1.2\ldots n}\beta^{-n}\left(1-\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-s}$$
$$\times\sum_{m=0}^{m=\infty}(-1)^m\frac{s(s+1)\ldots(s+m-1)}{1.2\ldots m}\cdot\frac{(1-t)(2-t)\ldots(m-t)}{(n+1)(n+2)\ldots(n+m)}\left(\frac{\frac{\alpha}{\beta}}{1-\frac{\alpha}{\beta}}\right)^m.$$

Désignons maintenant par $\mathfrak{A}_n$ ce que devient H_n, lorsqu'on suppose

$$s = t = \frac{1}{2}, \qquad \alpha = \frac{1}{\beta} = a,$$

en sorte qu'on ait

$$(1-ax)^{-\frac{1}{2}}(1-ax^{-1})^{-\frac{1}{2}} = \mathfrak{A}_0 + \mathfrak{A}_1 x + \mathfrak{A}_2 x^2 + \ldots + \mathfrak{A}_{-1}x^{-1} + \mathfrak{A}_{-2}x^{-2} + \ldots :$$

la formule précédente nous donnera, pour une valeur positive de n,

$$\mathfrak{A}_n = \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots(2n)}\frac{a^n}{\sqrt{1-a^2}}$$
$$\times\sum_{m=0}^{m=\infty}(-1)^m\frac{1.3\ldots(2m-1)}{2.4\ldots(2m)}\cdot\frac{1.3\ldots(2m-1)}{(2n+2)(2n+4)\ldots(2n+2m)}\left(\frac{a^2}{1-a^2}\right)^m,$$

ou bien, en mettant en évidence les différents termes de la somme Σ,

$$\mathfrak{A}_n = \frac{1.2\ldots(2n-1)}{2.4\ldots(2n)}\frac{a^n}{\sqrt{1-a^2}}\left[1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2n+2}\frac{a^2}{1-a^2}\right.$$
$$\left.+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1.3}{(2n+2)(2n+4)}\left(\frac{a^2}{1-a^2}\right)^2-\ldots\right].$$

On a d'ailleurs

$$\mathfrak{A}_{-n} = \mathfrak{A}_n,$$

puisque l'expression $(1-ax)^{-\frac{1}{2}}(1-ax^{-1})^{-\frac{1}{2}}$ ne change pas, quand on y change x en $\frac{1}{x}$.

Calcul d'une inégalité à longue période.

IV. Soient m et m' les masses de deux planètes, celle du Soleil étant prise pour unité : soient a et a' les demi grands axes de leurs orbites, μ et μ' leurs vitesses angulaires moyennes, en sorte qu'on ait les deux équations

$$\mu=\sqrt{\frac{f(1+m)}{a^3}},\qquad \mu'=\sqrt{\frac{f(1+m')}{a'^3}},$$

où f désigne l'attraction de l'unité de masse sur l'unité de masse à l'unité de distance. Nommons en outre ι la distance mutuelle des deux planètes, r et r' les rayons vecteurs menés du Soleil à ces deux astres, δ l'angle compris entre r et r' : la fonction perturbatrice qu'il y aura lieu de considérer dans le mouvement de la planète m troublée par m' sera

$$R=-\frac{fm'}{\iota}+\frac{fm'r\cos\delta}{r'^2},$$

et si T, T' désignent les deux anomalies moyennes, les variations du demi grand axe a seront déterminées par l'équation

$$\frac{da}{dt}=-\frac{2}{\mu a}\frac{dR}{dT}.$$

On en déduit

$$\frac{d\mu}{dt}=\frac{3}{a^2}\frac{dR}{dT},$$

d'où, en intégrant deux fois de suite,

$$\mu=3\int\frac{1}{a^2}\frac{dR}{dT}dt,\qquad \int\mu\,dt=3\int dt\int\frac{1}{a^2}\frac{dR}{dT}dt.$$

La longitude moyenne de la planète m a, comme on sait, pour expression

$$\int\mu\,dt+\lambda,$$

λ désignant la longitude moyenne de l'époque. Mais c'est dans la portion $\int\mu\,dt$ que se trouvent les parties les plus considérables des inégalités à longues périodes ; car la double intégration indiquée au second membre de la dernière équation

élève au carré les petits diviséurs qui rendent ces inégalités sensibles. Nous nous bornerons donc, dans cette première Section, à chercher ce que produit dans $\int \mu\, dt$ un terme à longue période de R.

Supposons la fonction R développée suivant les puissances des deux exponentielles $e^{T\sqrt{-1}}$, $e^{T'\sqrt{-1}}$ et soit $-\mathrm{f}m' C_{n',-n}\, e^{(n'T'-nT)\sqrt{-1}}$ un terme de ce développement dans lequel la différence $n'\mu' - n\mu$ soit très-petite en comparaison de μ et de μ'. Un pareil terme introduira dans $\int \mu dt$, à la première approximation, la partie

$$-\frac{3\mathrm{f}m' n C_{n',-n}}{(n'\mu'-n\mu)^2 a^2} e^{(n'T'-nT)\sqrt{-1}}\sqrt{-1},$$

ou bien, en remplaçant f par la quantité égale $\frac{\mu^2 a^3}{1+m}$,

$$-\frac{3m'}{1+m}\left(\frac{\mu}{n'\mu'-n\mu}\right)^2 na\, C_{n',-n}\, e^{(n'T'-nT)\sqrt{-1}}\sqrt{-1}.$$

Le coefficient $C_{n',-n}$ est un nombre imaginaire qu'on peut mettre sous la forme $\mathfrak{M}\, e^{\Psi\sqrt{-1}}$, et alors l'expression précédente devient

$$-\frac{3m'}{1+m}\left(\frac{\mu}{n'\mu'-n\mu}\right)^2 na\,\mathfrak{M}\, e^{(n'T'-nT+\Psi)\sqrt{-1}}\sqrt{-1}.$$

D'ailleurs $\int \mu\, dt$ contiendra un autre terme de même argument, qui ne différera du précédent que par le signe de $\sqrt{-1}$, savoir

$$\frac{3m'}{1+m}\left(\frac{\mu}{n'\mu'-n\mu}\right)^2 na\,\mathfrak{M}\, e^{-(n'T'-nT+\Psi)\sqrt{-1}}\sqrt{-1}.$$

En ajoutant ces deux termes, on aura, pour l'inégalité de $\int \mu dt$ dont la période est $\frac{2\pi}{n'\mu'-n\mu}$, l'expression

$$\frac{6m'}{1+m}\left(\frac{\mu}{n'\mu'-n\mu}\right)^2 na\,\mathfrak{M}\sin(n'T'-nT+\Psi):$$

si donc on pose

$$\frac{648000}{\pi}\cdot\frac{6nm'}{1+m}\left(\frac{\mu}{n'\mu'-n\mu}\right)^2 a = \mathrm{T},$$

le produit

$$\Upsilon \mathfrak{M} \sin(n'T' - nT + \Psi)$$

sera la valeur, en secondes d'arc, de l'inégalité cherchée.

Regardons les excentricités et l'inclinaison mutuelle des orbites des deux planètes comme de petites quantités du premier ordre; on sait que le module $\mathfrak{M}$ du coefficient $C_{n',-n}$ sera d'un ordre marqué par la valeur numérique de la différence $n' - n$. Mais si l'on considère séparément les deux parties $-\frac{fm'}{\iota}$ et $\frac{fm' r \cos\delta}{r'^2}$, on reconnaîtra aisément que l'ordre du terme en $e^{(n'T'-nT)\sqrt{-1}}$ dans le développement de $\frac{fm' r \cos\delta}{r'^2}$ est égal à $n + n' - 2$ et par conséquent de beaucoup supérieur à la valeur numérique de $n' - n$, lorsque les nombres n et n' sont considérables. Il suit de là que dans la recherche des inégalités à longues périodes on pourra, sans erreur sensible, réduire la fonction perturbatrice R à la partie $-\frac{fm'}{\iota}$.

D'après cela, si l'on désigne par $A_{n',-n}$ le coefficient de $e^{(n'T'-nT)\sqrt{-1}}$ dans le développement de $\frac{1}{\iota}$, et qu'on mette ce nombre imaginaire sous la forme $\mathfrak{N} e^{\Omega\sqrt{-1}}$ (*), on pourra, sans erreur sensible, prendre la quantité

$$\Upsilon \mathfrak{N} \sin(n'T' - nT + \Omega)$$

pour l'expression en secondes d'arc de l'inégalité dont la période est $\frac{2\pi}{n'\mu' - n\mu}$.

Ajoutons que si l'on veut obtenir le coefficient de cette inégalité avec une erreur moindre qu'un nombre donné σ de secondes, on devra calculer le module $\mathfrak{N}$ de $A_{n',-n}$ avec assez de précision, pour que l'erreur de ce module soit inférieure au nombre $\varkappa$ déterminé par l'équation

$$\Upsilon \varkappa = \sigma.$$

On est donc ramené à calculer le coefficient $A_{n',-n}$ de $e^{(n'T'-nT)\sqrt{-1}}$ dans le développement de $\frac{1}{\iota}$, de façon que l'erreur commise sur le module de $A_{n',-n}$ soit inférieure à un nombre donné $\varkappa$.

V. Nommons ψ et ψ' les anomalies excentriques des deux planètes, et exprimons d'abord ι^2 en fonction de ces deux variables. Pour cela, appelons ε et ε' les excen-

(*) Le nombre désigné ici par $\mathfrak{N}$ est la moitié de celui qui est désigné par la même lettre dans les Notes de M. Cauchy.

tricités des deux orbites, τ et τ' les distances angulaires des deux périhélies à l'intersection des plans des orbites, I l'inclinaison mutuelle de ces plans, ν et ν' les anomalies vraies des deux astres. On aura

$$\cos\delta = \cos(\nu+\tau)\cos(\nu'+\tau') + \sin(\nu+\tau)\sin(\nu'+\tau')\cos I,$$

ou bien

$$(6)\qquad \cos\delta = M\cos\nu\cos\nu' + N\sin\nu\sin\nu' + P\sin\nu\cos\nu' + Q\cos\nu\sin\nu',$$

M, N, P, Q étant déterminés par les équations

$$\frac{1}{2}(M+N) = \cos^2\frac{I}{2}\cos(\tau-\tau'),\qquad \frac{1}{2}(M-N) = \sin^2\frac{I}{2}\cos(\tau+\tau'),$$
$$\frac{1}{2}(P+Q) = -\sin^2\frac{I}{2}\sin(\tau+\tau'),\qquad \frac{1}{2}(P-Q) = -\cos^2\frac{I}{2}\sin(\tau-\tau'),$$

et comme on a

$$\iota^2 = r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\delta,$$

il s'ensuivra

$$\iota^2 = r^2 + r'^2 - 2Mr\cos\nu\,.\,r'\cos\nu' - 2Nr\sin\nu\,.\,r'\sin\nu'$$
$$- 2Pr\sin\nu\,.\,r'\cos\nu' - 2Qr\cos\nu\,.\,r'\sin\nu'.$$

Si donc on a égard aux formules connues

$$r = a(1-\varepsilon\cos\psi),\qquad r\cos\nu = a(\cos\psi-\varepsilon),\qquad r\sin\nu = a\sqrt{1-\varepsilon^2}\sin\psi,$$
$$r' = a'(1-\varepsilon'\cos\psi'),\qquad r'\cos\nu' = a'(\cos\psi'-\varepsilon'),\qquad r'\sin\nu' = a'\sqrt{1-\varepsilon'^2}\sin\psi',$$

et qu'on pose, pour abréger,

$$i = \frac{1}{2}a^2\varepsilon^2,\quad i' = \frac{1}{2}a'^2\varepsilon'^2,\quad f = -2Maa',\quad g = -2Naa'\sqrt{1-\varepsilon^2}\sqrt{1-\varepsilon'^2},$$
$$h = -2Paa'\sqrt{1-\varepsilon^2},\quad h' = -2Qaa'\sqrt{1-\varepsilon'^2},\quad b = a^2 + a'^2 + i + i' + f\varepsilon\varepsilon',$$
$$c = -2a^2\varepsilon - f\varepsilon',\quad c' = -2a'^2\varepsilon' - f\varepsilon,\quad d = -h\varepsilon',\quad d' = -h'\varepsilon,$$

on trouvera

$$\iota^2 = b + c\cos\psi + c'\cos\psi' + d\sin\psi + d'\sin\psi' + i\cos2\psi + i'\cos2\psi'$$
$$+ f\cos\psi\cos\psi' + g\sin\psi\sin\psi' + h\sin\psi\cos\psi' + h'\cos\psi\sin\psi'.$$

Faisons

$$
(7)\qquad
\begin{aligned}
\mathrm{H} &= b + c\cos\psi + d\sin\psi + i\cos 2\psi,\\
\mathrm{K}\cos\omega &= c' + f\cos\psi + h\sin\psi,\\
\mathrm{K}\sin\omega &= d' + g\sin\psi + h'\cos\psi;
\end{aligned}
$$

la valeur précédente de ι^2 pourra s'écrire

$$\iota^2 = \mathrm{H} + \mathrm{K}\cos(\psi' - \omega) + i'\cos 2\psi',$$

ou bien encore

$$\iota^2 = \mathrm{H} + \frac{1}{2}\mathrm{K}e^{-\omega\sqrt{-1}}\,.\,x' + \frac{1}{2}\mathrm{K}e^{\omega\sqrt{-1}}\,.\,x'^{-1} + \frac{1}{2}i'x'^2 + \frac{1}{2}i'x'^{-2},$$

en posant

$$e^{\psi'\sqrt{-1}} = x'.$$

On voit par là que si l'on regarde l'angle ψ comme connu, les valeurs de x' qui annuleront ι^2 seront données par une équation du quatrième degré et seront par conséquent au nombre de quatre.

Soit $\mathrm{a}'e^{\varphi'\sqrt{-1}}$ une de ces quatre racines, a′ désignant un nombre positif : en remplaçant x' par cette valeur dans l'expression de ι^2 et égalant séparément à zéro la partie réelle et la partie imaginaire, on trouvera les deux équations

$$\mathrm{H} + \frac{1}{2}\mathrm{K}(\mathrm{a}' + \mathrm{a}'^{-1})\cos(\varphi' - \omega) + \frac{1}{2}i'(\mathrm{a}'^2 + \mathrm{a}'^{-2})\cos 2\varphi' = 0,$$

$$\frac{1}{2}\mathrm{K}(\mathrm{a}' - \mathrm{a}'^{-1})\sin(\varphi' - \omega) + \frac{1}{2}i'(\mathrm{a}'^2 - \mathrm{a}'^{-2})\sin 2\varphi' = 0.$$

Ces équations restant les mêmes quand on y change a′ en $\frac{1}{\mathrm{a}'}$, on en conclut qu'à la racine $\mathrm{a}'e^{\varphi'\sqrt{-1}}$ répond cette autre racine $\frac{1}{\mathrm{a}'}e^{\varphi'\sqrt{-1}}$; on peut donc représenter par

$$\mathrm{a}'e^{\varphi'\sqrt{-1}},\quad \frac{1}{\mathrm{a}'}e^{\varphi'\sqrt{-1}},\quad \mathrm{b}'e^{\chi'\sqrt{-1}},\quad \frac{1}{\mathrm{b}'}e^{\chi'\sqrt{-1}}$$

les quatre valeurs de x' qui annulent ι^2, a′ et b′ étant des nombres positifs qu'il est permis de supposer inférieurs à l'unité. Décomposant alors en facteurs le polynôme du quatrième degré

$$\iota^2 x'^2 = \frac{1}{2}i'x'^4 + \frac{1}{2}\mathrm{K}e^{-\omega\sqrt{-1}}x'^3 + \mathrm{H}x'^2 + \frac{1}{2}\mathrm{K}e^{\omega\sqrt{-1}}x' + \frac{1}{2}i',$$

on aura

$$\iota^2 x'^2 = \frac{1}{2} i' \left(x' - a' e^{\varphi'\sqrt{-1}}\right) \left(x' - \frac{1}{a'} e^{\varphi'\sqrt{-1}}\right) \left(x' - b' e^{\chi'\sqrt{-1}}\right) \left(x' - \frac{1}{b'} e^{\chi'\sqrt{-1}}\right).$$

ou bien

$$\iota^2 = \frac{i' e^{(\varphi'+\chi')\sqrt{-1}}}{2a'b'} \left(1 - a' e^{-\varphi'\sqrt{-1}} x'\right) \left(1 - a' e^{\varphi'\sqrt{-1}} x'^{-1}\right) \left(1 - b' e^{-\chi'\sqrt{-1}} x'\right) \left(1 - b' e^{\chi'\sqrt{-1}} x'^{-1}\right).$$

Si dans cette formule on remet pour x' sa valeur $e^{\psi'\sqrt{-1}}$, les facteurs binômes du second membre, devenant conjugués deux à deux, auront pour produit un nombre réel et positif, et comme ι^2 est aussi réel et positif, on en conclut que le facteur $e^{(\varphi'+\chi')\sqrt{-1}}$ doit se réduire à $+1$, ou que l'on a $\chi' = -\varphi'$. Les quatre valeurs de x' qui annulent ι^2 sont par suite

$$a' e^{\varphi'\sqrt{-1}}, \quad \frac{1}{a'} e^{\varphi'\sqrt{-1}}, \quad b' e^{-\varphi'\sqrt{-1}}, \quad \frac{1}{b'} e^{-\varphi'\sqrt{-1}},$$

et on a, quel que soit x',

$$\iota^2 = \frac{i'}{2a'b'} \left(1 - a' e^{-\varphi'\sqrt{-1}} x'\right) \left(1 - a' e^{\varphi'\sqrt{-1}} x'^{-1}\right) \left(1 - b' e^{\varphi'\sqrt{-1}} x'\right) \left(1 - b' e^{-\varphi'\sqrt{-1}} x'^{-1}\right),$$

formule d'où l'on déduira aisément le développement de $\frac{1}{\iota}$ suivant les puissances de x'.

VI. Mais, avant d'aller plus loin, il faut montrer comment on pourra calculer commodément, pour chaque valeur donnée de ψ, les valeurs de a', b', φ'. Posons

$$x'_1 = a' e^{\varphi'\sqrt{-1}}, \quad x'_2 = \frac{1}{a'} e^{\varphi'\sqrt{-1}}, \quad x'_3 = b' e^{-\varphi'\sqrt{-1}}, \quad x'_4 = \frac{1}{b'} e^{-\varphi'\sqrt{-1}},$$

et en outre

$$y_1 = \frac{1}{2}(x'_1 x'_2 + x'_3 x'_4) = \cos 2\varphi',$$

$$y_2 = \frac{1}{2}(x'_1 x'_3 + x'_2 x'_4) = \frac{1}{2}\left(a'b' + \frac{1}{a'b'}\right),$$

$$y_3 = \frac{1}{2}(x'_1 x'_4 + x'_2 x'_3) = \frac{1}{2}\left(\frac{a'}{b'} + \frac{b'}{a'}\right),$$

on trouvera, en observant que le produit $x'_1\, x'_2\, x'_3\, x'_4$ est égal à 1, et désignant

par la caractéristique S des fonctions symétriques de x'_1, x'_2, x'_3, x'_4,

$$y_1+y_2+y_3=\frac{1}{2}\,\mathrm{S}\,(x'_1 x'_2),$$

$$y_1y_2+y_1y_3+y_2y_3=\frac{1}{4}\,\mathrm{S}\,(x'^2_1 x'_2 x'_3)=\frac{1}{4}\,\mathrm{S}\,(x'_1).\mathrm{S}\,(x'_1 x'_2 x'_3)-1=\frac{1}{4}\,\mathrm{S}\,(x'_1)\,\mathrm{S}\left(\frac{1}{x'_1}\right)-1,$$

$$y_1y_2y_3=\frac{1}{8}\,[\mathrm{S}\,(x'^2_1)+\mathrm{S}\,(x'^2_1 x'^2_2 x'^2_3)]=\frac{1}{8}\left[\mathrm{S}\,(x'^2_1)+\mathrm{S}\left(\frac{1}{x'^2_1}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{8}\left\{[\mathrm{S}\,(x'_1)]^2-2\,\mathrm{S}\,(x'_1 x'_2)+\left[\mathrm{S}\left(\frac{1}{x'_1}\right)\right]^2-2\,\mathrm{S}\left(\frac{1}{x'_1 x'_2}\right)\right\}.$$

Mais x'_1, x'_2, x'_3, x'_4 étant les racines de l'équation

$$\frac{1}{2}\,i'x'^4+\frac{1}{2}\,\mathrm{K}e^{-\omega\sqrt{-1}}\,x'^3+\mathrm{H}x'^2+\frac{1}{2}\,\mathrm{K}e^{\omega\sqrt{-1}}\,x'+\frac{1}{2}\,i'=0,$$

on en conclut

$$\mathrm{S}\,(x'_1)=-\frac{\mathrm{K}}{i'}\,e^{-\omega\sqrt{-1}},\quad \mathrm{S}\left(\frac{1}{x'_1}\right)=-\frac{\mathrm{K}}{i'}\,e^{\omega\sqrt{-1}},\quad \mathrm{S}\,(x'_1 x'_2)=\mathrm{S}\left(\frac{1}{x'_1 x'_2}\right)=\frac{2\mathrm{H}}{i'}.$$

On a donc

$$y_1+y_2+y_3=\frac{\mathrm{H}}{i'},$$

$$y_1y_2+y_1y_3+y_2y_3=\frac{\mathrm{K}^2}{4i'^2}-1,$$

$$y_1y_2y_3=\frac{\mathrm{K}^2\cos 2\omega}{4i'^2}-\frac{\mathrm{H}}{i'},$$

d'où il suit que y_1, y_2, y_3 sont les trois racines de l'équation

$$y^3-\frac{\mathrm{H}}{i'}\,y^2+\left(\frac{\mathrm{K}^2}{4i'^2}-1\right)y+\frac{\mathrm{H}}{i'}-\frac{\mathrm{K}^2\cos 2\omega}{4i'^2}=0.$$

Pour la résoudre, nous ferons disparaître le second terme en posant

$$y=z+\frac{\mathrm{H}}{3i'};$$

elle deviendra

$$z^3-\mathfrak{P}z-\mathfrak{Q}=0,$$

où l'on a fait, pour abréger,

$$\mathfrak{P}=\frac{\mathrm{H}^2}{3i'^2}-\frac{\mathrm{K}^2}{4i'^2}+1,\quad \mathfrak{Q}=\frac{\mathrm{H}}{3i'}\left(\frac{2\mathrm{H}^2}{9i'^2}-\frac{\mathrm{K}^2}{4i'^2}\right)+\frac{\mathrm{K}^2\cos 2\omega}{4i'^2}-\frac{2\mathrm{H}}{3i'}.$$

Si maintenant nous déterminons un nombre positif $\mathfrak{R}$ tel qu'on ait

$$\mathfrak{R} = 2\left(\frac{\mathfrak{P}}{3}\right)^{\frac{1}{2}},$$

et un angle υ compris entre zéro et π tel qu'on ait

$$\cos\upsilon = \frac{3\mathfrak{Q}}{\mathfrak{P}\mathfrak{R}},$$

les trois valeurs de z seront

$$\mathfrak{R}\cos\frac{\upsilon}{3},\quad \mathfrak{R}\cos\frac{2\pi+\upsilon}{3},\quad \mathfrak{R}\cos\frac{2\pi-\upsilon}{3},$$

et par suite celles de y seront

$$\frac{H}{3i'}+\mathfrak{R}\cos\frac{\upsilon}{3},\quad \frac{H}{3i'}+\mathfrak{R}\cos\frac{2\pi+\upsilon}{3},\quad \frac{H}{3i'}+\mathfrak{R}\cos\frac{2\pi-\upsilon}{3}.$$

Celle de ces trois racines qui aura une valeur numérique moindre que 1 sera $y_1 = \cos 2\varphi'$; les deux autres seront positives et supérieures à l'unité : la plus grande sera $y_2 = \frac{1}{2}\left(a'b' + \frac{1}{a'b'}\right)$ et la plus petite sera $y_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{a'}{b'} + \frac{b'}{a'}\right)$. Alors, pour obtenir a' et b', il suffira, en supposant, ce qui est permis, $a' > b'$, de recourir aux deux formules

$$a'b' = \tang\left(\frac{1}{2}\arc\sin\frac{1}{y_2}\right),\quad \frac{b'}{a'} = \tang\left(\frac{1}{2}\arc\sin\frac{1}{y_3}\right),$$

où les arcs qui ont pour sinus $\frac{1}{y_2}$ et $\frac{1}{y_3}$ appartiennent l'un et l'autre au premier quadrant (*).

(*) En mettant l'équation en y sous la forme

$$i'^2 y^3 - i' H y^2 + \left(\frac{K^2}{4} - i'^2\right) y + i' H - \frac{K^2}{4}\cos 2\omega = 0,$$

on voit que pour $i' = 0$ les racines y_2 et y_3 deviennent infinies, tandis que la racine y_1 se réduit à $\cos 2\omega$. Il s'ensuit que quand i' est très-petit, les nombres $\frac{1}{y_2}, \frac{1}{y_3}$ sont eux-mêmes très-petits, et

L'angle φ' n'est pas suffisamment déterminé par l'équation $y_1 = \cos 2\varphi'$; mais si dans l'équation identique

$$x'^2 + x'^{-2} + \frac{K}{i'}\left(e^{-\omega\sqrt{-1}}\,x' + e^{\omega\sqrt{-1}}\,x'^{-1}\right) + \frac{2H}{i'}$$
$$= \frac{1}{a'b'}\left(1 - a'e^{-\varphi'\sqrt{-1}}\,x'\right)\left(1 - a'e^{\varphi'\sqrt{-1}}\,x'^{-1}\right)\left(1 - b'e^{\varphi'\sqrt{-1}}\,x'\right)\left(1 - b'e^{-\varphi'\sqrt{-1}}\,x'^{-1}\right)$$

on remplace x' par $e^{\psi'\sqrt{-1}}$, on trouve

$$\cos 2\psi' + \frac{K}{i'}\cos(\psi' - \omega) + \frac{H}{i'} = \frac{1}{2a'b'}\left[1 - 2a'\cos(\psi' - \varphi') + a'^2\right]\left[1 - 2b'\cos(\psi' + \varphi') + b'^2\right].$$

De cette équation, qui doit avoir lieu quel que soit ψ', retranchons celle qu'on en déduit en changeant ψ' en $\psi' + \pi$; il viendra

$$\frac{K}{i'}\cos(\psi' - \omega) = -\left(a' + \frac{1}{a'}\right)\cos(\psi' + \varphi') - \left(b' + \frac{1}{b'}\right)\cos(\psi' - \varphi');$$

enfin, dans cette dernière, remplaçons successivement ψ' par o et par $\frac{\pi}{2}$, nous en tirerons les deux suivantes :

$$\cos\varphi' = -\frac{K}{i'}\cdot\frac{\cos\omega}{a' + \frac{1}{a'} + b' + \frac{1}{b'}}, \qquad \sin\varphi' = -\frac{K}{i'}\cdot\frac{\sin\omega}{b' + \frac{1}{b'} - a' - \frac{1}{a'}},$$

qui feront connaître l'angle φ' sans aucune ambiguïté et fourniront en outre par leur accord une vérification du calcul.

Dans le cas où l'excentricité ε' de l'orbite de m' est une petite fraction, les valeurs des inconnues a', b', φ' peuvent encore s'obtenir par des approximations succes-

---

alors les formules

$$a'b' = \text{tang}\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{y_2}\right), \quad \frac{b'}{a'} = \text{tang}\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{y_3}\right)$$

ne sont pas d'un usage commode : il vaut mieux dans ce cas développer les seconds membres en séries et se servir des formules

$$a'b' = \frac{1}{2y_2} + \frac{1}{8y_2^3} + \frac{1}{16y_2^5} + \ldots, \quad \frac{b'}{a'} = \frac{1}{2y_3} + \frac{1}{8y_3^3} + \frac{1}{16y_3^5} + \ldots.$$

sives. En effet, la partie $H + K\cos(\psi' - \omega)$ de ι^2 pouvant se mettre sous la forme

$$H + \frac{1}{2}K\left(e^{-\omega\sqrt{-1}}x' + e^{\omega\sqrt{-1}}x'^{-1}\right),$$

on en conclut qu'elle s'annule pour les deux valeurs de x',

$$x' = -\theta e^{\omega\sqrt{-1}}, \quad x' = -\frac{1}{\theta}e^{\omega\sqrt{-1}},$$

le nombre θ étant donné par la formule

$$\theta = \operatorname{tang}\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{K}{H}\right),$$

où l'arc qui a pour sinus $\frac{K}{H}$ appartient au premier quadrant. On a par suite

$$\begin{aligned} H + \frac{1}{2}K\left(e^{-\omega\sqrt{-1}}x' + e^{\omega\sqrt{-1}}x'^{-1}\right) &= \frac{Ke^{-\omega\sqrt{-1}}}{2x'}\left(x' + \theta e^{\omega\sqrt{-1}}\right)\left(x' + \frac{1}{\theta}e^{\omega\sqrt{-1}}\right) \\ &= \frac{K}{2\theta}\left(1 + \theta e^{-\omega\sqrt{-1}}x'\right)\left(1 + \theta e^{\omega\sqrt{-1}}x'^{-1}\right). \end{aligned}$$

La valeur complète de ι^2 peut donc s'écrire

$$\iota^2 = \frac{K}{2\theta}\left(1 + \theta e^{-\omega\sqrt{-1}}x'\right)\left(1 + \theta e^{\omega\sqrt{-1}}x'^{-1}\right) + \frac{i'}{2}\left(x'^2 + x'^{-2}\right),$$

et par conséquent l'équation $\iota^2 = 0$ peut se mettre sous la forme

$$x'\left(x' + \theta e^{\omega\sqrt{-1}}\right) + \frac{i'\theta}{K}\cdot\frac{1 + x'^4}{1 + \theta e^{-\omega\sqrt{-1}}x'} = 0.$$

Mais la quantité $i' = \frac{1}{2}a'\varepsilon'^2$ étant très-petite, puisque l'excentricité ε' est supposée petite, on voit que deux racines de l'équation précédente sont très-voisines, l'une de $-\theta e^{\omega\sqrt{-1}}$ et l'autre de zéro. Ainsi $-\theta e^{\omega\sqrt{-1}}$ et 0 sont des valeurs approchées des deux racines de l'équation $\iota^2 = 0$ qui ont des modules moindres que 1, c'est-à-dire de $\mathfrak{a}'e^{\varphi'\sqrt{-1}}$ et de $\mathfrak{b}'e^{-\varphi'\sqrt{-1}}$; en d'autres termes, les trois nombres θ, 0, $\omega + \pi$ sont des valeurs approchées des trois inconnues $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, φ'.

Ayant des valeurs approchées de $\mathfrak{a}'e^{\varphi'\sqrt{-1}}$ et de $\mathfrak{b}'e^{-\varphi'\sqrt{-1}}$, il sera aisé d'approcher davantage de ces deux racines de l'équation $\iota^2 = 0$; et d'abord la forme

même sous laquelle on vient de mettre cette équation fournit immédiatement les deux valeurs plus approchées

$$-\theta e^{\omega\sqrt{-1}}+\frac{i' e^{-\omega\sqrt{-1}}}{\mathrm{K}}\cdot\frac{1+\theta^4 e^{4\omega\sqrt{-1}}}{1-\theta^2},\qquad -\frac{i' e^{-\omega\sqrt{-1}}}{\mathrm{K}};$$

si l'on désire une précision plus grande, on pourra faire usage de la méthode d'approximation de Newton. Observons, comme conséquence de ce qui vient d'être dit, que $\frac{i'}{\mathrm{K}}$ est une valeur approchée de b'.

VII. Les nombres a', b', φ' étant calculés comme on vient de l'expliquer, on aura, pour une valeur donnée de ψ,

$$(8)\qquad \frac{1}{\iota}=\sqrt{\frac{2\mathrm{a}'\mathrm{b}'}{\iota'}}\left(1-\mathrm{a}'e^{-\varphi'\sqrt{-1}}x'\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1-\mathrm{a}'e^{\varphi'\sqrt{-1}}x'^{-1}\right)^{-\frac{1}{2}}$$
$$\times\left(1-\mathrm{b}'e^{\varphi'\sqrt{-1}}x'\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1-\mathrm{b}'e^{-\varphi'\sqrt{-1}}x'^{-1}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Mais on conclut des formules préliminaires (§ III)

$$\left(1-\mathrm{a}'e^{-\varphi'\sqrt{-1}}x'\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1-\mathrm{a}'e^{\varphi'\sqrt{-1}}x'^{-1}\right)^{-\frac{1}{2}}=\mathfrak{A}'_0+\mathfrak{A}'_1 e^{-\varphi'\sqrt{-1}}x'$$
$$+\mathfrak{A}'_2 e^{-2\varphi'\sqrt{-1}}x'^2+\ldots+\mathfrak{A}'_{-1}e^{\varphi'\sqrt{-1}}x'^{-1}+\mathfrak{A}'_{-2}e^{2\varphi'\sqrt{-1}}x'^{-2}+\ldots,$$

les coefficients $\mathfrak{A}'_0$, $\mathfrak{A}'_1$, $\mathfrak{A}'_2,\ldots$, $\mathfrak{A}'_{-1}$, $\mathfrak{A}'_{-2},\ldots$, étant donnés par la formule

$$\mathfrak{A}'_n=\mathfrak{A}'_{-n}=\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots(2n)}\frac{\mathrm{a}'^n}{\sqrt{1-\mathrm{a}'^2}}\left[1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2n+2}\frac{\mathrm{a}'^2}{1-\mathrm{a}'^2}\right.$$
$$\left.+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1.3}{(2n+2)(2n+4)}\left(\frac{\mathrm{a}'^2}{1-\mathrm{a}'^2}\right)^2-\ldots\right],$$

dans laquelle l'entier n est supposé positif; on a de même

$$\left(1-\mathrm{b}'e^{\varphi'\sqrt{-1}}x'\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1-\mathrm{b}'e^{-\varphi'\sqrt{-1}}x'^{-1}\right)^{-\frac{1}{2}}=\mathfrak{B}'_0+\mathfrak{B}'_1 e^{\varphi'\sqrt{-1}}x'+\mathfrak{B}'_2 e^{2\varphi'\sqrt{-1}}x'^2+\ldots$$
$$+\mathfrak{B}'_{-1}e^{-\varphi'\sqrt{-1}}x'^{-1}+\mathfrak{B}'_{-2}e^{-2\varphi'\sqrt{-1}}x'^{-2}+\ldots,$$

les coefficients $\mathfrak{B}'_0$, $\mathfrak{B}'_1$, $\mathfrak{B}'_2,\ldots$, $\mathfrak{B}'_{-1}$, $\mathfrak{B}'_{-2},\ldots$, étant donnés par la formule

$$\mathfrak{B}'_n=\mathfrak{B}'_{-n}=\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots(2n)}\frac{\mathrm{b}'^n}{\sqrt{1-\mathrm{b}'^2}}\left(1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2n+2}\frac{\mathrm{b}'^2}{1-\mathrm{b}'^2}+\ldots\right)$$

Si donc on désigne par $\mathcal{A}'_{n'}$ le coefficient de $x'^{n'}$ dans le développement de $\frac{1}{\iota}$ suivant les puissances positives et négatives de x', on aura

$$(9)\quad \mathcal{A}'_{n'} = \sqrt{\frac{2a'b'}{i'}}\Big[\mathfrak{A}'_{n'}\mathfrak{B}'_0 e^{-n'\varphi'\sqrt{-1}} + \mathfrak{A}'_{n'+1}\mathfrak{B}'_1 e^{-(n'+2)\varphi'\sqrt{-1}} + \mathfrak{A}'_{n'+2}\mathfrak{B}'_2 e^{-(n'+4)\varphi'\sqrt{-1}} + \ldots + \mathfrak{A}'_{n'-1}\mathfrak{B}'_1 e^{-(n'-2)\varphi'\sqrt{-1}} + \mathfrak{A}'_{n'-2}\mathfrak{B}'_2 e^{-(n'-4)\varphi'\sqrt{-1}} + \ldots\Big].$$

VIII. Proposons-nous maintenant, en supposant toujours à ψ et par suite à T une valeur déterminée, de calculer le coefficient $A'_{n'}$ de $e^{n'T'\sqrt{-1}}$ dans le développement de $\frac{1}{\iota}$ suivant les puissances de $e^{T'\sqrt{-1}}$. On a, en vertu de la formule (1),

$$A'_{n'} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{1}{\iota}e^{-n'T'\sqrt{-1}}\,dT';$$

si dans cette équation on remplace T' par sa valeur $\psi' - \varepsilon'\sin\psi'$, et qu'on fasse

$$\frac{n'\varepsilon'}{2} = \gamma',$$

on pourra l'écrire

$$(10)\qquad A'_{n'} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{1}{\iota}x'^{-n'}e^{\gamma'\left(x'-\frac{1}{x'}\right)}\left[1-\frac{\varepsilon'}{2}\left(x'+\frac{1}{x'}\right)\right]d\psi'.$$

Remplaçons $\frac{1}{\iota}$ par son développement suivant les puissances de x', développement qu'on peut écrire $\Sigma_{l'}\,\mathcal{A}'_{n'-l'}\,x'^{n'-l'}$, et il viendra

$$A'_{n'} = \Sigma_{l'}\left\{\mathcal{A}'_{n'-l'}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}x'^{-l'}e^{\gamma'\left(x'-\frac{1}{x'}\right)}\left[1-\frac{\varepsilon'}{2}\left(x'+\frac{1}{x'}\right)\right]d\psi'\right\},$$

où la notation $\Sigma_{l'}$ désigne une somme qui s'étend à toutes les valeurs entières de l', depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$. La quantité multipliée par $\mathcal{A}'_{n'-l'}$ sous le signe Σ n'est autre chose, d'après la formule (1), que le coefficient de $x'^{l'}$ dans le développement de $e^{\gamma'\left(x'-\frac{1}{x'}\right)}\left[1-\frac{\varepsilon'}{2}\left(x'+\frac{1}{x'}\right)\right]$; cette quantité est donc égale, en vertu de la formule (5), à $\left(1-\frac{l'}{n'}\right)\mathcal{E}'_{l'}$, en désignant par $\mathcal{E}'_{l'}$ le coefficient de $z^{l'}$ dans le

développement de $e^{\gamma'\left(z-\frac{1}{z}\right)}$. On aura dès lors, pour calculer $A'_{n'}$, la formule

$$(11) \qquad A'_{n'} = \Sigma_{l'}\left(1 - \frac{l'}{n'}\right) \mathcal{E}'_{l'} \mathcal{A}'_{n'-l'},$$

et il suffira d'un petit nombre de termes dans le second membre, vu la rapidité avec laquelle décroissent les quantités $\mathcal{E}'_{l'}$, lorsque la valeur numérique de l' augmente.

IX. Sachant calculer $A'_{n'}$ pour chaque valeur donnée de ψ, nous pourrons obtenir comme il suit le coefficient cherché $A_{n',-n}$. Représentons par A_{-n} et $\mathcal{A}_{-n}$ les coefficients de $e^{-nT\sqrt{-1}}$ et de $x^{-n} = e^{-n\psi\sqrt{-1}}$ dans les développements de $\frac{1}{z}$ suivant les puissances de $e^{T\sqrt{-1}}$ et de $x = e^{\psi\sqrt{-1}}$, ces coefficients étant des fonctions de ψ'; faisons d'ailleurs $\frac{n\varepsilon}{2} = \gamma$ et conservons les notations du § II. En raisonnant comme on l'a fait ci-dessus pour obtenir la valeur de $A'_{n'}$, on démontrera l'équation

$$(12) \qquad A_{-n} = \Sigma_l\left(1 - \frac{l}{n}\right) \mathcal{E}_l \mathcal{A}_{-n+l}.$$

D'un autre côté, l'équation $\frac{1}{z} = \Sigma_n \mathcal{A}_n x^n$ peut s'écrire

$$\frac{1}{z} = \Sigma_p \mathcal{A}_{-n+p} x^{-n+p},$$

d'où l'on conclut

$$\frac{x^{n-l}}{z} = \Sigma_p \mathcal{A}_{-n+p} x^{p-l}.$$

Soit maintenant k un nombre entier plus grand que n et tel que la différence $k-n$ ne se réduise pas à un petit nombre d'unités : si dans la dernière équation on remplace successivement x par les k racines de l'équation binôme $x^k = 1$, ce qui revient à attribuer à ψ les k valeurs $0, \frac{2\pi}{k}, 2.\frac{2\pi}{k}, \ldots, (k-1).\frac{2\pi}{k}$, on trouvera, en ajoutant les équations ainsi obtenues et en désignant par S_k une somme relative à toutes ces valeurs de x ou de ψ,

$$S_k \frac{x^{n-l}}{z} = k\left(\mathcal{A}_{-n+l} + \mathcal{A}_{-n+l+k} + \mathcal{A}_{-n+l+2k} + \ldots + \mathcal{A}_{-n+l-k} + \mathcal{A}_{-n+l-2k} + \ldots\right).$$

On en conclut

$$\mathcal{A}_{-n+l} = \frac{1}{k} S_k \frac{x^{n-l}}{\iota} - s,$$

en faisant

$$s = \mathcal{A}_{-n+l+k} + \mathcal{A}_{-n+l+2k} + \ldots + \mathcal{A}_{-n+l-k} + \mathcal{A}_{-n+l-2k} + \ldots.$$

Remplaçons $\mathcal{A}_{-n+l}$ par cette valeur dans l'équation (12), il viendra

$$A_{-n} = \frac{1}{k} S_k \frac{x^n}{\iota} \Sigma_l \left(1 - \frac{l}{n}\right) \mathcal{E}_l x^{-l} - \Sigma_l \left(1 - \frac{l}{n}\right) \mathcal{E}_l s,$$

ou, en vertu de la formule (5),

$$A_{-n} = \frac{1}{k} S_k \frac{x^n}{\iota} e^{-\gamma\left(x - \frac{1}{x}\right)} \left[1 - \frac{\varepsilon}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)\right] - \Sigma_l \left(1 - \frac{l}{n}\right) \mathcal{E}_l s,$$

ou encore, en remplaçant γ et x par leurs valeurs $\frac{n\varepsilon}{2}$ et $e^{\psi\sqrt{-1}}$,

$$A_{-n} = \frac{1}{k} S_k \frac{1}{\iota} e^{n(\psi - \varepsilon \sin\psi)\sqrt{-1}} (1 - \varepsilon\cos\psi) - \Sigma_l \left(1 - \frac{l}{n}\right) \mathcal{E}_l s,$$

ou enfin, en observant que $\psi - \varepsilon \sin\psi$ n'est autre chose que T,

$$A_{-n} = \frac{1}{k} S_k \frac{1}{\iota} e^{n\mathrm{T}\sqrt{-1}} (1 - \varepsilon\cos\psi) - \Sigma_l \left(1 - \frac{l}{n}\right) \mathcal{E}_l s.$$

Substituons cette valeur de A_{-n} dans l'équation

$$A_{n',-n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} A_{-n} e^{-n'\mathrm{T}'\sqrt{-1}} d\mathrm{T}'$$

que l'on conclut de la formule (1) en observant que $A_{n',-n}$ est le coefficient de $x'^{n'}$ dans le développement de A_{-n} suivant les puissances de x', il viendra

$$A_{n',-n} = \frac{1}{k} S_k \left[e^{n\mathrm{T}\sqrt{-1}} (1 - \varepsilon\cos\psi) . \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1}{\iota} e^{-n'\mathrm{T}'\sqrt{-1}} d\mathrm{T}'\right]$$
$$- \frac{1}{2\pi} \Sigma_l \left(1 - \frac{l}{n}\right) \mathcal{E}_l \int_{-\pi}^{+\pi} s e^{-n'\mathrm{T}'\sqrt{-1}} d\mathrm{T}'.$$

Si donc on pose

(13) $$\rho = \frac{1}{2\pi} \Sigma_l \left(1 - \frac{l}{n}\right) \mathcal{E}_l \int_{-\pi}^{+\pi} s e^{-n'\mathrm{T}'\sqrt{-1}} d\mathrm{T}',$$

et si l'on observe qu'en vertu toujours de la formule (1), $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1}{\iota} e^{-n'\mathrm{T}'\sqrt{-1}}\,d\mathrm{T}'$ n'est autre chose que $\mathrm{A}'_{n'}$, on aura

$$\mathrm{A}_{n',-n} = \frac{1}{k}\,\mathrm{S}_k \mathrm{A}'_{n'}\, e^{n\mathrm{T}\sqrt{-1}}\,(1-\varepsilon\cos\psi) - \rho\,;$$

par conséquent, lorsque le nombre entier k sera assez grand pour que ρ soit négligeable, c'est-à-dire pour que le module de ρ soit inférieur à la limite υ déterminée ci-dessus, on pourra calculer $\mathrm{A}_{n',-n}$ avec une exactitude suffisante à l'aide de la formule approchée

$$(14) \qquad \mathrm{A}_{n',-n} = \frac{1}{k}\,\mathrm{S}_k\, \mathrm{A}'_{n'}\, e^{n\mathrm{T}\sqrt{-1}}\,(1-\varepsilon\cos\psi).$$

X. Quand on veut réduire en nombre les formules qui précèdent, il faut, d'une part, assigner à l'entier k une valeur assez grande pour que la partie $-\rho$ du coefficient $\mathrm{A}_{n',-n}$ puisse effectivement être négligée, et d'autre part calculer la partie conservée $\frac{1}{k}\mathrm{S}_k\,\mathrm{A}'_{n'}\,e^{n\mathrm{T}\sqrt{-1}}\,(1-\varepsilon\cos\psi)$ avec assez de précision pour que les erreurs commises dans ce calcul soient sans influence sur la détermination de l'inégalité, au degré d'approximation dont on veut se contenter. En cherchant à établir les règles qu'on doit suivre à cet égard, on est conduit à résoudre une question de maximum dont nous allons d'abord nous occuper.

La quantité désignée ci-dessus par a' est une fonction de la valeur particulière attribuée à ψ : proposons-nous de déterminer, au moins approximativement, le maximum a'_1 des valeurs que prend cette fonction, lorsqu'on fait varier l'angle ψ' de o à 2π, et cherchons en même temps les valeurs b'_1 et φ'_1 de b' et de φ' correspondantes à ce maximum.

Dans cette recherche, nous regarderons les quantités I, ε, ε' comme assez petites pour qu'on puisse négliger leurs carrés; il en résultera

$$\mathrm{M}=\mathrm{N}=\cos(\tau-\tau'),\qquad -\mathrm{P}=\mathrm{Q}=\sin(\tau-\tau'),\qquad f=g=-2aa'\cos(\tau-\tau'),$$
$$h=-h'=2aa'\sin(\tau-\tau'),\quad b=a^2+a'^2,\quad c=-2a\,[a\varepsilon-a'\varepsilon'\cos(\tau-\tau')],$$
$$c'=-2a'[a'\varepsilon'-a\varepsilon\cos(\tau-\tau')],\quad d=-2aa'\varepsilon'\sin(\tau-\tau'),\quad d'=2aa'\varepsilon\sin(\tau-\tau').$$

En même temps les formules (7) se réduiront aux suivantes

$$\mathrm{H}=a^2+a'^2+c\cos\psi+d\sin\psi,\qquad \mathrm{K}\cos\omega=f\cos\psi+h\sin\psi+c',$$
$$\mathrm{K}\sin\omega=f\sin\psi-h\cos\psi+d',$$

dont les deux dernières nous donnent

$$K^2 = f^2 + h^2 + 2(c'f - d'h)\cos\psi + 2(c'h + d'f)\sin\psi = 4a^2a'^2 + 4a'^2(c\cos\psi + d\sin\psi),$$

et par conséquent

$$K = 2aa' + \frac{a'}{a}(c\cos\psi + d\sin\psi).$$

Posons

$$a\varepsilon - a'\varepsilon'\cos(\tau - \tau') = A\cos\alpha, \qquad a'\varepsilon'\sin(\tau - \tau') = A\sin\alpha,$$

en sorte que A désigne le radical $\sqrt{a^2\varepsilon^2 + a'^2\varepsilon'^2 - 2aa'\varepsilon\varepsilon'\cos(\tau - \tau')}$ pris positivement ; il en résultera

$$c = -2aA\cos\alpha, \qquad d = -2aA\sin\alpha,$$

et les valeurs de H et de K pourront s'écrire

$$H = (a^2 + a'^2)\left[1 - \frac{2aA}{a^2 + a'^2}\cos(\psi - \alpha)\right], \qquad K = 2aa'\left[1 - \frac{A}{a}\cos(\psi - \alpha)\right],$$

d'où il suit

$$\frac{K}{H} = \frac{2aa'}{a^2 + a'^2}\left[1 - \frac{A(a'^2 - a^2)}{a(a^2 + a'^2)}\cos(\psi - \alpha)\right].$$

Mais, au degré d'approximation dont nous nous contentons, on a (§ VI)

$$\mathrm{a}' = \operatorname{tang}\left(\frac{1}{2}\operatorname{arc}\sin\frac{K}{H}\right);$$

on voit par là que a′ est maximum en même temps que $\frac{K}{H}$, d'où il suit que la valeur de ψ qui fait acquérir à a′ sa valeur maximum a'_1 est égale à $\alpha + \pi$, si l'on a $a' > a$, et à α, si l'on a $a > a'$.

Considérons d'abord le premier cas, celui de $a' > a$: on aura

$$\mathrm{a}'_1 = \operatorname{tang}\frac{z}{2},$$

z désignant le plus petit arc positif déterminé par la formule

$$\sin z = \frac{2aa'}{a^2 + a'^2}\left[1 + \frac{A(a'^2 - a^2)}{a(a^2 + a'^2)}\right].$$

Mais de cette valeur de $\sin z$ on conclut, en négligeant toujours le carré de A,

$$\cos z = \frac{a'^2 - a^2}{a^2 + a'^2} - \frac{4Aaa'^2}{(a^2 + a'^2)^2}, \qquad \operatorname{tang}^2\frac{z}{2} = \frac{1 - \cos z}{1 + \cos z} = \frac{a^2}{a'^2}\left(1 + \frac{2A}{a}\right):$$

on a donc

$$\mathrm{a}'_1 = \frac{a}{a'}\left(1 + \frac{A}{a}\right).$$

Les valeurs correspondantes de K et de ω se tireront des deux équations

$$K\cos\omega = f\cos\psi + h\sin\psi + c' = -2aa'\cos(\psi + \tau - \tau') + c',$$
$$K\sin\omega = f\sin\psi - h\cos\psi + d' = -2aa'\sin(\psi + \tau - \tau') + d',$$

après qu'on y aura remplacé ψ par $\alpha + \pi$; si donc on désigne ces valeurs de K et de ω par K_1 et ω_1, on aura

$$K_1\cos\omega_1 = 2aa'\cos(\alpha + \tau - \tau') + c', \qquad K_1\sin\omega_1 = 2aa'\sin(\alpha + \tau - \tau') + d'.$$

On voit que la différence entre ω_1 et $\alpha + \tau - \tau'$ s'annule en même temps que c' et d', c'est-à-dire en même temps que les excentricités ε, ε', et on trouve aisément

$$\omega_1 = \alpha + \tau - \tau' - \frac{c'\sin(\alpha + \tau - \tau') - d'\cos(\alpha + \tau - \tau')}{2aa'};$$

mais en ayant égard aux valeurs de c', d', $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, on reconnaît sans peine que la quantité $c'\sin(\alpha + \tau - \tau') - d'\cos(\alpha + \tau - \tau')$ se réduit à zéro : on a donc simplement

$$\omega_1 = \alpha + \tau - \tau',$$

et comme, en négligeant les carrés de ε et de ε', on a

$$\varphi' = \omega + \pi,$$

on en conclut

$$\varphi'_1 = \alpha + \tau - \tau' + \pi.$$

L'équation

$$K = 2aa' + \frac{a'}{a}(c\cos\psi + d\sin\psi) = 2aa' - 2Aa'\cos(\psi - \alpha)$$

nous donne ensuite

$$K_1 = 2aa' + 2Aa' = 2aa'\left(1 + \frac{A}{a}\right),$$

et cette valeur substituée dans la formule approchée

$$\mathrm{b}' = \frac{i'}{K}$$

nous fournit enfin la valeur de b'_1. Ainsi, en résumé, dans le cas de $a' > a$, on a

$$a'_1 = \frac{a}{a'}\left(1+\frac{A}{a}\right), \quad b'_1 = \frac{i'}{2aa'\left(1+\frac{A}{a}\right)}, \quad \varphi'_1 = \alpha + \tau - \tau' + \pi.$$

Dans le cas de $a > a'$, on trouvera de même

$$a'_1 = \frac{a'}{a}\left(1+\frac{A}{a}\right), \quad b'_1 = \frac{i'}{2aa'\left(1-\frac{A}{a}\right)}, \quad \varphi'_1 = \alpha + \tau - \tau'.$$

XI. Nous aurons encore besoin de la solution d'une autre question de maximum, toute pareille à la précédente et qui se présente, lorsque, au lieu d'ordonner ι^2 suivant les puissances de la variable $x' = e^{\psi'\sqrt{-1}}$, on l'ordonne suivant les puissances de $x = e^{\psi\sqrt{-1}}$. On a alors

$$\iota^2 = H' + \frac{1}{2}K'e^{-\omega'\sqrt{-1}}x + \frac{1}{2}K'e^{\omega'\sqrt{-1}}x^{-1} + \frac{1}{2}ix^2 + \frac{1}{2}ix^{-2},$$

H', K' et ω' étant des fonctions de ψ' définies par les équations

$$\begin{aligned} H' &= b + c\cos\psi' + d'\sin\psi' + i'\cos 2\psi', \\ K'\cos\omega' &= c + f\cos\psi' + h'\sin\psi', \\ K'\sin\omega' &= d + g\sin\psi' + h\cos\psi'. \end{aligned}$$

Pour une valeur donnée de ψ', l'équation $\iota^2 = 0$ fournira quatre valeurs de x, et on prouvera, en raisonnant comme au § VI, que ces valeurs peuvent être mises sous la forme

$$a e^{\varphi\sqrt{-1}}, \quad a^{-1}e^{\varphi\sqrt{-1}}, \quad b e^{-\varphi\sqrt{-1}}, \quad b^{-1}e^{-\varphi\sqrt{-1}},$$

a et b désignant des nombres positifs, inférieurs à l'unité et tels qu'on ait a > b. Ces nombres seront, aussi bien que l'angle φ, des fonctions de la variable ψ', et on pourra se proposer de déterminer le maximum de a ainsi que les valeurs correspondantes de b et de φ.

Il suffira, pour cela, d'un simple échange de lettres dans les conclusions du paragraphe précédent, et on trouvera que si l'on pose

$$a'\varepsilon' - a\varepsilon\cos(\tau - \tau') = A\cos\alpha', \qquad -a\varepsilon\sin(\tau-\tau') = A\sin\alpha',$$

(d'où il résulte pour A la même valeur $\sqrt{a^2\varepsilon^2 + a'^2\varepsilon'^2 - 2aa'\varepsilon\varepsilon'\cos(\tau-\tau')}$ que

ci-dessus), les valeurs a_1, b_1, φ_1 de a, b, φ, qui répondent au maximum de a, seront approximativement, dans le cas de $a' > a$,

$$\text{a}_1 = \frac{a}{a'}\left(1 + \frac{\text{A}}{a'}\right), \quad \text{b}_1 = \frac{i}{2aa'\left(1 - \frac{\text{A}}{a'}\right)}, \quad \varphi_1 = \alpha' - \tau + \tau',$$

et dans le cas de $a > a'$,

$$\text{a}_1 = \frac{a'}{a}\left(1 + \frac{\text{A}}{a'}\right), \quad \text{b}_1 = \frac{i}{2aa'\left(1 + \frac{\text{A}}{a'}\right)}, \quad \varphi_1 = \alpha' - \tau + \tau' + \pi.$$

XII. Revenons maintenant au double problème indiqué au commencement du § XI, et proposons-nous d'abord de déterminer une valeur convenable de k. Observons pour cela que si l'on voulait calculer effectivement la quantité ρ à l'aide de la formule (13), il suffirait d'attribuer à l'entier l des valeurs voisines de zéro, attendu que $\mathfrak{C}_l$ décroît rapidement à mesure que la valeur numérique de l augmente : le nombre l pouvant être supposé petit, tandis que n et k sont considérables, il en résulte que $\mathcal{A}_{-n+l+k}$ est le terme principal de la somme désignée par s et qu'ainsi on peut regarder ce terme unique comme une valeur approchée de s.

Maintenant si l'on applique à la quantité $\frac{1}{v}$, regardée comme fonction de ψ, ce que l'on a démontré dans les §§ VI, VII et VIII, en la regardant comme une fonction de ψ', on trouvera, à la place de la formule (9), l'équation toute pareille

$$\mathcal{A}_n = \sqrt{\frac{2\,\text{ab}}{i}}\Big[\mathfrak{A}_n\mathfrak{B}_0\, e^{-n\varphi\sqrt{-1}} + \mathfrak{A}_{n+1}\mathfrak{B}_1\, e^{-(n+2)\varphi\sqrt{-1}} + \ldots$$
$$+ \mathfrak{A}_{n-1}\mathfrak{B}_1\, e^{-(n-2)\varphi\sqrt{-1}} + \ldots\Big],$$

où $\mathfrak{A}_n$ et $\mathfrak{B}_n$ désignent ce que deviennent $\mathfrak{A}'_n$ et $\mathfrak{B}'_n$ quand on y remplace a' et b' par a et b. Mais pour une grande valeur positive de n on a sensiblement

$$\mathfrak{A}_n = \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots(2n)}\,\frac{\text{a}^n}{\sqrt{1-\text{a}^2}}$$

ou à très-peu près, en vertu de la formule connue de Stirling pour l'évaluation du produit d'une suite de nombres,

$$\mathfrak{A}_n = \frac{\text{a}^n}{\sqrt{\pi n(1-\text{a}^2)}}.$$

D'un autre côté, à cause de la petitesse de b, les quantités $\mathfrak{B}_n$ sont [illegible] [illegible].

petites, sauf $\mathfrak{B}_0$ qui diffère peu de l'unité. On a donc approximativement, pour une grande valeur positive de n,

(15) $$\mathcal{A}_n = \sqrt{\frac{2\mathrm{ab}}{i}} \cdot \frac{\mathrm{a}^n}{\sqrt{\pi n(1-\mathrm{a}^2)}} e^{-n\varphi\sqrt{-1}}.$$

Appliquons cette conclusion à la quantité $\mathcal{A}_{-n+l+k}$ qui forme, comme on l'a vu, le terme principal de s, et nous aurons à peu près

$$s = \sqrt{\frac{2\mathrm{ab}}{i}} \cdot \frac{\mathrm{a}^{k+l-n}}{\sqrt{\pi(k+l-n)(1-\mathrm{a}^2)}} e^{-(k+l-n)\varphi\sqrt{-1}},$$

ou encore, l étant petit en comparaison de $k-n$,

(16) $$s = \sqrt{\frac{2\mathrm{ab}}{i}} \cdot \frac{\mathrm{a}^{k+l-n}}{\sqrt{\pi(k-n)(1-\mathrm{a}^2)}} e^{-(k+l-n)\varphi\sqrt{-1}}.$$

Cela posé, observons qu'en vertu de la formule (13) mise sous la forme

$$\rho = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} e^{-n'\mathrm{T}'\sqrt{-1}}\, d\mathrm{T}'\, \Sigma_l \left(1-\frac{l}{n}\right) \mathcal{E}_l\, s,$$

le module de ρ est inférieur au module maximum de la fonction de ψ' désignée par $\Sigma_l\left(1-\frac{l}{n}\right)\mathcal{E}_l\, s$; on aura donc, en mettant pour s sa valeur approchée (16),

$$\text{mod. de } \rho < \text{mod. max. de} \sqrt{\frac{2\mathrm{ab}}{i}}\, \frac{\mathrm{a}^{k-n}}{\sqrt{\pi(k-n)(1-\mathrm{a}^2)}}\, e^{-(k-n)\varphi\sqrt{-1}}\, \Sigma_l\left(1-\frac{l}{n}\right)\mathcal{E}_l\left(\mathrm{a}e^{-\varphi\sqrt{-1}}\right)^l;$$

mais, en vertu de la formule (5), on a

$$\Sigma_l\left(1-\frac{l}{n}\right)\mathcal{E}_l\left(\mathrm{a}e^{-\varphi\sqrt{-1}}\right)^l = e^{-\frac{n\varepsilon}{2}\left(\mathrm{a}^{-1}e^{\varphi\sqrt{-1}} - \mathrm{a}e^{-\varphi\sqrt{-1}}\right)}\left[1-\frac{\varepsilon}{2}\left(\mathrm{a}^{-1}e^{\varphi\sqrt{-1}}+\mathrm{a}e^{-\varphi\sqrt{-1}}\right)\right]$$

ou approximativement

$$\begin{aligned}\Sigma_l\left(1-\frac{l}{n}\right)\mathcal{E}_l\left(\mathrm{a}e^{-\varphi\sqrt{-1}}\right)^l &= e^{-\frac{n\varepsilon}{2}\left(\mathrm{a}^{-1}e^{\varphi\sqrt{-1}} - \mathrm{a}e^{-\varphi\sqrt{-1}}\right)}\, e^{-\frac{\varepsilon}{2}\left(\mathrm{a}^{-1}e^{\varphi\sqrt{-1}}+\mathrm{a}e^{-\varphi\sqrt{-1}}\right)} \\ &= e^{-\left(\frac{n+1}{2}\mathrm{a}^{-1}e^{\varphi\sqrt{-1}} - \frac{n-1}{2}\mathrm{a}e^{-\varphi\sqrt{-1}}\right)\varepsilon},\end{aligned}$$

par où l'on voit que le module de $\Sigma_l \left(1 - \frac{l}{n}\right) \mathcal{E}_l \left(a e^{-\varphi\sqrt{-1}}\right)^l$ est à peu près égal à $e^{-\left(\frac{n+1}{2} a^{-1} - \frac{n-1}{2} a\right) \varepsilon \cos\varphi}$. Il en résulte

$$\text{module de } \rho < \text{maximum de } \sqrt{\frac{2ab}{i}} \cdot \frac{a^{k-n}}{\sqrt{\pi(k-n)(1-a^2)}} e^{-\left(\frac{n+1}{2} a^{-1} - \frac{n-1}{2} a\right) \varepsilon \cos\varphi}.$$

Pour de grandes valeurs de k, le maximum du second membre de cette inégalité répondra sensiblement au maximum de a : si donc on désigne comme ci-dessus par a_1 le maximum de a et par b_1, φ_1 les valeurs correspondantes de b et de φ, on aura

$$\text{module de } \rho < \sqrt{\frac{2a_1 b_1}{i}} \cdot \frac{a_1^{k-n}}{\sqrt{\pi(k-n)(1-a_1^2)}} e^{-\left(\frac{n+1}{2} a_1^{-1} - \frac{n-1}{2} a_1\right) \varepsilon \cos\varphi_1},$$

ou bien

$$\text{module de } \rho < \Lambda \frac{a_1^{k-n}}{\sqrt{k-n}},$$

en posant, pour abréger,

$$\Lambda = \sqrt{\frac{2a_1 b_1}{i}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi(1-a_1^2)}} e^{-\left(\frac{n+1}{2} a_1^{-1} - \frac{n-1}{2} a_1\right) \varepsilon \cos\varphi_1}.$$

Il suit de là que le module de ρ sera inférieur à la quantité ϵ, si l'on a

$$\Lambda \frac{a_1^{k-n}}{\sqrt{k-n}} < \epsilon,$$

ou bien

$$(k-n) \log \frac{1}{a_1} + \frac{1}{2} \log (k-n) > \log \frac{\Lambda}{\epsilon}.$$

Si donc on détermine le nombre u par l'équation

(17) $$u \log \frac{1}{a_1} + \frac{1}{2} \log u = \log \frac{\Lambda}{\epsilon},$$

il suffira de prendre k égal ou supérieur à $n + u$, pour que ρ soit négligeable. On n'aura besoin d'ailleurs de connaître le nombre u qu'à une unité près, et c'est à quoi l'on parviendra sans peine par la substitution de nombres entiers consécutifs dans le premier membre de l'équation (17).

XIII. Examinons ensuite avec quel degré de précision il faudra calculer les valeurs de $A'_{n'}$ correspondantes aux k valeurs o, $\frac{2\pi}{k}$, $2.\frac{2\pi}{k}, \ldots, (k-1)\frac{2\pi}{k}$ de ψ, ou, en d'autres termes, quel nombre de décimales il conviendra de conserver dans les logarithmes. Observons pour cela qu'en vertu de la formule (14) l'erreur du module de $A_{n',-n}$ sera certainement inférieure à δ, si pour chaque valeur de ψ l'erreur du module de $A'_{n'}$ est inférieure à $\frac{\delta}{1+\varepsilon}$. Or si, dans le second membre de l'équation (11), on ne garde que les deux termes principaux, elle se réduit à celle-ci

$$A'_{n'} = \mathcal{E}'_0 \mathcal{A}'_{n'} + \left(1 - \frac{1}{n'}\right) \mathcal{E}'_1 \mathcal{A}'_{n'-1}$$

ou sans grande erreur à cette autre

$$A'_{n'} = \mathcal{A}'_{n'} + \frac{1}{2}(n'-1)\,\varepsilon' \mathcal{A}'_{n'-1}.$$

Mettons pour $\mathcal{A}'_{n'}$ et $\mathcal{A}'_{n'-1}$ les valeurs que fournit la formule (15), lorsqu'on y remplace a, b, φ par a', b', φ', et n par n' ou $n'-1$; l'équation approchée qui précède deviendra

$$A'_{n'} = \sqrt{\frac{2a'b'}{\pi i'(1-a'^2)}} \left[\frac{a'^{n'}}{\sqrt{n'}} e^{-n'\varphi'\sqrt{-1}} + \frac{1}{2}(n'-1)\,\varepsilon' \frac{a'^{n'-1}}{\sqrt{n'-1}} e^{-(n'-1)\varphi'\sqrt{-1}} \right],$$

par où l'on voit que le module de $A'_{n'}$ est au plus égal à

$$\sqrt{\frac{2a'b'}{\pi i'(1-a'^2)}} \left(\frac{a'^{n'}}{\sqrt{n'}} + \frac{1}{2}\sqrt{n'-1}\,\varepsilon' a'^{n'-1} \right),$$

et à fortiori au plus égal à la quantité

$$\sqrt{\frac{2a'b'}{\pi i'(1-a'^2)}} \left(\frac{a'^{n'}}{\sqrt{n'}} + \frac{1}{2}\sqrt{n'}\,\varepsilon' a'^{n'-1} \right) = a'^{n'} \sqrt{\frac{2a'b'}{\pi n' i'(1-a'^2)}} \left(1 + \frac{n'\varepsilon'}{2a'} \right).$$

Le maximum des valeurs que prend cette expression, lorsqu'on y fait varier ψ', répond sensiblement au maximum de a'; on peut donc regarder la quantité

$$\Theta = a_1'^{n'} \sqrt{\frac{2a'_1 b'_1}{\pi n' i'(1-a_1'^2)}} \left(1 + \frac{n'\varepsilon'}{2a'_1} \right)$$

comme une limite supérieure du module de $A'_{n'}$. Il suit de là que l'erreur absolue

commise sur le module de A'_n sera inférieure à $\frac{\delta}{1+\varepsilon}$, si l'erreur relative commise dans le calcul de ce coefficient est au plus égale à $\frac{\delta}{\Theta(1+\varepsilon)}$. Or quand on fait usage de Tables de logarithmes à p décimales, la limite de l'erreur relative commise sur les nombres qu'on calcule peut être exprimée par $\frac{1}{10^p \mathfrak{M}}$, $\mathfrak{M}$ étant le module des logarithmes vulgaires : l'erreur absolue du module de A'_n sera donc inférieure à $\frac{\delta}{1+\varepsilon}$, et par suite l'erreur du module de $A_{n',-n}$ sera inférieure à δ, si l'on a

$$\frac{1}{10^p \mathfrak{M}} < \frac{\delta}{\Theta(1+\varepsilon)},$$

ou bien

$$p > \log \frac{\Theta(1+\varepsilon)}{\mathfrak{M}\delta}.$$

Telle est la condition qui déterminera le nombre p de décimales que devront contenir les Tables de logarithmes dont on fera usage.

XIV. Il ne sera pas inutile de résumer ce qui précède, en rassemblant ici toutes les formules qu'on aura à réduire en nombres dans les applications.

Les éléments du mouvement elliptique des deux planètes étant supposés connus ainsi que leurs masses, on trouvera sans difficulté l'inclinaison mutuelle I, les angles τ, τ' et la quantité

$$\Upsilon = \frac{648000}{\pi} \cdot \frac{6nm'}{1+m} \left(\frac{\mu}{n'\mu' - n\mu} \right)^2 a,$$

à l'aide de laquelle on déterminera le nombre $\delta = \frac{\sigma}{\Upsilon}$. On calculera ensuite M, N, P, Q à l'aide des quatre équations

$$\frac{1}{2}(M+N) = \cos^2 \frac{I}{2} \cos(\tau - \tau'), \qquad \frac{1}{2}(M-N) = \sin^2 \frac{I}{2} \cos(\tau + \tau'),$$

$$\frac{1}{2}(P+Q) = -\sin^2 \frac{I}{2} \sin(\tau + \tau'), \qquad \frac{1}{2}(P-Q) = -\cos^2 \frac{I}{2} \sin(\tau - \tau');$$

puis i, i', f, g, h, h', b, c, c', d, d' à l'aide de celles-ci

$$i = \frac{1}{2} a^2 \varepsilon^2, \quad i' = \frac{1}{2} a'^2 \varepsilon'^2, \quad f = -2 M a a', \quad g = -2 N a a' \sqrt{1-\varepsilon^2}\sqrt{1-\varepsilon'^2},$$

$$h = -2 P a a' \sqrt{1-\varepsilon^2}, \quad h' = -2 Q a a' \sqrt{1-\varepsilon'^2}, \quad b = a^2 + a'^2 + i + i' + f\varepsilon\varepsilon',$$

$$c = -2a^2\varepsilon - f\varepsilon', \quad c' = -2a'^2\varepsilon' - f\varepsilon, \quad d = -h\varepsilon', \quad d' = -h'\varepsilon.$$

On pourra alors, en ne gardant que deux ou trois décimales dans les logarithmes, calculer le nombre A à l'aide des équations

$$a\varepsilon - a'\varepsilon' \cos(\tau - \tau') = \mathrm{A}\cos\alpha, \qquad a'\varepsilon' \sin(\tau - \tau') = \mathrm{A}\sin\alpha,$$

ou, si l'on aime mieux, au moyen de celles-ci

$$c = -2a\mathrm{A}\cos\alpha, \qquad d = -2a\mathrm{A}\sin\alpha,$$

puis déterminer a'_1 et b'_1 par les formules

$$\mathrm{a}'_1 = \frac{a}{a'}\left(1 + \frac{\mathrm{A}}{a}\right), \qquad \mathrm{b}'_1 = \frac{i'}{2aa'\left(1 + \frac{\mathrm{A}}{a}\right)}, \qquad \text{dans le cas de } a' > a,$$

ou

$$\mathrm{a}'_1 = \frac{a'}{a}\left(1 + \frac{\mathrm{A}}{a}\right), \qquad \mathrm{b}'_1 = \frac{i'}{2aa'\left(1 - \frac{\mathrm{A}}{a}\right)}, \qquad \text{dans le cas de } a' > a.$$

On trouvera alors

$$\Theta = \mathrm{a}_1'^{n'} \sqrt{\frac{2\mathrm{a}'_1\mathrm{b}'_1}{\pi n' i' (1 - \mathrm{a}_1'^2)}} \left(1 + \frac{n'\varepsilon'}{2\mathrm{a}'_1}\right),$$

et la condition

$$p > \log \frac{\Theta(1 + \varepsilon)}{\mathfrak{M}\,\delta}$$

indiquera à quelles Tables de logarithmes on devra avoir recours dans le calcul de $\mathrm{A}_{n',-n}$.

Mais avant d'entreprendre le calcul de $\mathrm{A}_{n',-n}$, il faudra fixer la valeur de k, et, dans cette recherche, des logarithmes à 3 décimales suffiront.

On déterminera α' par les équations

$$a'\varepsilon' - a\varepsilon\cos(\tau - \tau') = \mathrm{A}\cos\alpha', \qquad -a\varepsilon\sin(\tau - \tau') = \mathrm{A}\sin\alpha',$$

ou, si l'on veut, par celles-ci

$$c' = -2a'\mathrm{A}\cos\alpha', \qquad d' = -2a'\mathrm{A}\sin\alpha';$$

puis on obtiendra a_1, b_1, φ_1 par les formules

$$\mathrm{a}_1 = \frac{a}{a'}\left(1 + \frac{\mathrm{A}}{a'}\right), \qquad \mathrm{b}_1 = \frac{i}{2aa'\left(1 - \frac{\mathrm{A}}{a'}\right)}, \qquad \varphi_1 = \alpha' - \tau + \tau', \qquad \text{dans le cas de } a' > a,$$

ou par celles-ci

$$a_1=\frac{a'}{a}\left(1+\frac{A}{a'}\right),\quad b_1=\frac{i}{2aa'\left(1+\dfrac{A}{a'}\right)},\quad \varphi_1=\alpha'-\tau+\tau'+\pi,\quad \text{dans le cas de } a>a'.$$

Cela fait, on calculera la quantité

$$\Lambda=\sqrt{\frac{2a_1b_1}{i\pi(1-a_1^2)}}\,e^{-\left(\frac{n+1}{2}a_1^{-1}-\frac{n-1}{2}a_1\right)\varepsilon\cos\varphi_1},$$

puis on formera l'équation

$$u\log\frac{1}{a_1}+\frac{1}{2}\log u=\log\frac{\Lambda}{8},$$

et ayant déterminé à une unité près la valeur de u qui la vérifie, on prendra pour k un nombre entier supérieur à $n+u$.

Faisant maintenant le calcul avec le nombre p de décimales déterminé ci-dessus, on cherchera T pour chacune des valeurs $0, \frac{2\pi}{k}, 2\frac{2\pi}{k}, \ldots, (k-1)\frac{2\pi}{k}$ de ψ, au moyen de la formule

$$T=\psi-\varepsilon\sin\psi,$$

et H, K, ω à l'aide des suivantes :

$$H=b+c\cos\psi+d\sin\psi+i\cos2\psi,\quad K\cos\omega=f\cos\psi+h\sin\psi+c',$$
$$K\sin\omega=g\sin\psi+h'\cos\psi+d';$$

puis on formera les quantités

$$\mathfrak{P}=\frac{H^2}{3i'^2}-\frac{K^2}{4i'^2}+1,\quad \mathfrak{Q}=\frac{H}{3i'}\left(\frac{2H^2}{9i'^2}-\frac{K^2}{4i'^2}\right)+\frac{K^2\cos2\omega}{4i'^2}-\frac{2H}{3i'}:$$

les équations

$$\mathfrak{R}=2\left(\frac{\mathfrak{P}}{3}\right)^{\frac{1}{2}},\quad \cos\upsilon=\frac{3\mathfrak{Q}}{\mathfrak{P}\mathfrak{R}}$$

donneront alors $\mathfrak{R}$ et υ, et on en conclura les valeurs des trois quantités

$$\frac{H}{3i'}+\mathfrak{R}\cos\frac{\upsilon}{3},\quad \frac{H}{3i'}+\mathfrak{R}\cos\frac{2\pi+\upsilon}{3},\quad \frac{H}{3i'}+\mathfrak{R}\cos\frac{2\pi-\upsilon}{3}.$$

Deux de ces trois nombres surpasseront l'unité; le plus grand de ces deux-là étant

désigné par y_2 et le plus petit par y_3, on déduira a′ et b′ des deux formules

$$\mathrm{a}'\mathrm{b}' = \operatorname{tang}\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{y_2}\right), \quad \frac{\mathrm{b}'}{\mathrm{a}'} = \operatorname{tang}\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{y_3}\right),$$

auxquelles toutefois il conviendra de substituer les deux suivantes :

$$\mathrm{a}'\mathrm{b}' = \frac{1}{2y_2} + \frac{1}{8y_2^3} + \frac{1}{16y_2^5} + \ldots, \quad \frac{\mathrm{b}'}{\mathrm{a}'} = \frac{1}{2y_3} + \frac{1}{8y_3^3} + \frac{1}{16y_3^5} + \ldots,$$

dans le cas où y_2 et y_3 seront de grands nombres; puis on aura φ' à l'aide des deux équations

$$\cos\varphi' = -\frac{\mathrm{K}}{i'} \cdot \frac{\cos\omega}{\mathrm{a}' + \frac{1}{\mathrm{a}'} + \mathrm{b}' + \frac{1}{\mathrm{b}'}}, \quad \sin\varphi' = -\frac{\mathrm{K}}{i'} \cdot \frac{\sin\omega}{\mathrm{b}' + \frac{1}{\mathrm{b}'} - \mathrm{a}' - \frac{1}{\mathrm{a}'}}.$$

Observons d'ailleurs que quand l'excentricité ε' sera suffisamment petite, il pourra être préférable, après avoir obtenu H, K et ω, de calculer a′, b′ et φ' par des approximations successives, comme il a été indiqué à la fin du § VI.

Avant d'aller plus loin, il faudra se procurer les nombres $\mathcal{E}'_0$, $\mathcal{E}'_1$, $\mathcal{E}'_2, \ldots$, au moyen des formules

$$\gamma' = \frac{n'\varepsilon'}{2}, \quad \mathcal{E}'_n = \frac{\gamma'^n}{1.2\ldots n}\left(1 - \frac{\gamma'^2}{1.(n+1)} + \frac{\gamma'^4}{1.2.(n+1)(n+2)} - \ldots\right) \text{ (*)} :$$

le premier, $\mathcal{E}'_0$, devra être calculé avec p décimales au moins, et les suivants avec des degrés d'approximation dont on jugera sans peine en considérant qu'ils doivent être substitués dans la formule

$$\mathrm{A}'_{n'} = \Sigma_{l'}\left(1 - \frac{l'}{n'}\right)\mathcal{E}'_{l'}\,\mathcal{A}'_{n'-l'}.$$

Cette même formule, jointe à l'équation

$$\mathcal{A}'_{n'} = \sqrt{\frac{2\mathrm{a}'\mathrm{b}'}{i'}}\Big[\mathfrak{A}'_{n'}\mathfrak{B}'_0 e^{-n'\varphi'\sqrt{-1}} + \mathfrak{A}'_{n'+1}\mathfrak{B}'_1 e^{-(n'+2)\varphi'\sqrt{-1}} + \mathfrak{A}'_{n'+2}\mathfrak{B}'_2 e^{-(n'+4)\varphi'\sqrt{-1}} + \ldots$$
$$+ \mathfrak{A}'_{n'-1}\mathfrak{B}'_1 e^{-(n'-2)\varphi'\sqrt{-1}} + \mathfrak{A}'_{n'-2}\mathfrak{B}'_2 e^{-(n'-4)\varphi'\sqrt{-1}} + \ldots\Big],$$

montrera également quelles sont, parmi les quantités

$$\mathfrak{A}'_{n'},\ \mathfrak{A}'_{n'+1},\ \mathfrak{A}'_{n'+2},\ \ldots,\ \mathfrak{A}'_{n'-1},\ \mathfrak{A}'_{n'-2},\ \ldots,\ \mathfrak{B}'_0,\ \mathfrak{B}'_1,\ \mathfrak{B}'_2,\ \ldots,$$

(*) La formule (4) pourra servir à vérifier les calculs.

celles qu'il sera nécessaire de déterminer, et avec quel degré d'approximation on devra les calculer. On les obtiendra d'ailleurs à l'aide des deux formules

$$\mathfrak{A}'_n = \mathfrak{A}'_{-n} = \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots(2n)} \cdot \frac{\mathrm{a}'^n}{\sqrt{1-\mathrm{a}'^2}} \left[1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2n+2} \cdot \frac{\mathrm{a}'^2}{1-\mathrm{a}'^2} + \frac{1}{2.4} \cdot \frac{1}{(2n+2)(2n+4)} \left(\frac{\mathrm{a}'^2}{1-\mathrm{a}'^2} \right)^2 - \ldots \right],$$

$$\mathfrak{B}'_n = \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots(2n)} \frac{\mathrm{b}'^n}{\sqrt{1-\mathrm{b}'^2}} \left[1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2n+2} \frac{\mathrm{b}'^2}{1-\mathrm{b}'^2} + \ldots \right].$$

Cela fait, on calculera les nombres

$$\begin{array}{llllll} F_{n'}, & F_{n'-1}, & F_{n'-2}, \ldots, & F_{n'+1}, & F_{n'+2}, \ldots, \\ G_{n'}, & G_{n'-1}, & G_{n'-2}, \ldots, & G_{n'+1}, & G_{n'+2}, \ldots, \end{array}$$

au moyen des équations

$$\begin{aligned} F_{n'} = {} & \mathfrak{A}'_{n'} \mathfrak{B}'_0 \cos n'\varphi' + \mathfrak{A}'_{n'+1} \mathfrak{B}'_1 \cos(n'+2)\varphi' + \mathfrak{A}'_{n'+2} \mathfrak{B}'_2 \cos(n'+4)\varphi' + \ldots \\ & + \mathfrak{A}'_{n'-1} \mathfrak{B}'_1 \cos(n'-2)\varphi' + \mathfrak{A}'_{n'-2} \mathfrak{B}'_2 \cos(n'-4)\varphi' + \ldots, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_{n'} = {} & -\mathfrak{A}'_{n'} \mathfrak{B}'_0 \sin n'\varphi' - \mathfrak{A}'_{n'+1} \mathfrak{B}'_1 \sin(n'+2)\varphi' - \mathfrak{A}'_{n'+2} \mathfrak{B}'_2 \sin(n'+4)\varphi' - \ldots \\ & - \mathfrak{A}'_{n'-1} \mathfrak{B}'_1 \sin(n'-2)\varphi' - \mathfrak{A}'_{n'-2} \mathfrak{B}'_2 \sin(n'-4)\varphi' - \ldots, \end{aligned}$$

et alors, en représentant par $\mathrm{V}\cos\mathrm{v}$ et $\mathrm{V}\sin\mathrm{v}$ la partie réelle et le coefficient de $\sqrt{-1}$ dans le produit $\mathrm{A}'_{n'}(1-\varepsilon\cos\psi)$, on aura, pour déterminer V et v, les formules

$$\mathrm{V}\cos\mathrm{v} = (1-\varepsilon\cos\psi)\sqrt{\frac{2\mathrm{a}'\mathrm{b}'}{i'}}\,\Sigma_{l'}\left(1-\frac{l'}{n}\right)\mathcal{E}'_{l'}\,F_{n'-l'},$$

$$\mathrm{V}\sin\mathrm{v} = (1-\varepsilon\cos\psi)\sqrt{\frac{2\mathrm{a}'\mathrm{b}'}{i'}}\,\Sigma_{l'}\left(1-\frac{l'}{n'}\right)\mathcal{E}'_{l'}\,G_{n'-l'}.$$

Ayant obtenu les quantités V et v pour chacune des k valeurs de ψ, on aura $\mathfrak{N}$ et Ω par les équations

$$\mathfrak{N}\cos\Omega = \frac{1}{k}\,\mathrm{S}_k\mathrm{V}\cos(\mathrm{v}+n\mathrm{T}),$$

$$\mathfrak{N}\sin\Omega = \frac{1}{k}\,\mathrm{S}_k\mathrm{V}\sin(\mathrm{v}+n\mathrm{T});$$

il ne restera plus alors qu'à substituer ces valeurs de $\mathfrak{N}$ et de Ω dans la formule

$$\Upsilon\,\mathfrak{N}\sin(n'\mathrm{T}'-n\mathrm{T}+\Omega),$$

qui est l'expression de l'inégalité cherchée.

Méthode abrégée pour le cas où, le nombre n' étant considérable, l'excentricité ε' est très-petite.

XV. La méthode qui vient d'être expliquée fait dépendre le calcul de $A'_{n'}$ de la détermination préalable des quantités

$$\mathcal{A}'_{n'}, \quad \mathcal{A}'_{n'-1}, \quad \mathcal{A}'_{n'-2}, \ldots, \quad \mathcal{A}'_{n'+1}, \quad \mathcal{A}'_{n'+2}, \ldots.$$

Mais lorsque l'excentricité ε' est une petite fraction, n' étant d'ailleurs un nombre considérable, on peut évaluer $A'_{n'}$ à l'aide d'une formule approchée dont l'emploi est beaucoup plus expéditif.

Pour parvenir à cette expression de $A'_{n'}$, M. Cauchy fait usage de quelques formules qu'il conviendra d'établir d'abord (*). Toutefois, en les démontrant nous supprimerons, pour abréger, l'examen des conditions de convergence des séries dont nous nous servirons; on s'assurera aisément que ces conditions se trouvent remplies dans les applications.

Soit u une fonction de x; désignons par Δu sa différence première pour un accroissement de x égal à l'unité. En nommant z la somme $u + \Delta u$, on aura la suite d'équations

$$u + \Delta u = z, \quad \Delta u + \Delta^2 u = \Delta z, \quad \Delta^2 u + \Delta^3 u = \Delta^2 z, \ldots,$$

dont chacune s'obtient en égalant les différences des deux membres de la précédente. Si on les ajoute après les avoir multipliées respectivement par $+1$, -1, $+1$, etc, on trouve

$$u = z - \Delta z + \Delta^2 z - \Delta^3 z + \ldots.$$

Les équations

$$u + \Delta u = z, \quad u = z - \Delta z + \Delta^2 z - \Delta^3 z + \ldots,$$

dont la seconde est une conséquence de la première, peuvent s'écrire symboliquement

$$z = (1 + \Delta) u, \quad u = (1 - \Delta + \Delta^2 - \Delta^3 + \ldots) z = \frac{1}{1 + \Delta} z,$$

en convenant de réduire $\frac{1}{1+\Delta}$ en une série ordonnée suivant les puissances de Δ,

(*) J'ai cru devoir exposer en premier lieu la marche suivie par M. Cauchy, mais on trouvera plus loin (§ XVII) une autre démonstration de la formule qui donne la valeur approchée de $A'_{n'}$, démonstration fondée sur des considérations plus familières, ce me semble, à la plupart des lecteurs.

comme si la caractéristique Δ désignait un nombre, et de remplacer chaque produit d'une puissance de Δ et d'une fonction de x par la différence de la fonction dont l'ordre est égal au degré de la puissance.

Posons, pour simplifier l'écriture,

$$\frac{1}{1+\Delta} = 1 - \nabla;$$

nous conclurons de ce qui précède que l'équation

$$z = (1+\Delta)\,u$$

entraîne cette autre

$$u = (1-\nabla)\,z.$$

Supposons, par exemple, la variable x égale à un nombre entier positif n et faisons

$$u = [s]_n,$$

en désignant par $[s]_n$ l'expression $\frac{s(s+1)\ldots(s+n-1)}{1.2\ldots n}$, on aura d'une part

$$\Delta[s]_n = \frac{s(s+1)\ldots(s+n)}{1.2\ldots(n+1)} - \frac{s(s+1)\ldots(s+n-1)}{1.2\ldots n} = \frac{(s-1)s\ldots(s+n-1)}{1.2\ldots(n+1)} = [s-1]_{n+1};$$

d'autre part, en vertu de ce qui précède, l'équation

$$[s]_{n+1} = [s]_n + \Delta[s]_n = (1+\Delta)[s]_n$$

entraînera celle-ci

$$[s]_n = (1-\nabla)[s]_{n+1} = [s]_{n+1} - \nabla[s]_{n+1},$$

d'où l'on tire

$$\nabla[s]_{n+1} = [s]_{n+1} - [s]_n = \Delta[s]_n = [s-1]_{n+1},$$

et par conséquent, en changeant n en $n-1$,

$$\nabla[s]_n = [s-1]_n.$$

Regardons de nouveau la quantité u comme fonction d'une variable continue x, et représentons ses dérivées successives par Du, D^2u, D^3u, ... On aura, par la série de Taylor,

$$u + \Delta u = u + \frac{Du}{1} + \frac{D^2u}{1.2} + \frac{D^3u}{1.2.3} + \ldots;$$

c'est ce que l'on peut écrire symboliquement

$$(18) \qquad (1+\Delta)\,u = e^{D} u,$$

en convenant de développer e^{D} suivant les puissances de D, comme si cette caractéristique était un nombre, et de remplacer chaque produit d'une puissance de D et d'une fonction de x par la dérivée de cette fonction dont l'ordre est égal à l'exposant de la puissance. Si maintenant on représente par u_{-1} ce que devient u quand on change x en $x-1$, on aura encore par la série de Taylor

$$u_{-1} = u - \frac{Du}{1} + \frac{D^2 u}{1.2} - \frac{D^3 u}{1.2.3} + \ldots,$$

ou symboliquement

$$u_{-1} = e^{-D} u;$$

mais, d'un autre côté, de l'équation

$$u = u_{-1} + \Delta u_{-1} = (1+\Delta)\,u_{-1}$$

on conclut

$$u_{-1} = (1-\nabla)\,u;$$

on peut donc écrire

$$(19) \qquad (1-\nabla)\,u = e^{-D} u.$$

Cela posé, considérons le produit $\left(1-\frac{x}{k}\right)^{-s} f(x)$ et admettons qu'il soit développable suivant les puissances entières, positives et négatives de x. En nommant A_n le coefficient de x^n dans ce développement et faisant $x = he^{p\sqrt{-1}}$, nous aurons

$$A_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} x^{-n}\left(1-\frac{x}{k}\right)^{-s} f(x)\,dp = \frac{h^{-n}}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} e^{-np\sqrt{-1}}\left(1-\frac{h}{k}e^{p\sqrt{-1}}\right)^{-s} f\left(he^{p\sqrt{-1}}\right)dp.$$

Admettons, d'un autre côté, que $f\left(he^{p\sqrt{-1}}\right)$ soit développable suivant les puissances entières et positives de p et posons

$$(20) \qquad f\left(he^{p\sqrt{-1}}\right) = \sum_{m=0}^{m=\infty} c_m p^m;$$

il s'ensuivra

$$A_n = \frac{h^{-n}}{2\pi}\sum_{m=0}^{m=\infty} c_m \int_{-\pi}^{+\pi} e^{-np\sqrt{-1}}\left(1-\frac{h}{k}e^{p\sqrt{-1}}\right)^{-s} p^m\,dp.$$

Mais si l'on fait

$$\mathrm{N} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} e^{-np\sqrt{-1}}\left(1 - \frac{h}{k}e^{p\sqrt{-1}}\right)^{-s} dp,$$

et que dans cette équation on regarde n comme une variable continue, on trouve, en différentiant les deux membres m fois de suite par rapport à n,

$$(\sqrt{-1})^m \mathrm{D}_n^m \mathrm{N} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} e^{-np\sqrt{-1}}\left(1 - \frac{h}{k}e^{p\sqrt{-1}}\right)^{-s} p^m dp,$$

où la caractéristique D_n^m désigne une dérivée d'ordre m prise par rapport à la variable n. La valeur de A_n pourra donc se mettre sous la forme

$$\mathrm{A}_n = h^{-n} \sum_{m=0}^{m=\infty} c_m (\sqrt{-1})^m \mathrm{D}_n^m \mathrm{N},$$

ou symboliquement

$$\mathrm{A}_n = h^{-n} f(he^{-\mathrm{D}_n})\,\mathrm{N},$$

en convenant de développer $f(he^{-\mathrm{D}_n})$ suivant les puissances de D_n conformément à la formule (20), comme si D_n était une quantité, et de remplacer, après la multiplication par N, le produit de D_n^m et de N par la dérivée $\mathrm{D}_n^m \mathrm{N}$.

Faisons à présent converger le nombre h vers la limite k, et supposons le nombre s compris entre $+1$ et $-\infty$, de sorte que N tende vers une limite finie : nous obtiendrons l'équation symbolique

$$\mathrm{A}_n = k^{-n} f(ke^{-\mathrm{D}_n})\,\mathrm{N},$$

la quantité N étant définie par la formule

$$\mathrm{N} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} e^{-np\sqrt{-1}}\left(1 - e^{p\sqrt{-1}}\right)^{-s} dp. \tag{21}$$

Soit maintenant $\mathrm{F}(u, v)$ une fonction des deux variables u et v développable suivant les puissances entières et positives de u et de v; remplaçons dans les formules précédentes $f(x)$ par $\mathrm{F}\left(x, \frac{1}{x}\right)$ et nous aurons pour le coefficient de x^n, dans le développement de $\left(1 - \frac{x}{k}\right)^{-s} \mathrm{F}\left(x, \frac{1}{x}\right)$ suivant les puissances positives et

négatives de x, l'expression symbolique

$$A_n = k^{-n} F(k e^{-D_n},\ k^{-1} e^{D_n}) N,$$

N étant toujours défini par la formule (21). Mais dans cette expression de A_n, on peut, en vertu des formules (18) et (19), remplacer e^{-D_n} par $1 - \nabla$ et e^{D_n} par $1 + \Delta$, les caractéristiques Δ, ∇ se rapportant à des accroissements de n égaux à l'unité : alors il n'est plus nécessaire de regarder n comme une variable continue, et en lui attribuant uniquement des valeurs entières et positives, auquel cas N se réduit à $[s]_n$, on obtient enfin, pour calculer A_n, la formule symbolique

$$(22) \qquad A_n = k^{-n} F(k - k\nabla,\ k^{-1} + k^{-1}\Delta)[s]_n.$$

Pour en faire usage, il faudra développer la fonction $F(k - k\nabla,\ k^{-1} + k^{-1}\Delta)$ suivant les puissances entières et positives des symboles ∇, Δ; chaque terme du second membre contiendra alors un facteur de la forme $\Delta^m \nabla^{m'} [s]_n$ qu'il sera aisé d'évaluer; car des formules

$$\Delta[s]_n = [s - 1]_{n+1}, \quad \nabla[s]_n = [s - 1]_n$$

on conclut immédiatement

$$\Delta^m \nabla^{m'} [s]_n = [s - m - m']_{n+m}.$$

XVI. Revenons à présent au développement de $\frac{1}{\iota}$ suivant les puissances de l'exponentielle $e^{T'\sqrt{-1}}$, développement dans lequel le coefficient de $e^{n'T'\sqrt{-1}}$ a été désigné par $A'_{n'}$. En vertu de l'équation (10), on peut dire que $A'_{n'}$ est aussi le coefficient de $x'^{n'}$ dans le développement de la fonction

$$\varphi(x') = \frac{1}{\iota}\left[1 - \frac{\varepsilon'}{2}\left(x' + \frac{1}{x'}\right)\right] e^{\gamma'\left(x' - \frac{1}{x'}\right)},$$

suivant les puissances de x'. Mais de la formule (8) on conclut

$$\varphi(x') = \left(1 - \frac{x'}{a'^{-1} e^{\varphi'\sqrt{-1}}}\right)^{-\frac{1}{2}} F\left(x',\ \frac{1}{x'}\right),$$

la fonction F étant définie par l'équation

$$F(u,v) = \sqrt{\frac{2a'b'}{i'}}\left(1 - a'e^{\varphi'\sqrt{-1}}v\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1 - b'e^{\varphi'\sqrt{-1}}u\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1 - b'e^{-\varphi'\sqrt{-1}}v\right)^{-\frac{1}{2}}$$
$$\times\left[1 - \frac{\varepsilon'}{2}(u+v)\right]e^{\gamma'(u-v)}.$$

On pourra donc, en vertu de la formule (22), calculer la valeur de $A'_{n'}$ à l'aide de l'équation symbolique

$$(23)\qquad A'_{n'} = \xi^{-n'}F(\xi - \xi\nabla,\ \xi^{-1} + \xi^{-1}\Delta)\left[\frac{1}{2}\right]_{n'},$$

la fonction F étant celle que définit l'équation précédente, et la lettre ξ désignant la quantité $a'^{-1}\,e^{\varphi'\sqrt{-1}}$.

Admettons à présent, d'une part, que n' soit un nombre considérable, et de l'autre que ε' soit une petite fraction : la quantité

$$\Delta\left[\frac{1}{2}\right]_{n'} = -\frac{1}{2n'+2}\left[\frac{1}{2}\right]_{n'}$$

étant très-petite en comparaison de $\left[\frac{1}{2}\right]_{n'}$, nous pourrons négliger Δ^2 dans la formule (23). Nous y remplacerons donc par Δ la caractéristique

$$\nabla = \Delta - \Delta^2 + \Delta^3 - \ldots,$$

et dans le développement de $F(\xi - \xi\Delta,\ \xi^{-1} + \xi^{-1}\Delta)$ suivant les puissances de Δ, nous ne garderons que la première puissance de ce symbole ; de plus nous négligerons ε'^2 et le produit de Δ par ε'. Alors, en observant que b' est de l'ordre de ε'^2, nous aurons l'équation approchée

$$\mathrm{l}F(u,v) = \mathrm{l}\sqrt{\frac{2a'b'}{i'}} - \frac{1}{2}\mathrm{l}\left(1 - a'e^{\varphi'\sqrt{-1}}v\right) + \mathrm{l}\left[1 - \frac{\varepsilon'}{2}(u+v)\right] + \gamma'(u-v),$$

où la lettre l désigne des logarithmes népériens, et nous en déduirons

$$\mathrm{l}F(\xi - \xi\nabla,\ \xi^{-1} + \xi^{-1}\Delta) = \mathrm{l}\sqrt{\frac{2a'b'}{i'}} - \frac{1}{2}\mathrm{l}(1 - a'^2) + \mathrm{l}\left[1 - \frac{\varepsilon'}{2}(\xi + \xi^{-1})\right]$$
$$+ \gamma'(\xi - \xi^{-1}) + \frac{1}{2}\frac{a'^2}{1 - a'^2}\Delta - \gamma'(\xi + \xi^{-1})\Delta,$$

d'où, en négligeant toujours Δ^2,

$$\begin{aligned}&F(\xi-\xi\nabla,\ \xi^{-1}+\xi^{-1}\Delta)\\ &=\sqrt{\frac{2\mathrm{a}'\mathrm{b}'}{i'}}\,(1-\mathrm{a}'^2)^{-\frac{1}{2}}\left[1-\frac{\varepsilon'}{2}(\xi+\xi^{-1})\right]e^{\gamma'(\xi-\xi^{-1})}\left[1+\frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{a}'^2}{1-\mathrm{a}'^2}\Delta-\gamma'(\xi+\xi^{-1})\Delta\right].\end{aligned}$$

Il en résulte

$$\begin{aligned}&F(\xi-\xi\nabla,\ \xi^{-1}+\xi^{-1}\Delta)\left[\frac{1}{2}\right]_{n'}\\ &=\sqrt{\frac{2\mathrm{a}'\mathrm{b}'}{i'}}\,(1-\mathrm{a}'^2)^{-\frac{1}{2}}\left[1-\frac{\varepsilon'}{2}(\xi+\xi^{-1})\right]e^{\gamma'(\xi-\xi^{-1})}\left[1-\frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{a}'^2}{1-\mathrm{a}'^2}\,\frac{1}{2n'+2}\right.\\ &\qquad\left.+\gamma'(\xi+\xi^{-1})\frac{1}{2n'+2}\right]\left[\frac{1}{2}\right]_{n'}.\end{aligned}$$

ou bien au degré d'approximation convenu, ce qui permet d'écrire $\frac{1}{2n'}$ à la place de $\frac{1}{2n'+2}$,

$$\begin{aligned}&F(\xi-\xi\nabla,\ \xi^{-1}+\xi^{-1}\Delta)\left[\frac{1}{2}\right]_{n'}\\ &=\sqrt{\frac{2\mathrm{a}'\mathrm{b}'}{i'}}\,(1-\mathrm{a}'^2)^{-\frac{1}{2}}\,e^{-\frac{\varepsilon'}{2}(\xi+\xi^{-1})+\gamma'(\xi-\xi^{-1})-\frac{1}{4n'}\frac{\mathrm{n}'^2}{1-\mathrm{a}'^2}+\frac{\gamma'}{2n'}(\xi+\xi^{-1})}\left[\frac{1}{2}\right]_{n'},\end{aligned}$$

ou enfin, en observant que γ' est égal à $\frac{n'\varepsilon'}{2}$,

$$F(\xi-\xi\nabla,\ \xi^{-1}+\xi^{-1}\Delta)\left[\frac{1}{2}\right]_{n'}=\sqrt{\frac{2\mathrm{a}'\mathrm{b}'}{i'}}\,(1-\mathrm{a}'^2)^{-\frac{1}{2}}\,e^{\gamma'(\xi-\xi^{-1})-\frac{\varepsilon'}{4}(\xi+\xi^{-1})-\frac{1}{4n'}\frac{\mathrm{a}'^2}{1-\mathrm{a}'^2}}\left[\frac{1}{2}\right]_{n'}.$$

Si donc on pose

$$\mathfrak{S}=\sqrt{\frac{2\mathrm{a}'\mathrm{b}'}{i'}}\,(1-\mathrm{a}'^2)^{-\frac{1}{2}}\,\xi^{-n'}\left[\frac{1}{2}\right]_{n'},\quad \mathfrak{T}=\gamma'(\xi-\xi^{-1})-\frac{\varepsilon'}{4}(\xi+\xi^{-1})-\frac{1}{4n'}\,\frac{\mathrm{a}'^2}{1-\mathrm{a}'^2},$$

on aura la valeur de $A'_{n'}$ par la formule

$$A'_{n'}=\mathfrak{S}\,e^{\mathfrak{T}}. \tag{24}$$

XVII. On peut donner de cette formule une autre démonstration indépendante des équations symboliques établies dans le § XV. Ainsi qu'on l'a déjà dit, il suit de l'équation (10) que $A'_{n'}$ est le coefficient de $x'^{n'}$ dans le développe-

ment de la fonction

$$\varphi(x') = \frac{1}{\iota}\left[1 - \frac{\varepsilon'}{2}\left(x' + \frac{1}{x'}\right)\right] e^{\gamma'\left(x' - \frac{1}{x'}\right)},$$

et il s'agit de le calculer approximativement, en regardant ε' et $\frac{1}{n'}$ comme de petites quantités dont on négligera les carrés et le produit. On a

$$\frac{1}{\iota} = \sqrt{\frac{2a'b'}{i'}}\left(1 - a'e^{-\varphi'\sqrt{-1}}x'\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1 - a'e^{\varphi'\sqrt{-1}}\frac{1}{x'}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1 - b'e^{\varphi'\sqrt{-1}}x'\right)^{-\frac{1}{2}}$$
$$\times\left(1 - b'e^{-\varphi'\sqrt{-1}}\frac{1}{x'}\right)^{-\frac{1}{2}};$$

mais b′ est de l'ordre de ε'^2 ; on peut donc remplacer les deux derniers facteurs par l'unité, et si l'on pose, comme ci-dessus,

$$\xi = a'^{-1}e^{\varphi'\sqrt{-1}},$$

on aura

$$\frac{1}{\iota} = \sqrt{\frac{2a'b'}{i'}}\left(1 - \frac{x'}{\xi}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{a'^2\xi}{x'}\right)^{-\frac{1}{2}},$$

et par suite

$$\varphi(x') = \sqrt{\frac{2a'b'}{i'}}\left(1 - \frac{x'}{\xi}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{a'^2\xi}{x'}\right)^{-\frac{1}{2}}\left[1 - \frac{\varepsilon'}{2}\left(x' + \frac{1}{x'}\right)\right] e^{\gamma'\left(x' - \frac{1}{x'}\right)}.$$

Mais si l'on appelle $C_{n'}$ le coefficient de $x'^{n'}$ dans le développement du produit

$$\psi(x') = \left(1 - \frac{x'}{\xi}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{a'^2\xi}{x'}\right)^{-\frac{1}{2}},$$

la valeur de $C_{n'}$ se déduira de l'expression de H_n donnée dans le § III en y remplaçant n par n', α par $a'^2\xi$, β par ξ, s et t par $\frac{1}{2}$; il viendra ainsi, en négligeant le carré de $\frac{1}{n'}$, et représentant, comme ci-dessus, l'expression $\frac{s(s+1)\ldots(s+n'-1)}{1.2\ldots n'}$ par $[s]_{n'}$,

$$C_{n'} = \left[\frac{1}{2}\right]_{n'}\frac{\xi^{-n'}}{\sqrt{1 - a'^2}}\left(1 - \frac{1}{4n'}\frac{a'^2}{1 - a'^2}\right).$$

Soit maintenant $D_{n'}$ le coefficient de $x'^{n'}$ dans le développement du produit

$$\varpi(x') = \left(1-\frac{x'}{\xi}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(1-\frac{a'^2\xi}{x'}\right)^{-\frac{1}{2}} \left[1-\frac{\varepsilon'}{2}\left(x'+\frac{1}{x'}\right)\right] = \psi(x')\left[1-\frac{\varepsilon'}{2}\left(x'+\frac{1}{x'}\right)\right]:$$

on aura

$$D_{n'} = C_{n'} - \frac{\varepsilon'}{2}(C_{n'-1}+C_{n'+1}) = C_{n'}\left[1-\frac{\varepsilon'}{2}\left(\frac{C_{n'-1}}{C_{n'}}+\frac{C_{n'+1}}{C_{n'}}\right)\right]:$$

mais si dans les rapports $\frac{C_{n'-1}}{C_{n'}}$, $\frac{C_{n'+1}}{C_{n'}}$, qui sont multipliés par $\frac{\varepsilon'}{2}$, on néglige $\frac{1}{n'}$, on aura simplement

$$\frac{C_{n'-1}}{C_{n'}} = \xi, \quad \frac{C_{n'+1}}{C_{n'}} = \frac{1}{\xi};$$

il en résulte

$$D_{n'} = C_{n'}\left[1-\frac{\varepsilon'}{2}\left(\xi+\frac{1}{\xi}\right)\right] = \left[\frac{1}{2}\right]_{n'} \frac{\xi^{-n'}}{\sqrt{1-a'^2}}\left[1-\frac{1}{4n'}\cdot\frac{a'^2}{1-a'^2}-\frac{\varepsilon'}{2}\left(\xi+\frac{1}{\xi}\right)\right].$$

Appelons m un nombre entier positif ou négatif, mais peu considérable, en sorte que $\frac{m}{n'}$ puisse être regardé comme étant du même ordre que $\frac{1}{n'}$: on aura sensiblement, d'après la formule précédente,

$$D_{n'+m} = \left[\frac{1}{2}\right]_{n'+m} \frac{\xi^{-(n'+m)}}{\sqrt{1-a'^2}}\left[1-\frac{1}{4n'}\cdot\frac{a'^2}{1-a'^2}-\frac{\varepsilon'}{2}\left(\xi+\frac{1}{\xi}\right)\right],$$

d'où il suit

$$\frac{D_{n'+m}}{D_{n'}} = \frac{\left[\frac{1}{2}\right]_{n'+m}}{\left[\frac{1}{2}\right]_{n'}}\xi^{-m}.$$

Mais le rapport $\frac{\left[\frac{1}{2}\right]_{n'+m}}{\left[\frac{1}{2}\right]_{n'}}$ pouvant se mettre sous la forme

$$\left(1-\frac{1}{2(n'+1)}\right)\left(1-\frac{1}{2(n'+2)}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{2(n'+m)}\right),$$

lorsque m est un nombre positif, et sous la forme

$$\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2(n'-m'+1)}\right)\left(1-\frac{1}{2(n'-m'+2)}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{2n'}\right)},$$

lorsque m est un nombre négatif $-m'$, on voit que ce rapport se réduit à

$$\left(1-\frac{1}{2n'}\right)^m,$$

quand on néglige les quantités de l'ordre de $\frac{1}{n'^2}$; si donc on pose

$$\frac{1-\frac{1}{2n'}}{\xi}=\omega,$$

on aura pour les petites valeurs de m, positives et négatives,

$$D_{n'+m}=\omega^m D_{n'}.$$

Revenons maintenant à la fonction

$$\varphi(x')=\sqrt{\frac{2a'b'}{i'}}\,\varpi(x')\,e^{\gamma'\left(x'-\frac{1}{x'}\right)};$$

si nous y remplaçons $\varpi(x')$ par son développement

$$\ldots+D_{n'-1}x'^{n'-1}+D_{n'}x'^{n'}+D_{n'+1}x'^{n'+1}+\ldots$$

et $e^{\gamma'\left(x'-\frac{1}{x'}\right)}$ par

$$\ldots+\mathcal{E}'_{-1}x'^{-1}+\mathcal{E}'_0+\mathcal{E}'_1x'+\ldots,$$

nous trouverons pour le coefficient de $x'^{n'}$ dans $\varphi(x')$ la valeur

$$A'_{n'}=\sqrt{\frac{2a'b'}{i'}}\,\Sigma_m\mathcal{E}'_m D_{n'-m}.$$

Mais les nombres $\mathcal{E}'_m$ décroissant rapidement à mesure que la valeur numérique de m augmente, les seuls termes de la somme Σ_m qui auront une valeur sensible seront ceux qui répondront aux valeurs de m voisines de zéro : on pourra donc dans l'expression précédente remplacer $D_{n'-m}$ par $\omega^{-m}D_{n'}$ et écrire

$$A'_{n'}=\sqrt{\frac{2a'b'}{i'}}\,D_{n'}\Sigma_m\mathcal{E}'_m\omega^{-m}.$$

On a d'ailleurs

$$\Sigma_m\mathcal{E}'_m\omega^{-m}=e^{\gamma'\left(\frac{1}{\omega}-\omega\right)}=e^{\gamma'\left(\frac{\xi}{1-\frac{1}{2n'}}-\frac{1-\frac{1}{2n'}}{\xi}\right)},$$

ou, en négligeant $\frac{1}{n'^2}$,

$$\Sigma_m \mathcal{E}'_m \omega^{-m} = e^{\gamma'\left[\left(1+\frac{1}{2n'}\right)\xi - \left(1-\frac{1}{2n'}\right)\frac{1}{\xi}\right]} = e^{\gamma'\left(\xi-\frac{1}{\xi}\right)+\frac{\varepsilon'}{4}\left(\xi+\frac{1}{\xi}\right)}.$$

Mettons pour $D_{n'}$ et $\Sigma_m \mathcal{E}'_m \omega^{-m}$ leurs valeurs, nous trouverons

$$A'_{n'} = \sqrt{\frac{2a'b'}{i'}}\left[\frac{1}{2}\right]_{n'} \frac{\xi^{-n'}}{\sqrt{1-a'^2}}\left[1 - \frac{1}{4n'}\cdot\frac{a'^2}{1-a'^2} - \frac{\varepsilon'}{2}\left(\xi+\frac{1}{\xi}\right)\right] e^{\gamma'\left(\xi-\frac{1}{\xi}\right)+\frac{\varepsilon'}{4}\left(\xi+\frac{1}{\xi}\right)}.$$

Observons enfin qu'au degré d'approximation adopté, le facteur

$$1 - \frac{1}{4n'}\cdot\frac{a'^2}{1-a'^2} - \frac{\varepsilon'}{2}\left(\xi+\frac{1}{\xi}\right)$$

peut être remplacé par l'exponentielle $e^{-\frac{1}{4n'}\cdot\frac{a'^2}{1-a'^2}-\frac{\varepsilon'}{2}\left(\xi+\frac{1}{\xi}\right)}$, et il nous viendra

$$A'_{n'} = \sqrt{\frac{2a'b'}{i'}}\left[\frac{1}{2}\right]_{n'} \frac{\xi^{-n'}}{\sqrt{1-a'^2}} e^{\gamma'\left(\xi-\frac{1}{\xi}\right)-\frac{\varepsilon'}{4}\left(\xi+\frac{1}{\xi}\right)-\frac{1}{4n'}\frac{a'^2}{1-a'^2}},$$

expression identique à celle que donne la formule (24).

XVIII. D'après cette formule, dans laquelle il faut se souvenir que ξ désigne la quantité imaginaire $a'^{-1}e^{\varphi'\sqrt{-1}}$, on voit que si les produits du coefficient de l'inégalité par des nombres de l'ordre des deux fractions $\frac{1}{n'^2}$, ε'^2 sont négligeables, la suite des calculs prescrits dans le § XIV pourra être modifiée comme il suit.

Après avoir obtenu les quantités a′, b′, φ' pour chacune des k valeurs attribuées à l'angle ψ, on calculera l'angle v par la formule

$$v = \frac{648000}{\pi}\left(\frac{2n'-1}{4}a'^{-1} + \frac{2n'+1}{4}a'\right)\varepsilon'\sin\varphi' - n'\varphi'$$

qui le fournira exprimé en secondes d'arc; puis le nombre V par l'équation

$$V = \frac{1.3\ldots(2n'-1)}{2.4\ldots(2n')}\sqrt{\frac{2a'b'}{i'}}\cdot\frac{a'^{n'}}{\sqrt{1-a'^2}} e^{\left(\frac{2n'-1}{4}a'^{-1}-\frac{2n'+1}{4}a'\right)\varepsilon'\cos\varphi'-\frac{1}{4n'}\cdot\frac{a'^2}{1-a'^2}}(1-\varepsilon\cos\psi).$$

Ayant obtenu V et v, on terminera le calcul comme au § XIV.

DEUXIÈME SECTION.

EXTENSION DE LA MÉTHODE DE M. CAUCHY AU CALCUL DES INÉGALITÉS PROVENANT DE LA PARTIE $\frac{fm'r\cos\delta}{r'^2}$ DE LA FONCTION PERTURBATRICE (*).

I. En exposant sa méthode pour le calcul des inégalités à longues périodes, M. Cauchy n'a considéré que la partie $-\frac{fm'}{\mathfrak{r}}$ de la fonction perturbatrice et a négligé l'autre partie $\frac{fm'r\cos\delta}{r'^2}$. En effet, lorsque n et n' sont des nombres considérables, le coefficient du terme en $e^{(n'T'-nT)\sqrt{-1}}$ dans $\frac{fm'r\cos\delta}{r'^2}$ est d'un ordre beaucoup plus élevé relativement aux excentricités et aux inclinaisons que le terme correspondant de $-\frac{fm'}{\mathfrak{r}}$. Il peut arriver cependant qu'on veuille appliquer la même méthode à des cas dans lesquels la portion d'inégalité provenant de la fonction $\frac{fm'r\cos\delta}{r'^2}$ ne serait pas absolument négligeable : cette extension n'offre, ainsi qu'on va le voir, aucune difficulté.

Il s'agit de calculer le coefficient $B_{n',-n}$ de $e^{(n'T'-nT)\sqrt{-1}}$ dans le développement de $-\frac{r\cos\delta}{r'^2}$, suivant les puissances de $e^{T\sqrt{-1}}$ et de $e^{T'\sqrt{-1}}$, avec assez de précision pour que l'erreur commise sur le module de ce coefficient soit inférieure à la limite $\aleph$ déterminée dans la Section précédente. Pour cela, reprenons l'équation (6) de cette Section ; multiplions les deux membres par $-2rr'$ et ayons égard aux formules

$$r\cos\nu = a(\cos\psi - \varepsilon), \quad r\sin\nu = a\sqrt{1-\varepsilon^2}\sin\psi,$$
$$r'\cos\nu' = a'(\cos\psi' - \varepsilon'), \quad r'\sin\nu' = a'\sqrt{1-\varepsilon'^2}\sin\psi';$$

nous trouverons

$$-2rr'\cos\delta = E' + F'\cos\psi + G'\sin\psi,$$

où l'on a fait, pour abréger,

$$E' = f\varepsilon\varepsilon' - f\varepsilon\cos\psi' + d'\sin\psi', \quad F' = -f\varepsilon' + f\cos\psi' + h'\sin\psi',$$
$$G' = d + h\cos\psi' + g\sin\psi';$$

(*) Les lettres dont la signification ne sera pas expliquée de nouveau dans cette Section y auront le même sens que dans la Section précédente.

il suit de là

$$(a) \qquad -\frac{r\cos\delta}{r'^2} = \frac{E'}{2r'^3} + \frac{F'}{2r'^3}\cos\psi + \frac{G'}{2r'^3}\sin\psi.$$

Nommons B_{-n} le coefficient de $e^{-nT\sqrt{-1}}$ dans le développement de $-\frac{r\cos\delta}{r'^2}$ suivant les puissances de $e^{T\sqrt{-1}}$; nous aurons, d'après la formule (1),

$$(b) \qquad B_{-n} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\left(-\frac{r\cos\delta}{r'^2}\right) e^{nT\sqrt{-1}}\, dT,$$

ou bien, en vertu de la relation $T = \psi - \varepsilon\sin\psi$ et de l'équation (a),

$$B_{-n} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\left(\frac{E'}{2r'^3} + \frac{F'}{2r'^3}\cos\psi + \frac{G'}{2r'^3}\sin\psi\right) e^{(n\psi - 2\gamma\sin\psi)\sqrt{-1}}(1 - \varepsilon\cos\psi)\, d\psi$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\left(\frac{E'}{2r'^3} + \frac{F' - G'\sqrt{-1}}{4r'^3}x + \frac{F' + G'\sqrt{-1}}{4r'^3}x^{-1}\right)x^n e^{-\gamma(x - x^{-1})}\left[1 - \frac{\varepsilon}{2}(x + x^{-1})\right] d\psi.$$

Mais on déduit de la formule (5), en y remplaçant z par x^{-1},

$$e^{-\gamma(x - x^{-1})}\left[1 - \frac{\varepsilon}{2}(x + x^{-1})\right] = \Sigma_l\left(1 - \frac{l}{n}\right)\mathcal{E}_l x^{-l};$$

il en résulte

$$B_{-n} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\left(\frac{E'}{2r'^3} + \frac{F' - G'\sqrt{-1}}{4r'^3}x + \frac{F' + G'\sqrt{-1}}{4r'^3}x^{-1}\right) d\psi\, \Sigma_l\left(1 - \frac{l}{n}\right)\mathcal{E}_l x^{n-l},$$

ou bien

$$B_{-n} = \frac{E'}{2r'^3}\Sigma_l\left[\left(1 - \frac{l}{n}\right)\mathcal{E}_l \cdot \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} x^{n-l}\, d\psi\right]$$
$$+ \frac{F' - G'\sqrt{-1}}{4r'^3}\Sigma_l\left[\left(1 - \frac{l}{n}\right)\mathcal{E}_l \cdot \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} x^{n-l+1}\, d\psi\right]$$
$$+ \frac{F' + G'\sqrt{-1}}{4r'^3}\Sigma_l\left[\left(1 - \frac{l}{n}\right)\mathcal{E}_l \cdot \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} x^{n-l-1}\, d\psi\right].$$

Si maintenant on observe que l'intégrale $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} x^q\, d\psi$ se réduit à l'unité pour $q = 0$, et à zéro pour toute autre valeur entière de q, on verra l'équation précé-

dente se réduire à celle-ci

$$B_{-n} = \frac{1}{4nr'^3}\left[F'(\mathcal{E}_{n-1} - \mathcal{E}_{n+1}) + G'(\mathcal{E}_{n-1} + \mathcal{E}_{n+1})\sqrt{-1}\right],$$

ce que l'on peut écrire, en vertu de l'équation (4),

$$(c) \qquad B_{-n} = \frac{1}{2nr'^3}\left(F'\frac{\mathcal{E}_{n-1} - \mathcal{E}_{n+1}}{2} + G'\frac{\mathcal{E}_n}{\varepsilon}\sqrt{-1}\right).$$

A l'aide de cette formule il sera facile de calculer B_{-n} pour chaque valeur donnée de ψ'.

Soit maintenant $B'_{n'}$ le coefficient de $e^{n'T'\sqrt{-1}}$ dans le développement de $-\frac{r\cos\delta}{r'^2}$ suivant les puissances de $e^{T'\sqrt{-1}}$; soit de plus $\mathfrak{B}'_{n'}$ le coefficient de $x'^{n'}$ dans le développement de la même quantité suivant les puissances de $x' = e^{\psi'\sqrt{-1}}$. On aura, en appliquant toujours la formule (1), l'équation

$$\begin{aligned} B'_{n'} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\left(-\frac{r\cos\delta}{r'^2}\right)e^{-n'T'\sqrt{-1}}dT' \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}(\Sigma_{l'}\mathfrak{B}'_{n'-l'}x'^{n'-l'})\,x'^{-n'}e^{\gamma'(x'-x'^{-1})}\left[1 - \frac{\varepsilon'}{2}(x' + x'^{-1})\right]d\psi', \end{aligned}$$

ou, ce qui est la même chose,

$$B'_{n'} = \Sigma_{l'}\left\{\mathfrak{B}'_{n'-l'}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}x'^{-l'}e^{\gamma'(x'-x'^{-1})}\left[1 - \frac{\varepsilon'}{2}(x' + x'^{-1})\right]d\psi'\right\}.$$

La quantité multipliée par $\mathfrak{B}'_{n-l'}$ sous le signe $\Sigma_{l'}$ n'est autre chose que le coefficient de $x'^{l'}$ dans le développement du produit $e^{\gamma'(x'-x'^{-1})}\left[1 - \frac{\varepsilon'}{2}(x' + x'^{-1})\right]$ suivant les puissances de x'; elle est donc égale à $\left(1 - \frac{l'}{n'}\right)\mathcal{E}'_{l'}$, en vertu de la formule (5) : il en résulte

$$(d) \qquad B'_{n'} = \Sigma_{l'}\left(1 - \frac{l'}{n'}\right)\mathcal{E}'_{l'}\mathfrak{B}'_{n'-l'}.$$

Mais si l'on multiplie par $x'^{-n'+l'}$ les deux membres de l'équation

$$-\frac{r\cos\delta}{r'^2} = \Sigma_{l'}\mathfrak{B}'_{n'-l'}x'^{n'-l'},$$

qu'on y remplace ensuite x' par les diverses racines de l'équation binôme $x'^{k'} = 1$, et qu'enfin on divise par k' la somme des équations ainsi obtenues, on trouvera

$$\frac{1}{k'} S_{k'} \left(-\frac{r\cos\delta}{r'^2}\right) x'^{-n'+l'} = \mathfrak{B}'_{n'-l'} + \mathfrak{B}'_{n'-l'+k'} + \mathfrak{B}'_{n'-l'+2k'} + \ldots + \mathfrak{B}'_{n'-l'-k'} + \mathfrak{B}'_{n'-l'-2k'} + \ldots,$$

la notation $S_{k'}$ désignant une somme qui s'étend aux valeurs 0, $\frac{2\pi}{k'}$, $2.\frac{2\pi}{k'}, \ldots, (k'-1).\frac{2\pi}{k'}$ de ψ'. On tire de là

$$\mathfrak{B}'_{n'-l'} = \frac{1}{k'} S_{k'} \left(-\frac{r\cos\delta}{r'^2}\right) x'^{-n'+l'} - s',$$

où l'on a fait, pour abréger,

$$s' = \mathfrak{B}'_{n'-l'+k'} + \mathfrak{B}'_{n'-l'+2k'} + \ldots + \mathfrak{B}'_{n'-l'-k'} + \mathfrak{B}'_{n'-l'-2k'} + \ldots.$$

Substituons cette valeur de $\mathfrak{B}'_{n'-l'}$ dans l'équation (d), il viendra

$$B'_{n'} = \frac{1}{k'} S_{k'} \left(-\frac{r\cos\delta}{r'^2}\right) x'^{-n'} \Sigma_{l'} \left(1 - \frac{l'}{n'}\right) \mathcal{E}'_{l'} x'^{l'} - \Sigma_{l'} \left(1 - \frac{l'}{n'}\right) \mathcal{E}'_{l'} s',$$

ou, en vertu de la formule (5),

$$B'_{n'} = \frac{1}{k'} S_{k'} \left(-\frac{r\cos\delta}{r'^2}\right) x'^{-n'} e^{\gamma'(x'-x'^{-1})} \left[1 - \frac{\varepsilon'}{2}(x' + x'^{-1})\right] - \Sigma_{l'} \left(1 - \frac{l'}{n'}\right) \mathcal{E}'_{l'} s'.$$

Portons maintenant cette valeur de $B'_{n'}$ dans l'équation

$$B_{n',-n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} B'_{n'} e^{nT\sqrt{-1}} dT,$$

qui résulte de la formule (1), et faisons

$$\rho' = \frac{1}{2\pi} \Sigma_{l'} \left(1 - \frac{l'}{n'}\right) \mathcal{E}'_{l'} \int_{-\pi}^{+\pi} s' e^{nT\sqrt{-1}} dT;$$

nous trouverons

$$B_{n',-n} = \frac{1}{k'} S_{k'} \left\{ x'^{-n'} e^{\gamma'(x'-x'^{-1})} \left[1 - \frac{\varepsilon'}{2}(x' + x'^{-1})\right] . \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \left(-\frac{r\cos\delta}{r'^2}\right) e^{nT\sqrt{-1}} dT \right\} - \rho',$$

ou bien, en vertu de la formule (b),

$$B_{n',-n} = \frac{1}{k'} S_{k'} x'^{-n'} e^{\gamma'(x'-x'^{-1})} \left[1 - \frac{\varepsilon'}{2}(x' + x'^{-1})\right] B_{-n} - \rho':$$

on peut écrire plus simplement

$$B_{n',-n} = \frac{1}{k'} S_{k'} (1 - \varepsilon' \cos\psi') e^{-n'T'\sqrt{-1}} B_{-n} - \rho',$$

ou, si l'on veut,

$$B_{n',-n} = \frac{1}{a'k'} S_{k'} r' e^{-n'T'\sqrt{-1}} B_{-n} - \rho'.$$

Il suit de là que si l'on suppose le nombre k', non-seulement supérieur à n', mais encore assez grand pour que le module de ρ' soit inférieur à δ, on pourra négliger ρ' et calculer $B_{n',-n}$ par l'équation

$$(e) \qquad B_{n',-n} = \frac{1}{a'k'} S_{k'} r' e^{-n'T'\sqrt{-1}} B_{-n},$$

dans laquelle la valeur de B_{-n} correspondante à chacune des k' valeurs de ψ' s'obtiendra au moyen de la formule (c).

Le coefficient $B_{n',-n}$ ainsi calculé devra être ajouté au coefficient $A_{n',-n}$ déterminé à l'aide des formules de la Section I : la somme ainsi formée sera la quantité désignée par $C_{n',-n}$ avec laquelle on calculera, comme il a été dit dans cette même Section (§ IV), l'inégalité de $\int \mu dt$ correspondante à l'argument $n'T' - nT$.

II. Voyons maintenant comment on pourra assigner au nombre entier k' une valeur assez grande pour que le module de ρ' soit inférieur à δ. On a évidemment

$$\text{module de } \rho' < \text{module maximum de } \Sigma_{l'} \left(1 - \frac{l'}{n'}\right) \mathcal{C}'_{l'} s' :$$

mais le facteur $\mathcal{C}'_{l'}$ décroissant rapidement à mesure que la valeur numérique de l' augmente, il suffira, pour évaluer approximativement la somme $\Sigma_{l'} \left(1 - \frac{l'}{n'}\right) \mathcal{C}'_{l'} s'$, d'attribuer à l' un petit nombre de valeurs entières voisines de zéro : alors $\mathfrak{B}_{n'-l'-k'}$ sera le terme principal de s' et en réduisant s' à ce terme, on pourra remplacer l'inégalité précédente par celle-ci :

$$\text{module de } \rho < \text{module maximum de } \Sigma_{l'} \left(1 - \frac{l'}{n'}\right) \mathcal{C}'_{l'} \mathfrak{B}'_{-(k'-n'+l')}.$$

Cherchons une expression approchée de $\mathfrak{B}'_{-p}$, p désignant un nombre positif considérable ; pour cela observons qu'en posant, pour abréger,

$$E = f\varepsilon\varepsilon' - f\varepsilon' \cos\psi + d \sin\psi, \qquad J \cos\varpi = -f\varepsilon + f \cos\psi + h \sin\psi,$$
$$J \sin\varpi = d' + h' \cos\psi + g \sin\psi,$$

on a

$$-2rr'\cos\delta = \mathrm{E} + \mathrm{J}\cos(\psi' - \varpi) = \mathrm{E} + \frac{1}{2}\mathrm{J}e^{-\varpi\sqrt{-1}}x' + \frac{1}{2}\mathrm{J}e^{\varpi\sqrt{-1}}x'^{-1}.$$

On a d'un autre côté

$$r' = a'\left[1 - \frac{\varepsilon'}{2}(x' + x'^{-1})\right],$$

ce qu'on peut écrire

$$r' = \frac{a'\varepsilon'}{2\eta'}(1 - \eta'x')(1 - \eta'x'^{-1}),$$

en posant

$$\varepsilon' = \sin\iota', \qquad \eta' = \operatorname{tang}\frac{\iota'}{2}.$$

Il en résulte

$$\frac{1}{2r'^3} = \frac{4\eta'^3}{a'^3\varepsilon'^3}(1 - \eta'x')^{-3}(1 - \eta'x'^{-1})^{-3}$$

et par conséquent

$$-\frac{r\cos\delta}{r'^2} = \frac{2\eta'^3}{a'^3\varepsilon'^3}(1 - \eta'x')^{-3}(1 - \eta'x'^{-1})^{-3}\left(2\mathrm{E} + \mathrm{J}e^{-\varpi\sqrt{-1}}x' + \mathrm{J}e^{\varpi\sqrt{-1}}x'^{-1}\right).$$

Posons

$$(1 - \eta'x')^{-3}(1 - \eta'x'^{-1})^{-3} = \Sigma_q \theta_q x'^q;$$

il s'ensuivra

$$-\frac{r\cos\delta}{r'^2} = \frac{2\eta'^3}{a'^3\varepsilon'^3}\left(2\mathrm{E} + \mathrm{J}e^{-\varpi\sqrt{-1}}x' + \mathrm{J}e^{\varpi\sqrt{-1}}x'^{-1}\right)\Sigma_q\theta_q x'^q,$$

et si l'on observe qu'on a $\theta_{-q} = \theta_q$, on en conclura, en égalant les coefficients de x'^{-p} dans les deux membres,

$$\mathfrak{B}'_{-p} = \frac{2\eta'^3}{a'^3\varepsilon'^3}\left(2\mathrm{E}\theta_p + \mathrm{J}e^{-\varpi\sqrt{-1}}\theta_{p+1} + \mathrm{J}e^{\varpi\sqrt{-1}}\theta_{p-1}\right).$$

Mais la quantité désignée par H_n dans le § III de la Section précédente devient θ_q, lorsqu'on remplace n par q et que l'on fait

$$s = t = 3, \qquad \alpha = \frac{1}{\beta} = \eta':$$

on a donc, pour une valeur positive de q,

$$\theta_q = \frac{(q+1)(q+2)}{1.2}\frac{\eta'^q}{(1-\eta'^2)^3}\left[1 + \frac{3}{1}\cdot\frac{2}{q+1}\frac{\eta'^2}{1-\eta'^2} + \frac{3.4}{1.2}\cdot\frac{2.1}{(q+1)(q+2)}\left(\frac{\eta'^2}{1-\eta'^2}\right)^2\right],$$

ou approximativement, surtout lorsque q est un grand nombre,

$$\theta_q = \frac{(q+1)(q+2)}{2} \frac{\eta'^q}{(1-\eta'^2)^3}.$$

Si donc on regarde ε, ε' et par suite η' comme de petites quantités du premier ordre, et si l'on observe qu'alors J est de l'ordre zéro, tandis que E est du premier ordre, on verra que dans la somme $2\mathrm{E}\theta_p + \mathrm{J}e^{-\varpi\sqrt{-1}}\theta_{p+1} + \mathrm{J}e^{\varpi\sqrt{-1}}\theta_{p-1}$ le troisième terme est d'un ordre moins élevé de deux unités que les deux autres et qu'ainsi cette somme a pour valeur approchée

$$\frac{p(p+1)}{2} \frac{\eta'^{p-1}}{(1-\eta'^2)^3} \mathrm{J}e^{\varpi\sqrt{-1}}:$$

on aura par conséquent cette formule approximative

$$\mathfrak{B}'_{-p} = p(p+1) \frac{\eta'^{p+2}}{a'^3\varepsilon'^3(1-\eta'^2)^3} \mathrm{J}e^{\varpi\sqrt{-1}}.$$

Il en résulte, en remplaçant p par $k' - n' + l'$,

$$\mathfrak{B}'_{-(k'-n'+l')} = (k'-n'+l')(k'-n'+1+l') \frac{\eta'^{k'-n'+2+l'}}{a'^3\varepsilon'^3(1-\eta'^2)^3} \mathrm{J}e^{\varpi\sqrt{-1}},$$

et l'inégalité précédente devient

$$\text{mod. de } \rho' < \text{max. de } \frac{\mathrm{J}\eta'^{k'-n'+2}}{a'^3\varepsilon'^3(1-\eta'^2)^3} \Sigma_{l'} \left(1 - \frac{l'}{n'}\right)(k'-n'+l')(k'-n'+1+l') \mathcal{E}'_{l'}\eta'^{l'},$$

ou bien

$$\text{mod. de } \rho' < \text{max. de } \frac{\mathrm{J}\eta'^{k'-n'+2}}{a'^3\varepsilon'^3(1-\eta'^2)^3} \times \begin{cases} (k'-n')(k'-n'+1)\Sigma_{l'}\left(1-\frac{l'}{n'}\right)\mathcal{E}'_{l'}\eta'^{l'} \\ +(2k'-2n'+1)\Sigma_{l'}\left(1-\frac{l'}{n'}\right)l'\mathcal{E}'_{l'}\eta'^{l'} \\ +\Sigma_{l'}\left(1-\frac{l'}{n'}\right)l'^2\mathcal{E}'_{l'}\eta'^{l'}. \end{cases}$$

Mais de la formule (Section précédente, § II)

$$\Sigma_{l'}\left(1-\frac{l'}{n'}\right)\mathcal{E}'_{l'}z^{l'} = \left[1 - \frac{\varepsilon'}{2}(z+z^{-1})\right] e^{\gamma'(z-z^{-1})},$$

on déduit, en la différentiant par rapport à z, puis multipliant les deux membres

par z,

$$\Sigma_{l'}\left(1-\frac{l'}{n'}\right)l'\mathcal{E}'_{l'}z^{l'} = -\frac{\varepsilon'}{2}(z-z^{-1})e^{\gamma'(z-z^{-1})}$$
$$+\left[1-\frac{\varepsilon'}{2}(z+z^{-1})\right]e^{\gamma'(z-z^{-1})}\gamma'(z+z^{-1});$$

répétant la même opération sur la dernière équation, on trouve encore

$$\Sigma_{l'}\left(1-\frac{l'}{n'}\right)l'^2\mathcal{E}'_{l'}z^{l'} = -\frac{\varepsilon'}{2}(z+z^{-1})e^{\gamma'(z-z^{-1})}$$
$$-\varepsilon'(z-z^{-1})e^{\gamma'(z-z^{-1})}\gamma'(z+z^{-1})+\left[1-\frac{\varepsilon'}{2}(z+z^{-1})\right]z\,\frac{d\left[e^{\gamma'(z-z^{-1})}\gamma'(z+z^{-1})\right]}{dz}.$$

Remplaçons, dans ces trois formules, z par η', et observons qu'on a

$$\eta'+\eta'^{-1}=\frac{2}{\varepsilon'},\qquad \eta'-\eta'^{-1}=-\frac{2\cos\iota'}{\varepsilon'};$$

elles nous donneront

$$\Sigma_{l'}\left(1-\frac{l'}{n'}\right)\mathcal{E}'_{l'}\eta'^{l'}=0,$$
$$\Sigma_{l'}\left(1-\frac{l'}{n'}\right)l'\mathcal{E}'_{l'}\eta'^{l'}=e^{-n'\cos\iota'}\cos\iota',$$
$$\Sigma_{l'}\left(1-\frac{l'}{n'}\right)l'^2\mathcal{E}'_{l'}\eta'^{l'}=e^{-n'\cos\iota'}(2n'\cos\iota'-1).$$

Notre inégalité se réduit donc à celle-ci

$$\text{module de } \rho' < \text{maximum de } \frac{J\eta'^{k'-n'+2}}{a'^3\varepsilon'^2(1-\eta'^2)^3}\left[(2k'+1)\cos\iota'-1\right]e^{-n'\cos\iota'}.$$

Dans le second membre, le facteur J est le seul qui varie avec ψ; pour en déterminer le maximum, nous observerons qu'on a, en négligeant les secondes dimensions des quantités ε, ε', I,

$$J\cos\varpi = -2aa'\cos(\psi+\tau-\tau')+2aa'\varepsilon\cos(\tau-\tau'),$$
$$J\sin\varpi = -2aa'\sin(\psi+\tau-\tau')+2aa'\varepsilon\sin(\tau-\tau'),$$

d'où

$$J=2aa'(1-\varepsilon\cos\psi).$$

On voit par là que le maximum de J est $2aa'(1+\varepsilon)$, et qu'ainsi l'inégalité pré-

cédente peut s'écrire

$$\text{module de } \rho' < \frac{2a\eta'^{k'-n'+2}(1+\varepsilon)}{a'^2\varepsilon'^3(1-\eta'^2)^3}\left[(2k'+1)\cos\iota'-1\right]e^{-n'\cos\iota'},$$

d'où l'on conclut, *à fortiori*,

$$\text{module de } \rho' < \frac{2a\eta'^{k'-n'+2}(1+\varepsilon)}{a'^2\varepsilon'^3(1-\eta'^2)^3}(2k'+1)\cos\iota' \,.\, e^{-n'\cos\iota'},$$

ou bien encore

$$\text{module de } \rho' < \mathrm{A}'\eta'^{k'+\frac{1}{2}}\left(k'+\frac{1}{2}\right),$$

en posant

$$\mathrm{A}' = \frac{4a\eta'^{\frac{3}{2}-n'}(1+\varepsilon)\cos\iota'}{a'^2\varepsilon'^3(1-\eta'^2)^3}e^{-n'\cos\iota'}.$$

Le module de ρ' sera donc inférieur à ϑ, et, par suite, ρ' sera négligeable, si l'on a

$$\mathrm{A}'\eta'^{k'+\frac{1}{2}}\left(k'+\frac{1}{2}\right) < \vartheta,$$

ou bien

$$\left(k'+\frac{1}{2}\right)\log\frac{1}{\eta'} - \log\left(k'+\frac{1}{2}\right) > \log\frac{\mathrm{A}'}{\vartheta}.$$

Ainsi, après avoir déterminé le nombre u' égal à la plus grande racine de l'équation

$$u'\log\frac{1}{\eta'} - \log u' = \log\frac{\mathrm{A}'}{\vartheta},$$

on prendra pour k' un nombre entier supérieur à la fois à n' et à $u' - \frac{1}{2}$.

III. Examinons enfin avec quel degré de précision il faudra calculer les valeurs de B_{-n} correspondantes aux valeurs $0, \frac{2\pi}{k'}, 2\,.\,\frac{2\pi}{k'}, \ldots, (k'-1)\,.\,\frac{2\pi}{k'}$ de ψ'. Observons pour cela que, le rapport $\frac{r'}{a'}$ étant voisin de 1, il suit de l'équation (e) que l'erreur du module de $\mathrm{B}_{n',-n}$ sera inférieure à la limite ϑ, ou du moins la surpassera très-peu, si pour chaque valeur de ψ' l'erreur du module de B_{-n} est elle-même inférieure à ϑ. Or, en vertu de la formule (c), on a approximativement

$$\mathrm{B}_{-n} = \frac{1}{2na'^3}\left(\mathrm{F}'\frac{\mathcal{E}_{n-1}-\mathcal{E}_{n+1}}{2} + \mathrm{G}'\frac{\mathcal{E}_n}{\varepsilon}\sqrt{-1}\right);$$

comme d'ailleurs on a à peu près

$$\mathcal{E}_{n-1} = \frac{\gamma^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}, \qquad \mathcal{E}_n = \frac{\gamma^n}{1.2\ldots n} = \frac{\gamma^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} \cdot \frac{\varepsilon}{2},$$

il en résulte, en négligeant $\mathcal{E}_{n+1}$,

$$B_{-n} = \frac{1}{4a'^3} \cdot \frac{\gamma^{n-1}}{1.2\ldots n} (F' + G'\sqrt{-1}).$$

Mais on a, en négligeant le carré de l'inclinaison mutuelle et les excentricités des orbites,

$$F' = -2aa' \cos(\psi' - \tau + \tau'), \qquad G' = -2aa' \sin(\psi' - \tau + \tau'),$$

et, par conséquent,

$$F' + G'\sqrt{-1} = -2aa' e^{(\psi' - \tau + \tau')\sqrt{-1}}:$$

on conclut de là cette formule approchée

$$B_{-n} = -\frac{a}{2a'^2} \cdot \frac{\gamma^{n-1}}{1.2\ldots n} e^{(\psi' - \tau + \tau')\sqrt{-1}},$$

par où l'on voit que la quantité

$$\Theta' = \frac{a}{2a'^2} \cdot \frac{\gamma^{n-1}}{1.2\ldots n}$$

est une valeur approchée du module de B_{-n}.

Cela posé, désignons par p' le nombre des décimales de la Table de logarithmes dont on fait usage, en sorte que $\frac{1}{10^{p'}\mathfrak{M}}$ soit la limite de l'erreur relative des nombres que l'on calcule; l'erreur absolue commise sur le module de B_{-n} aura pour limite $\frac{\Theta'}{10^{p'}\mathfrak{M}}$, et, par conséquent, elle sera inférieure à δ, si l'on a

$$\Theta' < 10^{p'}\mathfrak{M}\delta, \qquad \text{ou} \qquad p' > \log\frac{\Theta'}{\mathfrak{M}\delta}.$$

Telle est la condition qui servira à déterminer le nombre p'.

IV. Comme dans la Section précédente, il conviendra de rassembler les formules que l'on aura à réduire en nombres dans la pratique. Remarquons d'abord que les nombres Υ, δ, γ, f, g, h, h', d ont déjà servi dans le calcul qui a fourni la portion

de l'inégalité cherchée qui correspond à la partie $-\frac{fm'}{\mathfrak{r}}$ de la fonction perturbatrice (*voir* la Section précédente). Ces nombres étant supposés connus, on commencera par chercher les limites inférieures des entiers p' et k', en se contentant dans ce calcul préliminaire de logarithmes à 3 décimales. A cet effet, on formera d'abord le nombre

$$\Theta' = \frac{a}{2a'^2}\cdot\frac{\gamma^{n-1}}{1.2\ldots n},$$

et alors l'inégalité

$$p' > \log\frac{\Theta'}{\mathfrak{M}_8}$$

permettra d'assigner la valeur de p'. Ensuite on calculera l'angle ι' et le nombre η' par les formules

$$\varepsilon' = \sin\iota', \quad \eta' = \operatorname{tang}\frac{\iota'}{2},$$

après quoi on formera la quantité

$$\Lambda' = \frac{4a\eta'^{\frac{3}{2}-n'}(1+\varepsilon)\cos\iota'}{a'^2\varepsilon'^3(1-\eta'^2)^2}e^{-n'\cos\iota'};$$

puis on cherchera à une unité près la plus grande racine u' de l'équation

$$u'\log\frac{1}{\eta'} - \log u' = \log\frac{\Lambda'}{8},$$

et on prendra pour k' un entier supérieur à la fois à n' et à $u' - \frac{1}{2}$.

Faisant usage maintenant de logarithmes à p' décimales, on se procurera les trois nombres $\mathcal{E}_{n-1}$, $\mathcal{E}_n$, $\mathcal{E}_{n+1}$ à l'aide de la formule

$$\mathcal{E}_n = \frac{\gamma^n}{1.2\ldots n}\left[1 - \frac{\gamma^2}{1.(n+1)} + \frac{\gamma^4}{1.2.(n+1)(n+2)} - \ldots\right],$$

puis, pour chacune des valeurs $0, \frac{2\pi}{k'}, 2.\frac{2\pi}{k'}, \ldots, (k'-1)\frac{2\pi}{k'}$ de ψ', on calculera les quantités T', F', G', V', v' par les formules

$$T' = \psi' - \varepsilon'\sin\psi', \quad F' = f\cos\psi' + h'\sin\psi' - f\varepsilon', \quad G' = h\cos\psi' + g\sin\psi' + d,$$

$$V'\cos v' = F'\frac{\mathcal{E}_{n-1} - \mathcal{E}_{n+1}}{2}, \quad V'\sin v' = G'\frac{\mathcal{E}_n}{\varepsilon}.$$

Alors on formera les deux quantités

$$X = \frac{1}{2nk'a'^3} S_{\mu'} (1 - \varepsilon' \cos\psi')^{-2} V' \cos(v' - n'T'),$$

$$Y = \frac{1}{2nk'a'^3} S_{\mu'} (1 - \varepsilon' \cos\psi')^{-2} V' \sin(v' - n'T'),$$

et X sera la partie réelle, Y le coefficient de $\sqrt{-1}$ dans $B_{n',-n}$. Ces nombres obtenus, on déterminera $\mathfrak{M}$ et Ψ à l'aide des deux formules

$$\mathfrak{M} \cos\Psi = \mathfrak{N} \cos\Omega + X,$$
$$\mathfrak{M} \sin\Psi = \mathfrak{N} \sin\Omega + Y,$$

$\mathfrak{N}\cos\Omega$, $\mathfrak{N}\sin\Omega$ étant déjà connus par le calcul de la Section précédente, et alors, comme on l'a vu dans cette même Section, le produit

$$\Upsilon\, \mathfrak{M} \sin(n'T' - nT + \Psi)$$

sera l'expression complète de l'inégalité de $\int \mu\, dt$ qui a pour diviseur le carré de la petite différence $n'\mu' - n\mu$.

TROISIÈME SECTION.

SUR LA PARTIE DE L'INÉGALITÉ DE LA LONGITUDE MOYENNE OU LE PETIT DIVISEUR N'EST ÉLEVÉ QU'A LA PREMIÈRE PUISSANCE.

I. Ainsi qu'on l'a rappelé dans la Ire Section, la longitude moyenne de la planète m comprend, outre l'intégrale $\int \mu\, dt$, un autre terme λ qui est constant dans le mouvement elliptique et qu'on appelle la longitude moyenne de l'époque. Dans le mouvement troublé, le terme λ devient variable, et parmi les inégalités périodiques dont il est affecté, celles dont les coefficients acquièrent de petits diviseurs par l'intégration méritent encore une attention spéciale. Il est vrai que ces petits diviseurs ne sont plus élevés au carré comme dans $\int \mu dt$, et qu'ainsi les inégalités dont il s'agit sont beaucoup moindres que celles qui proviennent de cette intégrale; cependant, comme elles peuvent n'être pas insensibles, il ne sera pas inutile d'indiquer comment on peut profiter des calculs précédents pour obtenir de ces nouvelles inégalités une évaluation approchée qui sera souvent suffisante.

La partie principale de $\frac{d\lambda}{dt}$ est donnée par la formule

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{2}{\mu a}\frac{dR}{da},$$

où l'on doit prendre la dérivée partielle $\frac{dR}{da}$ sans faire varier $\int \mu\, dt$ dans les expressions des coordonnées de m; il suffira d'ailleurs de considérer dans R la partie $-\frac{f m'}{\iota}$. Concevons la fonction $\frac{1}{\iota}$ développée suivant les puissances des deux exponentielles $e^{T\sqrt{-1}}$, $e^{T'\sqrt{-1}}$ et, comme dans la Ire Section, représentons par $\mathfrak{M}\, e^{\Omega\sqrt{-1}}$ le coefficient du terme en $e^{(n'T'-nT)\sqrt{-1}}$. A ce terme répondra dans $\frac{d\lambda}{dt}$ la partie

$$-\frac{2fm'}{\mu a}\left(\frac{d\mathfrak{M}}{da} + \mathfrak{M}\frac{d\Omega}{da}\sqrt{-1}\right) e^{(n'T'-nT+\Omega)\sqrt{-1}},$$

et par suite, dans λ, la partie

$$+\frac{2fm'}{\mu a(n'\mu'-n\mu)}\left(\frac{d\mathfrak{M}}{da}\sqrt{-1} - \mathfrak{M}\frac{d\Omega}{da}\right) e^{(n'T'-nT+\Omega)\sqrt{-1}},$$

ou bien, en mettant pour f la quantité égale $\frac{\mu^2 a^3}{1+m}$,

$$+\frac{2m'}{1+m}\cdot\frac{\mu}{n'\mu'-n\mu}a^2\left(\frac{d\mathfrak{M}}{da}\sqrt{-1} - \mathfrak{M}\frac{d\Omega}{da}\right) e^{(n'T'-nT+\Omega)\sqrt{-1}}.$$

Il y aura dans λ un autre terme de même argument qui ne différera de celui-ci que par le signe de $\sqrt{-1}$: en ajoutant ces deux termes, on aura, pour l'inégalité de λ dont la période est $\frac{2\pi}{n'\mu'-n\mu}$, l'expression

$$-\frac{4m'}{1+m}\cdot\frac{\mu}{n'\mu'-n\mu}a^2\left[\frac{d\mathfrak{M}}{da}\sin(n'T'-nT+\Omega) + \mathfrak{M}\frac{d\Omega}{da}\cos(n'T'-nT+\Omega)\right],$$

ou bien, en secondes d'arc,

$$-\Upsilon_1\frac{d\mathfrak{M}}{da}\sin(n'T'-nT+\Omega) - \Upsilon_1\mathfrak{M}\frac{d\Omega}{da}\cos(n'T-nT+\Omega),$$

en posant, pour abréger,

$$\Upsilon_1 = \frac{648\,000}{\pi} \cdot \frac{4m'}{1+m} \cdot \frac{\mu}{n'\mu' - n\mu} a^2.$$

La méthode exposée dans la Ire Section fournit les valeurs de $\mathfrak{N}$ et de Ω ; il faut maintenant déterminer approximativement $\frac{d\mathfrak{N}}{da}$ et $\frac{d\Omega}{da}$. Or si l'on néglige ε, ε' et I^2, on a, en conservant les notations de cette Section,

$$H = a^2 + a'^2, \quad K\cos\omega = -2aa'\cos(\psi + \tau - \tau'), \quad K\sin\omega = -2aa'\sin(\psi + \tau - \tau'),$$

d'où

$$K = 2aa', \qquad \omega = \psi + \tau - \tau' + \pi.$$

L'équation qui a pour racine $x' = \mathrm{a}' e^{\varphi'\sqrt{-1}}$ se réduit donc à

$$a^2 + a'^2 - aa' e^{-(\psi+\tau-\tau')\sqrt{-1}} x' - aa' e^{(\psi+\tau-\tau')\sqrt{-1}} x'^{-1} = 0;$$

on en tire, en supposant $a' > a$ et prenant pour x' celle des racines qui a un module inférieur à l'unité,

$$x' = \frac{a}{a'} e^{(\psi+\tau-\tau')\sqrt{-1}},$$

et par suite

$$\mathrm{a}' = \frac{a}{a'}, \qquad \varphi' = \psi + \tau - \tau'.$$

On a donc, à ce degré d'approximation,

$$\frac{d\mathrm{a}'}{da} = \frac{1}{a'} = \frac{\mathrm{a}'}{a}, \qquad \frac{d\varphi'}{da} = 0;$$

comme d'ailleurs on a à peu près

$$\mathrm{b}' = \frac{i'}{K} = \frac{a'\varepsilon'^2}{4a},$$

on en conclut

$$\mathrm{a}'\mathrm{b}' = \frac{\varepsilon'^2}{4},$$

et par conséquent

$$\frac{d(\mathrm{a}'\mathrm{b}')}{da} = 0.$$

La formule approximative

$$\mathfrak{A}'_{n'} = \frac{1.3\ldots(2n'-1)}{2.4\ldots(2n')}\cdot\frac{\mathrm{a}'^{n'}}{\sqrt{1-\mathrm{a}'^2}}$$

nous donne ensuite

$$\frac{d\mathfrak{A}'_{n'}}{da} = \frac{n'\mathfrak{A}'_{n'}}{\mathrm{a}'}\left(1+\frac{1}{n'}\,\frac{\mathrm{a}'^2}{1-\mathrm{a}'^2}\right)\frac{d\mathrm{a}'}{da} = \frac{n'\mathfrak{A}'_{n'}}{a}\left(1+\frac{1}{n'}\,\frac{\mathrm{a}'^2}{1-\mathrm{a}'^2}\right),$$

ou simplement, n' étant un grand nombre,

$$\frac{d\mathfrak{A}'_{n'}}{da} = \frac{n'\mathfrak{A}'_{n'}}{a},$$

et comme on a sensiblement

$$\mathrm{F}_{n'} = \mathfrak{A}'_{n'}\cos n'\varphi', \qquad \mathrm{G}_{n'} = -\,\mathfrak{A}'_{n'}\sin n'\varphi',$$

il en résulte

$$\frac{d\mathrm{F}_{n'}}{da} = \frac{n'\mathrm{F}_{n'}}{a}, \qquad \frac{d\mathrm{G}_{n'}}{da} = \frac{n'\mathrm{G}_{n'}}{a}.$$

Représentons, pour abréger, par $\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{G}$ les deux sommes

$$\Sigma_{l'}\left(1-\frac{l'}{n'}\right)\mathcal{E}'_{l'}\,\mathrm{F}_{n'-l'}, \qquad \Sigma_{l'}\left(1-\frac{l'}{n'}\right)\mathcal{E}'_{l'}\,\mathrm{G}_{n'-l'};$$

nous aurons

$$\frac{d\mathfrak{F}}{da} = \frac{1}{a}\Sigma_{l'}(n'-l')\left(1-\frac{l'}{n'}\right)\mathcal{E}'_{l'}\,\mathrm{F}_{n'-l'} = \frac{n'}{a}(\mathfrak{F}-\mathfrak{F}_1),$$

en posant

$$\mathfrak{F}_1 = \Sigma_{l'}\frac{l'}{n'}\left(1-\frac{l'}{n'}\right)\mathcal{E}'_{l'}\,\mathrm{F}_{n'-l'},$$

et de même

$$\frac{d\mathfrak{G}}{da} = \frac{n'}{a}(\mathfrak{G}-\mathfrak{G}_1)$$

en posant

$$\mathfrak{G}_1 = \Sigma_{l'}\frac{l'}{n'}\left(1-\frac{l'}{n'}\right)\mathcal{E}'_{l'}\,\mathrm{G}_{n'-l'}.$$

Les termes des sommes $\mathfrak{F}_1$ et $\mathfrak{G}_1$ se déduisent de ceux des sommes $\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{G}$ en les multipliant par les valeurs correspondantes de $\frac{l'}{n'}$; mais les termes principaux de $\mathfrak{F}$ et de $\mathfrak{G}$ répondent à la valeur zéro de l'entier l' et aux valeurs voisines, c'est-à-dire à des valeurs nulles ou très-petites de la fraction $\frac{l'}{n'}$; on peut donc négliger $\mathfrak{F}_1$

à côté de $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}_1$ à côté de $\mathfrak{G}$ et prendre simplement

$$\frac{d\mathfrak{F}}{da} = \frac{n'\mathfrak{F}}{a}, \qquad \frac{d\mathfrak{G}}{da} = \frac{n'\mathfrak{G}}{a}.$$

Il s'ensuit

$$\frac{d(\mathrm{V}\cos\mathrm{v})}{da} = \frac{n'}{a}(1 - \varepsilon\cos\psi)\sqrt{\frac{2a'b'}{i'}}\,\mathfrak{F} = \frac{n'}{a}\mathrm{V}\cos\mathrm{v},$$

$$\frac{d(\mathrm{V}\sin\mathrm{v})}{da} = \frac{n'}{a}(1 - \varepsilon\cos\psi)\sqrt{\frac{2a'b'}{i'}}\,\mathfrak{G} = \frac{n'}{a}\mathrm{V}\sin\mathrm{v};$$

en ajoutant ces deux équations après les avoir multipliées respectivement, soit par $\cos\mathrm{v}$ et $\sin\mathrm{v}$, soit par $-\sin\mathrm{v}$ et $\cos\mathrm{v}$, on trouve

$$\frac{d\mathrm{V}}{da} = \frac{n'}{a}\mathrm{V}, \qquad \frac{d\mathrm{v}}{da} = 0,$$

d'où l'on conclut

$$\frac{d(\mathfrak{N}\cos\Omega)}{da} = \frac{n'}{a}\cdot\frac{1}{k}\,\mathrm{S}_k\mathrm{V}\cos(\mathrm{v} + n\mathrm{T}) = \frac{n'}{a}\mathfrak{N}\cos\Omega,$$

$$\frac{d(\mathfrak{N}\sin\Omega)}{da} = \frac{n'}{a}\cdot\frac{1}{k}\,\mathrm{S}_k\mathrm{V}\sin(\mathrm{v} + n\mathrm{T}) = \frac{n'}{a}\mathfrak{N}\sin\Omega,$$

et par conséquent

$$\frac{d\mathfrak{N}}{da} = \frac{n'}{a}\mathfrak{N}, \qquad \frac{d\Omega}{da} = 0.$$

L'inégalité cherchée de λ a donc pour valeur approchée, dans le cas de $a' > a$,

$$-\frac{n'\Upsilon_1}{a}\mathfrak{N}\sin(n'\mathrm{T}' - n\mathrm{T} + \Omega).$$

Le rapport de cette inégalité à celle de $\int\mu\,dt$ est

$$-\frac{n'\Upsilon_1}{a\Upsilon} = -\frac{2n'}{3n}\cdot\frac{n'\mu' - n\mu}{\mu}:$$

lors donc que l'inégalité de $\int\mu\,dt$ aura été calculée, il suffira d'évaluer la fraction $-\frac{2n'}{3n}\cdot\frac{n'\mu'-n\mu}{\mu}$, pour décider si l'inégalité de λ est négligeable ou non; quand elle ne le sera pas, on multipliera l'inégalité de $\int\mu\,dt$ par $-\frac{2n'}{3n}\cdot\frac{n'\mu'-n\mu}{\mu}$ et on obtiendra ainsi pour l'inégalité de λ une valeur qui souvent sera suffisamment approchée. En d'autres termes, l'inégalité complète de la longitude moyenne se trouvera en multipliant l'inégalité déjà calculée de $\int\mu\,dt$ par le nombre $1 - \frac{2n'}{3n}\cdot\frac{n'\mu'-n\mu}{\mu}$.

II. Cette conclusion suppose $a' > a$; si l'on avait $a > a'$, elle devrait être modifiée; en effet, dans ce dernier cas, celle des racines de l'équation en x' (page 220) qui a un module inférieur à l'unité est $\frac{a'}{a} e^{(\psi + \tau - \tau')\sqrt{-1}}$; la valeur approchée de a' est donc $\frac{a'}{a}$ et non plus $\frac{a}{a'}$: on a alors

$$\frac{d\mathrm{a}'}{da} = -\frac{a'}{a^2} = -\frac{\mathrm{a}'}{a},$$

et comme la formule approchée

$$\mathrm{b}' = \frac{a'\varepsilon'^2}{4a}$$

donne

$$\frac{d\mathrm{b}'}{da} = -\frac{a'\varepsilon'^2}{4a^2} = -\frac{\mathrm{b}'}{a},$$

il en résulte

$$\frac{d(\mathrm{a}'\mathrm{b}')}{da} = -\frac{2\mathrm{a}'\mathrm{b}'}{a}, \qquad \frac{d\sqrt{\mathrm{a}'\mathrm{b}'}}{da} = -\frac{\sqrt{\mathrm{a}'\mathrm{b}'}}{a}.$$

D'un autre côté la formule approchée

$$\mathfrak{A}'_{n'} = \frac{1.3\ldots(2n'-1)}{2.4\ldots(2n')} \frac{\mathrm{a}'^{n'}}{\sqrt{1-\mathrm{a}'^2}}$$

donne, dans l'hypothèse actuelle,

$$\frac{d\mathfrak{A}'_{n'}}{da} = -\frac{n'\mathfrak{A}'_{n'}}{a},$$

et en raisonnant comme tout à l'heure on en déduit

$$\frac{d\mathfrak{F}}{da} = -\frac{n'\mathfrak{F}}{a}, \qquad \frac{d\mathfrak{G}}{da} = -\frac{n'\mathfrak{G}}{a}.$$

Cela posé, si dans l'équation

$$\mathrm{V}\cos\mathrm{v} = (1 - \varepsilon\cos\psi)\sqrt{\frac{2\mathrm{a}'\mathrm{b}'}{i'}}\,\mathfrak{F}$$

on prend les logarithmes des deux membres, puis qu'on les différentie par rapport à a, on trouve

$$\frac{1}{\mathrm{V}\cos\mathrm{v}} \frac{d(\mathrm{V}\cos\mathrm{v})}{da} = -\frac{1}{a} - \frac{n'}{a} = -\frac{n'+1}{a}.$$

d'où

$$\frac{d(\mathrm{V}\cos\mathrm{v})}{da} = -\frac{n'+1}{a}\mathrm{V}\cos\mathrm{v};$$

on a pareillement

$$\frac{d(\mathrm{V}\sin\mathrm{v})}{da} = -\frac{n'+1}{a}\mathrm{V}\sin\mathrm{v}.$$

De ces deux équations on conclut

$$\frac{d\mathrm{V}}{da} = -\frac{n'+1}{a}\mathrm{V}, \qquad \frac{d\mathrm{v}}{da} = 0,$$

et par suite

$$\frac{d(\mathfrak{N}\cos\Omega)}{da} = -\frac{n'+1}{a}\mathfrak{N}\cos\Omega, \qquad \frac{d(\mathfrak{N}\sin\Omega)}{da} = -\frac{n'+1}{a}\mathfrak{N}\sin\Omega,$$

d'où

$$\frac{d\mathfrak{N}}{da} = -\frac{n'+1}{a}\mathfrak{N}, \qquad \frac{d\Omega}{da} = 0.$$

Ainsi, dans le cas de $a > a'$, l'inégalité de λ a pour valeur approchée

$$\frac{(n'+1)\Upsilon_1}{a}\mathfrak{N}\sin(n'\mathrm{T}' - n\mathrm{T} + \Omega).$$

Le rapport de cette inégalité à celle de $\int \mu\, dt$ est

$$\frac{(n'+1)\Upsilon_1}{a\Upsilon} = \frac{2(n'+1)}{3n}\cdot\frac{n'\mu' - n\mu}{\mu}.$$

On voit donc que quand l'inégalité de λ sera assez petite pour être évaluée de cette manière avec une précision suffisante, l'inégalité complète de la longitude moyenne s'obtiendra en multipliant l'inégalité déjà calculée de $\int \mu\, dt$ par le nombre $1 + \frac{2(n'+1)}{3n}\cdot\frac{n'\mu' - n\mu}{\mu}$.

QUATRIÈME SECTION.

APPLICATIONS NUMÉRIQUES DES FORMULES ÉTABLIES DANS LES SECTIONS PRÉCÉDENTES.

I. Nous rapporterons en premier lieu l'application que M. Cauchy a faite lui-même de sa méthode à la grande inégalité de Pallas, dont M. Le Verrier avait déjà

déterminé la valeur par une voie toute différente : nous donnerons ensuite avec plus de détails le calcul d'une inégalité analogue de la planète Victoria.

M. Cauchy adopte les données suivantes :

	Pallas.	Jupiter.
Moyen mouvement annuel	$\mu = 280\,711''$	$\mu' = 109\,256''$
Demi grand axe	$a = 2,772\,63$	$a' = 5,202\,798$
Excentricité	$\varepsilon = 0,242$	$\varepsilon' = 0,048\,162$
Distance angulaire du périhélie à la ligne d'intersection des plans des deux orbites	$\tau = 306^\circ\,11'\,40''$	$\tau' = 196^\circ\,37'\,55''$
Inclinaison mutuelle des plans des orbites	$I = 34^\circ\,15'\,36''$	

La masse m de Pallas est regardée comme négligeable, et la masse m' de Jupiter est supposée égale à $\frac{1}{1050}$.

Si l'on réduit le rapport $\frac{\mu}{\mu'}$ en fraction continue, on le trouve égal à

$$2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{9 + \cdots}}}}$$

Les réduites successives sont $\frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{5}{2}, \frac{18}{7}, \frac{167}{65}, \ldots$: le rapport des moyens mouvements est donc très-voisin de $\frac{18}{7}$, et en effet la différence $18\mu' - 7\mu$ se réduit à $+1631''$. On peut donc penser qu'il existe dans la longitude moyenne de Pallas une inégalité sensible ayant pour argument 18 fois l'anomalie moyenne de Jupiter moins 7 fois celle de Pallas.

M. Cauchy se propose de la calculer avec une précision telle, que l'erreur commise sur le coefficient soit inférieure à $1''$, c'est-à-dire qu'il prend $\sigma = 1$; il en résulte $8 = \frac{15}{10^{10}}$. Alors l'équation

$$u \log \frac{1}{a_1} + \frac{1}{2} \log u = \log \frac{A}{8}$$

donne pour u ou $k - 7$ une valeur inférieure à 22 ; il suffit donc, pour atteindre le degré de précision voulu, de prendre $k = 29$. M. Cauchy fait $k = 36$, de sorte que les valeurs attribuées à ψ dans la suite du calcul sont tous les multiples de 10° inférieurs à la circonférence.

Après avoir calculé les nombres $\mathcal{E}'_0$, $\mathcal{E}'_1$, $\mathcal{E}'_2, \ldots$, pour lesquels il obtient les valeurs suivantes,

$$\mathcal{E}'_0 = 0,820\,757\,40, \quad \mathcal{E}'_1 = 0,393\,993\,00, \quad \mathcal{E}'_2 = 0,088\,236\,48,$$
$$\mathcal{E}'_3 = 0,012\,947\,72, \quad \mathcal{E}'_4 = 0,001\,416\,46, \quad \mathcal{E}'_5 = 0,000\,123\,57,$$
$$\mathcal{E}'_6 = 0,000\,008\,97, \quad \mathcal{E}'_7 = 0,000\,000\,56, \quad \mathcal{E}'_8 = 0,000\,000\,03,$$
$$\mathcal{E}'_9 = 0,000\,000\,00,$$

M. Cauchy forme les deux produits $10^9 \mathrm{V} \cos(\mathrm{v} + 7\mathrm{T})$ et $10^9 \mathrm{V} \sin(\mathrm{v} + 7\mathrm{T})$ pour chacune des valeurs de ψ multiples de 10° : il trouve qu'ils se réduisent sensiblement à zéro pour $\psi = 0^\circ, 10^\circ, 20^\circ, \ldots, 130^\circ$, et aussi pour $\psi = 310^\circ, 320^\circ, \ldots, 350^\circ$, tandis que pour $\psi = 140^\circ, 150^\circ, \ldots, 300^\circ$, ces produits ont les valeurs suivantes :

ψ	$10^9 \mathrm{V} \cos(\mathrm{v}+7\mathrm{T})$	$10^9 \mathrm{V} \sin(\mathrm{v}+7\mathrm{T})$
140°	+ 6	+ 11
150	+ 28	— 13
160	— 15	— 85
170	— 228	— 85
180	— 581	+ 351
190	— 492	+ 1766
200	+ 1652	+ 4184
210	+ 7753	+ 5469
220	+15902	+ 982
230	+17377	— 9445
240	+ 7720	—15267
250	— 2200	— 9932
260	— 3664	— 2228
270	— 1241	+ 555
280	+ 10	+ 345
290	+ 75	+ 8
300	— 2	— 15

En ajoutant les nombres contenus dans chacune des deux dernières colonnes de ce tableau, on trouve

$$10^9 \mathrm{S}_{36} \mathrm{V} \cos(\mathrm{v} + 7\mathrm{T}) = +42\,100, \quad 10^9 \mathrm{S}_{36} \mathrm{V} \sin(\mathrm{v} + 7\mathrm{T}) = -23\,399,$$

d'où il suit immédiatement

$$10^{10} \mathfrak{N} \cos\Omega = +11\,694, \quad 10^{10} \mathfrak{N} \sin\Omega = -6\,500.$$

M. Cauchy en conclut

$$10^{10}.2\mathfrak{N} = 26759, \quad \Omega = -29^\circ 3' 55'',$$

et comme on a $\log \Upsilon = 8,83100$, il obtient enfin, pour l'inégalité cherchée de $\int \mu dt$, l'expression

$$906'',6 \sin(18T' - 7T - 29^\circ 3' 55'').$$

M. Cauchy a vérifié ce résultat en recalculant les quantités V et v par la méthode abrégée exposée à la fin de la Ire Section. Ici en effet les fractions $\frac{1}{n'^2}$, ε'^2 étant $\frac{1}{324}$ et $\frac{1}{430}$, on peut penser que l'erreur résultant de l'emploi de cette seconde méthode affectera tout au plus le chiffre des secondes. En suivant cette marche, M. Cauchy a obtenu pour les produits $10^9 V \cos(v + 7T)$, $10^9 V \sin(v + 7T)$ les valeurs que voici :

ψ	$10^9 V \cos(v+7T)$	$10^9 V \sin(v+7T)$
140°	+ 7	+ 11
150	+ 29	− 14
160	− 14	− 85
170	− 228	− 83
180	− 580	+ 354
190	− 492	+ 1764
200	+ 1650	+ 4186
210	+ 7748	+ 5467
220	+ 15894	+ 987
230	+ 17373	− 9440
240	+ 7720	− 15264
250	− 2198	− 9934
260	− 3663	− 2228
270	− 1240	+ 556
280	+ 9	+ 345
290	+ 75	+ 8
300	− 1	− 15

Il en résulte

$$10^9 S_{36} V \cos(v + 7T) = + 42089, \qquad 10^9 S_{36} V \sin(v + 7T) = - 23385,$$

et par conséquent

$$10^{10} \mathfrak{N} \cos\Omega = + 11692, \qquad 10^{10} \mathfrak{N} \sin\Omega = - 6496,$$

d'où

$$10^{10}.2\,\mathfrak{M} = 26750, \qquad \Omega = -29^\circ\,3'\,25''.$$

On en conclut pour l'inégalité de $\int \mu\,dt$ l'expression

$$906'',3 \sin(18\,T' - 7\,T - 29^\circ\,3'\,25''),$$

qui s'accorde avec la précédente à une fraction de seconde près.

M. Cauchy ne s'est pas occupé de l'inégalité qui affecte la longitude moyenne de l'époque. En appliquant la règle approximative donnée dans la IIIe Section, on voit que le rapport de cette inégalité à celle de $\int \mu\,dt$ est $-\frac{2.18}{3.7}\cdot\frac{1631}{280711} = -\frac{1}{1004}$. Si donc nous adoptons pour l'inégalité de $\int \mu\,dt$ le premier des deux résultats calculés par M. Cauchy, nous en conclurons que l'inégalité complète de la longitude moyenne a pour expression

$$905'',7 \sin(18\,T' - 7\,T - 29^\circ\,3'\,55'').$$

II. Proposons-nous maintenant de déterminer l'inégalité de Victoria, qui a pour argument 10 fois l'anomalie moyenne de Jupiter moins 3 fois celle de Victoria.

Prenant toujours la masse de Jupiter égale à $\frac{1}{1050}$, nous négligerons celle de Victoria et nous adopterons, pour les éléments elliptiques de ces deux planètes au 1er janvier 1850 les valeurs suivantes (*) :

	Victoria.	Jupiter.
Demi grand axe	$a = 2,332\,812$	$a' = 5,202\,798$
Excentricité	$\varepsilon = 0,218\,9196$	$\varepsilon' = 0,048\,2388$
Vitesse angulaire moyenne (en un jour moyen).	$\mu = 995'',8340$	$\mu' = 299'',12859$
Inclinaison de l'orbite sur l'écliptique	$8^\circ\,23'\,19''$	$1^\circ\,18'\,40'',31$
Longitude du nœud ascendant	235.33.52	98.54.20,45
Longitude du périhélie	301.38.35	11.54.53,1

La différence $10\mu' - 3\mu = 3'',7839$ est, comme on peut le prévoir par la réduction du rapport $\frac{\mu}{\mu'}$ en fraction continue, une petite fraction de μ; de là dans

(*) Les éléments de Victoria ont été empruntés à l'*Annuaire du Bureau des Longitudes* pour 1862; ils ne diffèrent que par la suppression des dernières décimales de ceux qu'a donnés M. Brunnow dans le n° 1077 des *Nouvelles astronomiques* : les éléments de Jupiter sont ceux que M. Le Verrier a donnés dans le tome II des *Annales de l'Observatoire*.

la longitude moyenne de Victoria une inégalité sensible dont la période est $\frac{1296000}{3,7839} = 342\,504$ jours moyens ou $937,72$ années juliennes. Nous allons d'abord calculer la partie principale de cette inégalité, c'est-à-dire la partie de $\int \mu\, dt$ qui a pour diviseur le carré de $10\mu' - 3\mu$.

A l'aide des valeurs données des éléments, et en observant qu'on a ici $n = 3$, $n' = 10$, on forme d'abord les valeurs des constantes Υ, I, τ, τ', i, i', f, g, h, h', b, c, d, c', d' et on trouve

$$\begin{array}{lll}
\log \Upsilon = 8,756\,8827, & \mathrm{I} = 9^\circ\,23'\,6'',56, & \tau = 60^\circ\,33'\,6'',73, \\
\tau' = 130^\circ\,53'\,22'',54, & \log i = \bar{1},115\,2988, & \log i' = \bar{2},498\,2368, \\
\log f = -\,0,900\,5750\ (^*), & \log g = -\,0,906\,4545, & \log h = -\,1,346\,0909, \\
\log h' = 1,355\,0168, & b = 32,589\,018, & \log c = -\,0,300\,8226, \\
\log d = 0,029\,4874, & \log c' = -\,\bar{1},939\,6780, & \log d' = -\,0,695\,3014.
\end{array}$$

On trouve ensuite $\log \Theta = \bar{5},987$, et si dans l'équation

$$p = \log \frac{\Theta(1+\varepsilon)}{\mathfrak{M}\,\mathrm{s}} = \log \frac{\Upsilon\Theta(1+\varepsilon)}{\mathfrak{M}} - \log \sigma$$

on fait $p = 7$, on en tire $\log \sigma = \bar{2},192$, $\sigma = 0'',016$. Si donc on fait usage de Tables à 7 décimales, les erreurs des Tables n'affecteront pas le chiffre des dixièmes de seconde dans le coefficient de l'inégalité cherchée.

Pour déterminer le nombre k des parties dans lesquelles il faut diviser la circonférence, on calcule

$$\log \mathrm{a}_1 = \bar{1},690, \quad \log \mathrm{b}_1 = \bar{3},773, \quad \varphi_1 = 150^\circ\,23', \quad \log \Lambda = \bar{1},432\,;$$

alors l'équation

$$(k-3)\log\frac{1}{\mathrm{a}_1} + \frac{1}{2}\log(k-3) = \log\frac{\Lambda}{\mathrm{s}} = \log \Upsilon\Lambda - \log\sigma$$

donne, quand on y fait $k = 30$,

$$\log \sigma = \bar{1},109, \quad \sigma = 0'',128.$$

Prenant donc $k = 30$, on sera certain que l'erreur qui en résulte dans le coefficient de l'inégalité n'atteindra pas $0'',2$.

Cela posé, pour chacune des trente valeurs 0°, 12°, 24°, 36°, ..., 348° de ψ,

---

(*) Le signe — placé devant un logarithme indique que le nombre correspondant est négatif.

on calcule les quantités T, H, K cos ω, K sin ω, et on en conclut a′, b′ (
dans le tableau A, à la fin du Mémoire, les valeurs de log a′, log b′ et φ′)

Quant aux nombres $\mathcal{E}'_n$, on reconnaît aisément qu'il suffit de les déterm
les valeurs de l'indice qui ne surpassent pas 7 : on trouve

$$\log \mathcal{E}'_0 = \bar{1},9743579, \quad \log \mathcal{E}'_1 = \bar{1},3696722, \quad \log \mathcal{E}'_2 = \bar{2},4552608, \quad \log \mathcal{E}'_3 = \bar{3}$$
$$\log \mathcal{E}'_4 = \bar{4},144197, \quad \log \mathcal{E}'_5 = \bar{6},82844, \quad \log \mathcal{E}'_6 = \bar{7},4333, \quad \log \mathcal{E}'_7 = \bar{9},$$

On voit ensuite que parmi les quantités $\mathfrak{A}'_n$, $\mathfrak{B}'_n$, les seules qu'on ait
calculer sont

$$\mathfrak{A}'_3, \mathfrak{A}'_4, \mathfrak{A}'_5, \mathfrak{A}'_6, \mathfrak{A}'_7, \mathfrak{A}'_8, \mathfrak{A}'_9, \mathfrak{A}'_{10}, \mathfrak{A}'_{11}, \mathfrak{A}'_{12}, \mathfrak{A}'_{13}, \mathfrak{A}'_{14}, \mathfrak{A}'_{15}, \quad \mathfrak{B}'_3$$

et que les nombres de décimales à conserver dans leurs logarithmes son
vement

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 7,

Ces logarithmes calculés (nous nous dispenserons de les transcrire ici)
che les valeurs de

$$F_3, F_4, F_5, F_6, F_7, F_8, F_9, F_{10}, F_{11}, F_{12}, F_{13}, F_{14}, F_{15},$$
$$G_3, G_4, G_5, G_6, G_7, G_8, G_9, G_{10}, G_{11}, G_{12}, G_{13}, G_{14}, G_{15}:$$

ceux des nombres F_n et G_n qui répondent à d'autres indices peuvent êtr
Cela fait, on forme les sommes

$$\Sigma_{l'}\left(1-\frac{l'}{10}\right)\mathcal{E}'_{l'} F_{10-l'}, \quad \Sigma_{l'}\left(1-\frac{l'}{10}\right)\mathcal{E}'_{l'} G_{10-l'},$$

dans lesquelles il suffit d'attribuer à l' les valeurs

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, -1, -2, -3, -4, -5.$$

En ajoutant à leurs logarithmes celui du produit $(1 - \varepsilon \cos \psi)\sqrt{\frac{2}{}}$
les logarithmes de V cos v et de V sin v, d'où l'on déduit l'angl
peut alors calculer les produits V cos (v + 3T), V sin (v + 3T
multipliées par 10^8 sont rapportées dans le tableau A.

On a ainsi les éléments des deux sommes

$$S_{30} V \cos(v + 3T), \quad S_{30} V \sin(v + 3T):$$

les deux sommes

$$S_{16}(1-\varepsilon'\cos\psi')^{-2}V'\cos(v'-10T'),\quad S_{16}(1-\varepsilon'\cos\psi')^{-2}V'\sin(v'-10T')$$

et en les multipliant par le facteur $\frac{1}{2nk'a'^3}=\frac{1}{90a'^3}$, on trouve

$$X=+0{,}000\,000\,000\,68,\quad Y=-0{,}000\,000\,000\,79.$$

On connaît donc le coefficient $X+Y\sqrt{-1}$ de l'exponentielle $e^{(10T'-3T)\sqrt{-1}}$ dans le développement de $-\frac{r\cos\delta}{r'^2}$.

En ajoutant respectivement X et Y aux valeurs trouvées ci-dessus de $\mathfrak{N}\cos\Omega$ et de $\mathfrak{N}\sin\Omega$, on obtient celles de $\mathfrak{M}\cos\Psi$ et de $\mathfrak{M}\sin\Psi$, savoir :

$$\mathfrak{M}\cos\Psi=+0{,}000\,000\,620\,47,\quad \mathfrak{M}\sin\Psi=+0{,}000\,000\,277\,13:$$

on connaît ainsi $\mathfrak{M}$ et Ψ, et par suite le coefficient $\mathfrak{M}e^{\Psi\sqrt{-1}}$ de $e^{(10T'-3T)\sqrt{-1}}$ dans le développement de $\frac{1}{\iota}-\frac{r\cos\delta}{r'^2}$.

De là on conclut que l'inégalité de $\int\mu dt$, qui a pour période $\frac{2\pi}{10\mu'-3\mu}$, est égale à

$$388'',24\sin(10T'-3T+24^\circ 4'53''),$$

l'erreur à craindre sur le coefficient étant tout au plus égale à $0'',4$.

Il reste à évaluer l'inégalité de la longitude moyenne λ de l'époque, inégalité qui a pour diviseur, non plus le carré, mais la première puissance de $10\mu'-3\mu$. On en obtient la partie principale en multipliant par $-\frac{20}{9}\cdot\frac{10\mu'-3\mu}{\mu}$ l'inégalité déjà calculée de $\int\mu dt$, ce qui donne

$$-3'',28\sin(10T'-3T+24^\circ 4'53'').$$

La petitesse du résultat permet de regarder cette évaluation comme suffisamment exacte ; réunissant donc cette inégalité à celle de $\int\mu dt$, on trouve

$$385'',0\sin(10T'-3T+24^\circ 4'53'')$$

pour la valeur totale de l'inégalité de la longitude moyenne de Victoria dont la période est $\frac{2\pi}{10\mu'-3\mu}$.

III. En disant que cette inégalité est déterminée par les calculs précédents, à une fraction de seconde près, nous supposons exacts, bien entendu, les éléments

qui nous ont servi de point de départ. Mais en réalité nous ne pouvons compter qu'il en soit ainsi, au moins en ce qui concerne Victoria; si l'on vient à reconnaître la nécessité d'adopter pour les éléments de cette planète des valeurs un peu différentes, l'expression de notre inégalité et la durée de sa période devront aussi être modifiées. On voit sans peine que, tandis que de petits changements dans les autres éléments n'auront pas d'influence notable sur cette inégalité, une correction, même légère, du moyen mouvement μ pourra au contraire la faire varier considérablement; car par suite d'une telle correction la petite différence $n'\mu' - n\mu$ pourra acquérir une nouvelle valeur dont le rapport à la valeur primitive diffère notablement de l'unité, et alors le coefficient de l'inégalité, qui a pour diviseur $(n'\mu' - n\mu)^2$, variera dans une proportion considérable.

Il est aisé d'ailleurs d'apprécier l'influence d'une correction $\delta\mu$ apportée à la valeur de μ. Observons d'abord qu'en vertu de la relation $f(1 + m) = \mu^2 a^3$, il en résulte une correction δa de a telle qu'on ait

$$\delta a = -\frac{2}{3}\frac{a}{\mu}\delta\mu.$$

De là et des formules approchées

$$\frac{d\varpi}{da} = \frac{n'}{a}\varpi, \quad \frac{d\Omega}{da} = 0,$$

établies dans la Section III pour le cas de $a' > a$, il suit que l'angle Ω ne variera pas sensiblement, tandis que ϖ sera multiplié par $1 - \frac{2n'}{3}\frac{\delta\mu}{\mu}$; d'un autre côté Υ sera multiplié par le facteur $\left(\frac{\mu + \delta\mu}{\mu}\right)^2 \frac{a + \delta a}{a}\left(\frac{n'\mu' - n\mu}{n'\mu' - n\mu - n\delta\mu}\right)^2$ ou à très-peu près $\left(1 + \frac{4}{3}\frac{\delta\mu}{\mu}\right)\left(\frac{n'\mu' - n\mu}{n'\mu' - n\mu - n\delta\mu}\right)^2$. L'inégalité de $\int \mu dt$ (nous faisons abstraction de la petite portion qui provient de $\frac{fm' r\cos\delta}{r'^2}$) sera donc multipliée par

$$\left(1 - \frac{2n' - 4}{3}\frac{\delta\mu}{\mu}\right)\left(\frac{n'\mu' - n\mu}{n'\mu' - n\mu - n\delta\mu}\right)^2.$$

On trouve pareillement que l'inégalité de λ sera multipliée par le facteur

$$\left(1 - \frac{2n' - 1}{3}\frac{\delta\mu}{\mu}\right)\frac{n'\mu' - n\mu}{n'\mu' - n\mu - n\delta\mu}.$$

On voit donc, en remplaçant n, μ, n', μ' par leurs valeurs, que l'inégalité corrigée de la longitude moyenne de Victoria sera à très-peu près

$$\left[388'',24 \times \frac{1 - 0,005\,\delta\mu}{(1 - 0,793\,\delta\mu)^2} - 3'',28 \times \frac{1 - 0,006\,\delta\mu}{1 - 0,793\,\delta\mu}\right] \sin(10\,T' - 3\,T + 24^\circ 4' 53'').$$

Quant à la période de cette même inégalité, elle deviendra $\frac{2\pi}{n'\mu' - n\mu - n\,\delta\mu}$ et se composera par conséquent d'un nombre de jours moyens égal à $\frac{342\,504}{1 - 0,793\,\delta\mu}$.

TABLEAU A (*voir* page 230).

ψ	log a'	log b'	φ'	10^5.V cos (v + 3T)	10^5.V sin (v + 3T)
0°	$\bar{1}$,563 0262	$\bar{3}$,200 9735	296° 17′ 13″,13	− 0,075 797	− 0,132 590
12	$\bar{1}$,575 6928	$\bar{3}$,187 9805	310.15.19,74	− 0,160 323	+ 0,160 981
24	$\bar{1}$,591 0536	$\bar{3}$,172 4325	323.47.40,63	+ 0,287 003	+ 0,205 115
36	$\bar{1}$,608 3766	$\bar{3}$,155 1003	336.51.25,73	+ 0,299 986	− 0,474 492
48	$\bar{1}$,626 8583	$\bar{3}$,136 7934	349.25. 6,96	− 0,737 289	− 0,516 991
60	$\bar{1}$,645 6677	$\bar{3}$,118 3113	1.28.40,17	− 0,987 936	+ 1,038 762
72	$\bar{1}$,663 9969	$\bar{3}$,100 3973	13. 3.18,05	+ 1,196 190	+ 1,884 154
84	$\bar{1}$,681 0985	$\bar{3}$,083 7101	24.11.14,14	+ 3,261 306	− 0,768 404
96	$\bar{1}$,696 3125	$\bar{3}$,068 8085	34.55.26,68	+ 0,876 685	− 4,706 342
108	$\bar{1}$,709 0895	$\bar{3}$,056 1493	45.19.22,76	− 5,037 068	− 4,000 402
120	$\bar{1}$,718 9997	$\bar{3}$,046 0973	55.26.47,69	− 7,549 390	+ 2,778 196
132	$\bar{1}$,725 7421	$\bar{3}$,038 9340	65.21.38,58	− 2,217 964	+ 9,019 476
144	$\bar{1}$,729 1458	$\bar{3}$,034 8686	75. 8. 0,61	+ 6,373 511	+ 7,505 857
156	$\bar{1}$,729 1565	$\bar{3}$,034 0451	84.50. 6,47	+ 9,538 606	− 0,599 565
168	$\bar{1}$,725 8214	$\bar{3}$,036 5425	94.32.17,06	+ 4,625 576	− 7,120 123
180	$\bar{1}$,719 2608	$\bar{3}$,042 3756	104.19. 3,86	− 2,548 361	− 6,430 093
192	$\bar{1}$,709 6496	$\bar{3}$,051 4858	114.15.10,43	− 5,084 191	− 1,019 880
204	$\bar{1}$,697 2106	$\bar{3}$,063 7242	124.25.33,85	− 2,344 188	+ 2,728 927
216	$\bar{1}$,682 2246	$\bar{3}$,078 8316	134.55.23,71	+ 0,981 247	+ 2,110 767
228	$\bar{1}$,665 0692	$\bar{3}$,096 4014	145.49.55,78	+ 1,410 888	− 0,166 194
240	$\bar{1}$,646 2604	$\bar{3}$,115 8455	157.14.16,95	+ 0,059 553	− 0,829 193
252	$\bar{1}$,626 5136	$\bar{3}$,136 3507	169.12.56,63	− 0,474 295	− 0,054 496
264	$\bar{1}$,606 7684	$\bar{3}$,156 8708	181.48.59,54	− 0,000 233	+ 0,277 482
276	$\bar{1}$,588 1714	$\bar{3}$,176 1578	195. 3. 5,32	+ 0,163 433	− 0,044 718
288	$\bar{1}$,571 9604	$\bar{3}$,192 8928	208.52.30,84	− 0,070 352	− 0,088 516
300	$\bar{1}$,559 2691	$\bar{3}$,205 8919	223.10.50,52	− 0,032 654	+ 0,078 772
312	$\bar{1}$,550 9106	$\bar{3}$,214 3249	237.48.42,70	+ 0,073 099	− 0,012 407
324	$\bar{1}$,547 2612	$\bar{3}$,217 8351	252.35.32,41	− 0,049 928	− 0,055 287
336	$\bar{1}$,548 2964	$\bar{3}$,216 4972	267.21.16,47	− 0,025 888	+ 0,081 402
348	$\bar{1}$,553 7060	$\bar{3}$,210 6942	281.57.25,51	+ 0,108 145	− 0,016 427

RECHERCHES MAGNÉTIQUES,

PAR P. DESAINS ET R. CHARAULT.

Vers la fin de l'année 1858, on a entrepris à l'Observatoire impérial une série d'observations magnétiques, qui depuis cette époque ont été continuées sans interruption. Ce Mémoire renferme un résumé des résultats que l'on a obtenus dans l'étude de la déclinaison et de l'inclinaison.

§ I. — DÉCLINAISON A L'OBSERVATOIRE IMPÉRIAL DE PARIS (1858-1861).

La boussole de déclinaison de l'Observatoire est sortie des ateliers de Gambey; elle a été faite par cet artiste sur le modèle qu'il avait adopté en 1823, lorsqu'il commençait à construire les instruments de ce genre.

Dans ses premières boussoles il n'existait qu'une seule lunette pour viser d'une part à l'aiguille, d'autre part aux astres ou à la mire qui servait de point de repère dans la détermination de la méridienne. Par suite, l'objectif avait une disposition particulière. Il était formé d'une lentille principale de $0^m,025$ de diamètre, et d'une autre large seulement de $0^m,01$ et qui s'appliquait sur le centre de la première. Grâce à cet artifice, le verre composé faisait, sur ses bords, fonction d'un objectif de lunette astronomique ordinaire; par sa partie centrale, il fonctionnait comme un verre de microscope, ou, plus exactement, il constituait l'objectif d'une lunette destinée à voir les objets très-voisins. Lorsqu'on voulait opérer, il fallait commencer par faire coïncider les axes de ces deux lunettes distinctes, qui, montées dans un même tube, avaient un oculaire commun. Le problème n'était pas insoluble, mais le principal défaut de l'appareil était la mauvaise qualité, le peu de clarté des images qu'il fournissait.

Pour faire disparaître cette cause d'incertitude dans les visées, Gambey avait fini par séparer la lunette et le microscope, et dans les dernières boussoles construites par lui, ces deux instruments, montés sur des axes de rotation distincts, peuvent se substituer l'un à l'autre dans les mêmes coussinets. On les règle sépa-

rément, de manière que leurs axes optiques soient perpendiculaires à leurs axes de rotation ; et de plus, on fait en sorte que quand le microscope est en place, son axe optique soit rencontré par la verticale passant par le centre du limbe gradué. Quand cette condition est remplie, si l'on vient à substituer la lunette au microscope, elle se trouve naturellement centrée, parce que son axe de rotation est de même longueur que celui du microscope. Au reste, une légère excentricité serait absolument sans influence.

Après nous être longtemps servis de la boussole à lunette unique que nous avions trouvée à l'Observatoire, nous nous sommes décidés à adopter l'autre système ; seulement, pour mieux profiter des avantages qu'il présente, nous avons accru les dimensions de la lunette et celle de l'objectif du microscope.

Notre lunette a $0^m,04$ d'ouverture.

Les astres, les bords du disque solaire s'y voient avec une netteté parfaite. De plus, pour éclairer les fils dans les expériences de nuit, nous avons fait placer, au devant de l'objectif, un disque incliné à 45° sur l'axe et percé d'une large ouverture centrale dont les bords sont argentés au mat à l'intérieur. Il suffit d'en approcher une lampe à distance convenable pour que les fils soient parfaitement visibles, sans que la vision de l'astre soit gênée en aucune sorte. Le microscope, ou, en d'autres termes, la deuxième lunette porte à l'oculaire un micromètre divisé. L'objectif a un diamètre de $0^m,03$; la clarté des images ne laisse rien à désirer.

Le but que nous nous proposions dans l'étude de la déclinaison n'était pas seulement de déterminer à de rares intervalles la position que l'aiguille aimantée occupe à l'Observatoire à un jour et à une heure déterminés, mais bien d'installer une série d'observations qui permissent d'assigner pour chaque jour de l'année la valeur de la déclinaison à trois ou quatre heures différentes, choisies dans la journée. Pour arriver à ce résultat, il fallait nécessairement aux déterminations de déclinaison absolue joindre l'observation régulière d'une boussole des variations.

Celle dont nous faisons usage est, à de très-légères modifications près, identique à l'appareil que Coulomb a construit pour la première fois en 1772. L'aiguille porte à ses deux extrémités des plaques d'ivoire divisées, mobiles sous l'objectif d'un microscope assez puissant, et nous nous sommes assurés par des mesures directes que chacune des divisions vaut 3′ 54″. Ceci posé, il est évident que si l'on connaît exactement la valeur a que doit avoir la déclinaison pour que le zéro de la boussole des variations coïncide avec la croisée des fils du microscope, il suffit, pour mesurer la déclinaison absolue à un instant donné, d'ajouter à a ou d'en retrancher l'indication de la boussole transformée en minutes à raison de 3′ 54″ par division.

Nous nous sommes donc attachés à déterminer avec soin cette valeur de a, ou, si l'on aime mieux, la valeur du zéro de notre boussole des variations. Pour cela, nous avons mesuré un grand nombre de fois la déclinaison absolue au pavillon magnétique en suivant, pendant chaque observation, la marche de la boussole des variations. Chaque détermination nous donnait une valeur du zéro, et presque toutes celles que nous avons ainsi obtenues se sont trouvées comprises entre 19° 51′ 30″ et 19° 52′ 10″; la moyenne générale de nos observations est 19° 52′.

Comme l'exactitude de ce nombre 19° 52′ est fondamentale, nous n'avons rien négligé pour rendre sa détermination indépendante des erreurs propres aux instruments dont nous faisions usage. Nous avons opéré successivement avec deux boussoles différentes : celle de l'Observatoire et celle du Lycée Napoléon. Nous avons interverti les aiguilles, c'est-à-dire que nous avons opéré en observant la position de l'aiguille de l'Observatoire mise dans la boussole du Lycée, et réciproquement. Enfin nous avons opéré avec la boussole de l'Observatoire, tantôt en employant la lunette double unique primitivement adoptée par Gambey, tantôt en nous servant d'une lunette et d'un microscope séparés.

Toutes ces observations se sont confirmées les unes les autres; on en jugera par le tableau suivant :

Tableau d'expériences faites pour déterminer le zéro de la boussole des variations.
(Déclinaison.)

Renseignements.	Date.	Déclinaison.	Boussole.	Zero.
		° ′ ″	′ ″	° ′ ″
Boussole du Lycée Napoléon.	1859 Décembre 28.	19.28.42	23. 3	19.51.43
Id.	Décembre 29.	19.28. 2	25.28	19.53.30
Id.	1860 Novembre 26.	19.19.14	32.25	19.51.39
Boussole du Lycée : aiguille de l'Observatoire	Novembre 26.	19.16.19	35. 9	19.51.28
Id.	Novembre 27.	19.22.20	28.54	19.51.14
Boussole du Lycée	Novembre 24.	19.22.02	30.40	19.52.30
Id.	Décembre 11.	19.23.16	28.20	19.51.47
Boussole de l'Observatoire avec ses deux lunettes	1861 Février 6.	19.15. 9	36.19	19.51.28
	Février 7.	19.20.00	32.13	19.52.13

Pour terminer tout ce qui est relatif à la manière dont nous employons la boussole des variations à la détermination de la déclinaison absolue, nous ajouterons : premièrement, que nous en laissons toujours les microscopes dans une position absolument invariable et soigneusement vérifiée; secondement, que les indications absolues de notre instrument sont actuellement d'autant plus élevées que la déclinaison est plus faible. En sorte que, si le microscope pointe sur le huitième trait de division, on en doit conclure que la déclinaison est $19^\circ 52' - 31' 12'' = 19^\circ 20' 48''$.

La série de nos observations quotidiennes a commencé en juin 1859, et depuis le 2 novembre 1860 elles se font régulièrement aux heures de IX, XII, II et IV S.; on les réduit immédiatement en tableaux, qui à la fin de chaque mois font connaître la marche moyenne de l'aiguille pendant ce mois aux heures indiquées. Nous donnons dans le tableau suivant les moyennes mensuelles pour les mois de novembre et décembre 1860, janvier, février, mars, avril, mai et juin 1861.

Déclinaisons moyennes. Paris, 1860 *novembre, décembre;* 1861 *janvier, juin.*

	IX^h M.	XII^h.	II^h S.	IV^h S.	Moyenne des 4 observat.
	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″
1860 Novembre..	19.16.12	19.22.36	19.23.42	19.20.42	19.20.48
Décembre...	19.17.12	19.20.48	19.21.12	19.19.30	19.19.41
1861 Janvier.....	19.17.36	19.22.36	19.22. 0	19.19.42	19.20.29
Février.....	19.12.30	19.20.54	19.22.30	19.19.12	19.18.47
Mars.......	19.11.36	19.21.54	19.23.24	19.19. 0	19.18.59
Avril.......	19. 9. 6	19.22.24	19.24.48	19.20. 0	19.19. 6
Mai........	19.10. 6	19.21. 6	19.22. 0	19.18. 0	19.17.48
Juin........	19. 8. 0	19.19. 0	19.20.54	19.17.54	19.16.27

Du 1er décembre 1859 au 1er novembre 1860, nos observations quotidiennes ont été faites très-souvent aux heures de IX heures, XII heures, II heures et IV heures. D'ailleurs elles ont été généralement assez multipliées dans le courant de chaque journée pour qu'il fût possible d'obtenir par interpolation la valeur de la déclinaison à des heures différentes de celles auxquelles on fait les mesures directes, et nous avons pu, de l'ensemble de toutes nos mesures, déduire le tableau suivant :

Déclinaisons moyennes. Paris, 1859 *décembre à* 1860 *octobre inclusivement.*

	IX^h M.	XII.	II^h S.	IV^h S.	Moy. définitive des 4 observat.
	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″
1859 Décembre...	19.24.24	19.30.54	19.31.36	19.28.54	19.28.57
1860 Janvier.....	19.23.18	19.28.48	19.29.48	19.28.36	19.27.38
Février.....	19.21. 6	19.29.24	19.31.30	19.28.12	19.27.33
Mars.......	19.19.12	19.32.12	19.34. 6	19.30. 0	19.28.22
Avril.......	19.20.30	19.31.12	19.32.54	19.29. 6	19.28.26
Mai........	19.19. 6	19.29. 6	19.30.18	19.26.36	19.26.17
Juin........	19.15.54	19.27.54	19.30.18	19.25.42	19.24.57
Juillet......	19.14.54	19.27.36	19.29.30	19.25.30	19.24.23
Août.......	19.15.18	19.27.42	19.28.36	19.23.42	19.23.49
Septembre..	19.14.54	19.27.30	19.27. 6	19.22.18	19.22.57
Octobre....	19.14.18	19.25.54	19.25.30	19.22.12	19.21.58

Enfin pour les mois de juin, juillet, août, septembre, octobre et novembre 1859, les résultats que nous pouvons donner sont les suivants :

Déclinaisons moyennes. Paris, 1859 *juin, juillet, août, septembre, octobre, novembre.*

			Moyenne des 4 observat.
Juin 9 au 30.	IX M.	24′ 12″ déduit de 18 observations.	19° 32′ 8″
	XII	34′ 36″ déduit de 19 observations.	
	II S.	36′ 48″ déduit de 19 observations.	
	IV	32′ 54″ déduit de 20 observat.	
Juillet 1 au 29.	IX M.	23′ 12″ déduit de 14 observations.	19° 31′ 33″
	XII	33′ 48″ déduit de 19 observations.	
	II S.	36′ 6″ déduit de 19 observations.	
	IV	33′ 6″ déduit de 21 observat.	
Août 10 au 31.	IX M.	23′ 42″ déduit de 7 observations.	19° 32′ 17″
	XII	37′ 0″ déduit de 8 observations.	
	II S.	36′ 24″ déduit de 11 observations.	
	IV	32′ 0″ déduit de 10 observat.	
Septembre 1 au 30.	IX M.	26′ 12″ déduit de 8 observations.	19° 34′ 13″
	XII	39′ 48″ déduit de 8 observations.	
	II S.	37′ 12″ déduit de 6 observations.	
	IV	33′ 36″ déduit de 9 observat.	
Octobre 1 au 31.	IX M.	23′ 42″ déduit de 24 observations.	19° 32′ 8″
	XII	34′ 42″ déduit de 23 observations.	
	II S.	37′ 36″ déduit de 20 observations.	
	IV	32′ 30″ déduit de 23 observat.	
Novembre 2 au 24.	IX M.	22′ 30″ déduit de 23 observations.	19° 30′ 21″
	XII	34′ 42″ déduit de 23 observations.	
	II S.	34′ 0″ déduit de 17 observations.	
	IV	30′ 12″ déduit de 21 observat.	

Outre ces moyennes relatives aux quatre heures choisies de la journée, on tire encore du registre pour les mois de septembre, octobre et novembre 1859 les renseignements suivants :

Déclinaison moyenne à $2^h 45^m$ S.	Du 16 au 30 septembre	= 19° 35′ 36″ déduit de 15 observations.	19° 34′ 24″
	octobre	= 19° 34′ 36″ déduit de 17 observations.	
	novembre	= 19° 32′ 36″ déduit de 16 observations.	

Antérieurement à l'époque où nous avons commencé la série d'observations quotidiennes qui nous ont conduits aux résultats précédents, nous avions déjà fait à l'Observatoire quelques déterminations de déclinaison. Nos plus anciennes sont du commencement de décembre 1858. Quatre expériences, faites, vers le milieu du jour, les 4 et 6 décembre, nous avaient donné 19° 36′ comme valeur moyenne

de la déclinaison à cette époque. En décembre 1859, la moyenne de six observations, faites du 1er au 10 de ce mois, a été 19° 32′ et en 1860 19° 23′. Le décroissement a été surtout rapide en l'année 1860.

C'est aussi ce que l'on remarque en comparant dans le tableau précédemment donné les moyennes mensuelles successives pour cette même année. Aux heures de XII et de II heures, les moyennes en avril ont une valeur supérieure de 10′ à celle qu'elles ont en décembre, et pour les mêmes heures, les moyennes des mois de juin, juillet et août sont inférieures de 5′ à celles du mois de décembre précédent. Au contraire, la moyenne des mois de juin, juillet et août 1859 avait été un peu supérieure à la déclinaison 19° 36′ trouvée en décembre 1858.

A ce sujet, il y a lieu de remarquer que l'été de 1860 a été froid et pluvieux, et depuis le 8 juin jusqu'au 8 août nos courbes nous ont accusé l'existence de 12 jours de perturbations magnétiques bien prononcées et quelquefois même très-fortes.

§ II. — COURBES MAGNÉTIQUES.

D'après ce qui précède, on voit que l'observation régulière de la boussole des variations nous sert principalement à connaître chaque jour et à des heures différentes et déterminées la valeur de la déclinaison absolue à l'Observatoire impérial. Quant à l'étude continue de la marche de l'aiguille aimantée, il est plus commode de la faire avec les appareils inscripteurs, parce que ces appareils donnent d'eux-mêmes la solution des questions sur lesquelles les boussoles ne fournissent jamais que des résultats approximatifs. Ainsi l'inscription photographique fait connaître immédiatement les heures des maxima et des minima, les valeurs des excursions extrêmes, et surtout enfin elle montre la marche réelle de l'aiguille et ne lui substitue pas une courbe d'interpolation qui souvent laisse passer inaperçus des détails intéressants du phénomène qu'il faut étudier. Le service des courbes se fait du reste sans difficulté. Il faut seulement observer que la préparation du papier est un peu différente de celle des papiers ordinaires.

Au lieu de commencer par imprégner le papier d'une solution renfermant beaucoup d'iodure et un peu de bromure de potassium, on emploie, au contraire, une liqueur renfermant 100 parties d'eau, 9 de bromure de potassium, et 1 d'iodure d'ammonium. Le bain d'argent a la composition ordinaire, mais le papier doit être lavé pendant longtemps à grande eau dans une obscurité complète. On le sèche ensuite, toujours dans l'obscurité. Avec ces précautions, le papier est assez sensible pour pouvoir être employé à sec sans pourtant que les fonds perdent leur blancheur dans le bain d'acide gallique.

De plus, il arrive ordinairement que, même avant l'action de ce bain, la courbe est parfaitement visible. On la voit sur les cylindres eux-mêmes, se détachant en

gris foncé sur un fond parfaitement inaltéré. Nous fixons toujours la feuille sur les cylindres à l'aide de ressorts métalliques.

Pour déduire d'une courbe toutes les indications qu'elle résume, il faut connaître la valeur absolue de la déclinaison lorsque la courbe coupe la ligne de foi, et d'autre part, il faut savoir de combien cette déclinaison varie lorsque l'ordonnée de la courbe s'accroît d'une quantité connue, soit 1 millimètre. Cette dernière question se résout immédiatement dès que l'on connaît le rayon du miroir, la distance qui le sépare de la source lumineuse et celle qui sépare cette source du cylindre; dans notre appareil, 1 millimètre de variation dans l'ordonnée de la courbe répond à 36″ de déplacement dans la direction du barreau aimanté. Quant à la position de la ligne de foi, on la déduit d'une série d'expériences de comparaison toutes semblables à celles qui nous ont donné le zéro de la boussole des variations. Pendant un mois environ, au moment du maximum, on prend les indications correspondantes de la boussole et de la courbe. Des premières on déduit les déclinaisons absolues qui ont lieu au moment des observations. Soient a, a', a'' ces déclinaisons et ω leur moyenne; soient en outre x l'angle qui représente la position de la ligne de foi, $x+\alpha$, $x+\alpha'$, $x+\alpha''$ les données fournies par la courbe et ω' la moyenne des quantités α, α', α''; on a nécessairement $\omega = x + \omega'$, d'où l'on déduit x. Il faut remarquer seulement que x change toutes les fois que l'on fait varier quelque peu l'angle dont le miroir est incliné sur le barreau aimanté qui le porte.

Plus d'une fois, dans la suite de nos recherches, nous avons été obligés de changer ainsi légèrement la situation de notre ligne de foi. En octobre et novembre 1859, elle répondait à une déclinaison de 19 15′ 26″; et dans les mois de juin, juillet et août 1860 à une déclinaison égale à 19° 12′ 12″.

Les courbes offrent dans leur aspect de grandes différences. Lorsqu'on en étudie une série, on les voit passer de la grande régularité que présente celle du 23 octobre 1859 (*Pl. II*) à l'aspect tourmenté de celle que l'on avait obtenue le 18 du même mois (*Pl. V*), et l'on peut saisir ainsi d'un coup d'œil le développement des orages magnétiques. La *Pl. I* permet de suivre dans tous ses détails celui qui a eu lieu du 28 juin au 4 juillet 1860.

Les courbes qui la composent sont, très-sensiblement en demi-grandeur, la copie exacte de nos photographies. Une variation de $9^m 30^s$ de temps répond à 1 millimètre de variation dans l'abscisse de la courbe, et un accroissement de 1′10″ dans la déclinaison à un accroissement de 1 millimètre dans l'ordonnée. Dans les *Pl. II* et *III*, nous donnons au simple trait, mais toujours en demi-grandeur, la reproduction d'une série de courbes régulières ou semi-régulières. Elles font partie de celles qui nous ont servi à étudier, non plus les perturbations de l'aiguille

aimantée, mais bien ce que l'on appelle sa marche normale. Toutes ces courbes vérifient fort nettement que la déclinaison passe le matin par un minimum, et par un maximum vers le milieu du jour. L'heure moyenne du maximum a été la même en octobre et novembre 1859 d'une part, en juin et juillet 1860 d'autre part. Cette heure est $1^h\,20^m$ du soir.

Quant au minimum du matin, il a eu lieu moyennement à $7^h\,10^m$ du matin dans l'été de 1860, et seulement vers $8^h\,40^m$ dans l'automne de l'année précédente. Enfin, pour amplitude moyenne diurne, nous avons trouvé 15′ 36″ en juin et juillet 1860, et 12′ 6″ en octobre et novembre 1859. Les deux tableaux suivants renferment les données qui nous ont conduits à ces résultats :

Relevé des courbes.

Date.	Heure du minimum.	Heure du maximum.	Différence entre le minimum et le maximum.
	h m	h m	′ ″
1859 Octobre 24.	8.52 M.	1.30 S.	12. 0
Octobre 26.	7.58	1. 0	16. 0
Octobre 28.	8.53	1.50	12.18
Octobre 30.	8.45	12.50	12.36
Novembre 1.	8.15	12.55	8.24
Novembre 5.	8.24	1.10	12.18
Novembre 9.	8.10	1.44	13.12
Novembre 15.	9.24	1. 5	11.24
Novembre 23.	9.15	1.41	10.30
Moyennes....	8.43	1.18	12. 5

Date.	Relevé des heures du minimum.	Courbes. Heure du maximum.	Différence entre le maximum et le minimum.
	h m	h m	′ ″
1860 Juin 8.	7. 8 M.	1.33 S.	= 18. 0
Juin 10.	6.57	2.00	= 16.12
Juin 12.	6.48	12.19	= 12. 0
Juin 14.	6.51	1.16	= 14.42
Juin 16.	5.51	1.21	= 14. 6
Juin 18.	6.55	2.00	= 20.42
Juin 21.	6.17	12.48	= 17. 6
Juin 29.	7.00	1.24	= 15.36
Juillet 7.	7.22	2.07	= 14.24
Juillet 9.	6.45	2.21	= 13.30
Juillet 13.	8.00	1.53	= 11. 6
Juillet 15.	7.32	1.45	= 12. 0
Juillet 22.	7.21	12.09	= 18.36
Juillet 25.	6.50	1.38	= 15. 0
Juillet 29.	7.44	11.53	= 20.24
Moyennes....	7. 2	1.22	= 15.34

Les jours de perturbations, l'amplitude des excursions de l'aiguille est de beaucoup supérieure aux valeurs moyennes déduites des tableaux précédents. Le 17 octobre 1859, à $9^h 8^m$ du soir, la déclinaison n'était que de 19° 6′ 26″; le 18, à $2^h 49^m$, elle atteignait 19° 44′ 26″. Le 8 août 1860, un maximum très-prononcé de déclinaison eut lieu à 2 heures du soir et un minimum à 8 heures du soir. La différence de ces positions extrêmes fut de 1° 15′ environ. Le 11 octobre 1859, entre $4^h 30^m$ du soir et minuit, les écarts avaient été encore plus grands. Les *Pl. IV* et *V* viennent à l'appui des assertions précédentes : nous donnons, en vraie grandeur (*Pl. IV*), la courbe des 8 et 9 août 1860, et en deux tiers grandeur (*Pl. V, fig.* 1), une portion de celle des 17 et 18 octobre 1859. Comme détails sur les perturbations, nous ajouterons que le 9 mars 1861, à $10^h 10^m$ du soir, au moment où parut subitement une belle lueur d'aurore boréale, nous avons vu l'aiguille d'une boussole de Gambey, avec laquelle nous déterminions une déclinaison, chassée instantanément à 41′ de la position qu'elle occupait d'abord. Mais cette grande déviation ne dura que très-peu de temps, et des observations faites à la boussole de variations, à 10 heures et $10^h 30^m$, n'en auraient pas donné une idée exacte.

Cet exemple et l'inspection des courbes que nous venons de donner prouvent également que, dans l'étude de ces perturbations, rien jusqu'ici ne paraît pouvoir remplacer le tracé photographique de la marche des aiguilles aimantées, et il serait bien important de pouvoir comparer les courbes qui la représenteraient aux différents points où sont installés des observatoires réguliers.

Comme discussion de méthode, il est utile d'ajouter quelques mots encore. Pour fixer nos idées sur le degré de confiance qu'il convient d'accorder aux indications des courbes photographiques, nous avons, pendant des séries de jours assez étendues, comparé les données que nous fournissaient ces courbes, à celles que nous déduisions de l'observation directe de la boussole des variations. Les différences entre les nombres obtenus par ces deux méthodes distinctes sont presque toujours inférieures à 2′; elles n'atteignent que rarement cette limite, et elles ne l'excèdent qu'aux époques où une perturbation brusque a fait varier la déclinaison d'une quantité considérable dans un intervalle de temps qui ne répond qu'à 1 ou 2 millimètres sur la ligne des abscisses. En ces circonstances, toute comparaison est évidemment impossible.

Dans les cas ordinaires, les petites discordances doivent tenir à deux causes dont il est aussi facile de prévoir l'influence qu'il est difficile de l'éviter. L'une est l'inégale mobilité des aiguilles. Cette cause doit surtout agir aux instants où les mouvements des aiguilles sont rapides et brusques, et ses effets doivent devenir particulièrement manifestes lorsqu'on compare les marches de deux aimants ayant, entre leurs moments magnétiques, un rapport très-différent de celui qui existe

entre leurs moments d'inertie. L'autre cause de désaccord est l'incertitude qui règne souvent sur la valeur exacte des heures pour lesquelles se font les comparaisons. L'emploi de chronomètres n'est pas toujours suffisant pour lever cette deuxième difficulté. Dans nos appareils, 1 millimètre sur la ligne des abscisses répond à $4^m 44^s$ de temps. Or cette limite de 1 millimètre est certainement de l'ordre de grandeur des erreurs qui peuvent provenir, soit des variations de longueur que les papiers éprouvent pendant les lavages, soit de l'incertitude qui règne toujours sur l'abscisse du point de départ, soit enfin du temps perdu inévitable dans la marche des cylindres. Les tableaux suivants renferment de nombreuses comparaisons faites entre les valeurs de déclinaisons, relatives au même instant et déduites : 1° de l'observation de la boussole; 2° de la discussion des courbes. La dernière colonne représente la différence entre l'indication de la boussole et celle de la courbe.

Comparaison entre les données des courbes et celles de la boussole des variations, octobre et novembre 1859.

Dates.	Heures.	Boussole.	Courbes.	Différences.
1859 Octobre 26.	12.0 h m	37.36 ′ ″	36.56 ′ ″	+ 0.40 ′ ″
»	1.20	36.24	36.26	— 0. 2
»	2.45	32. 6	31.56	+ 0.10
»	3.50	29.18	29.56	— 0.38
Octobre 28.	8.45	22.18	22.38	— 0.20
»	11. 0	25. 6	27.08	— 2. 2
»	2.45	32. 6	32.32	— 0.26
»	3.50	31.18	31.02	+ 0.16
Novembre 2	9.15	24.42	24.26	+ 0.18
Novembre 7	9.15	24.42	25.14	— 0.32
»	12.20	36.24	37.38	— 1.14
»	2.45	32.54	32.14	+ 0.40
Novembre 9	9.30	25.48	25.56	— 0. 8
»	12. 0	35.48	35.32	+ 0.16
»	2.45	32. 6	32.14	— 0. 8
			Moyenne....	— 0.13

Comparaison entre les indications des courbes et celles de la boussole des variations.

Dates.	Heures.	Boussole.	Courbes.	Différences.
	h m	′ ″	′ ″	′ ″
1860 Juin 8.	9.45	19.48	20. 0	− 0.12
»	10.50	24.18	23.54	+ 0.24
»	11.45	27.24	27.48	− 0.24
»	12. 0	27.48	28.24	− 0.36
»	2. 0	30.54	29.36	+ 1.18
»	3. 0	29. 0	29. 0	0. 0
»	4. 0	28.36	27.12	+ 1.24
Juin 11.	9.30	26.36	26.36	0. 0
»	10.35	30. 6	29.36	+ 0.30
»	1.45	35.48	34.24	+ 1.24
»	2. 0	31.24	30.48	+ 0.36
»	2.45	28.30	28.24	+ 0. 6
Juin 18.	9.20	19.18	17.36	+ 1.42
»	12. 0	29. 0	29. 0	0. 0
»	1.10	32.30	32.54	− 0.24
»	1.30	32.54	33.12	− 0.18
»	1.45	33.54	33.36	+ 0.18
»	2.45	31.30	31.48	− 0.18
			Moyenne....	+ 0.18

Dates.	Heures.	Boussole.	Courbes.	Différences.
1860 Juillet 6.	3.30	27.24	27.48	− 0.24
»	4. 0	25. 6	26. 0	− 0.54
Juillet 7.	10. 0	16. 6	17. 0	− 0.54
»	10.40	19.12	20.18	− 1. 6
»	12. 0	24.30	26.36	− 2. 6
»	2. 0	26.36	27.12	− 0.36
»	2.45	27. 0	25.24	+ 1.36
Juillet 9.	9.30	14.30	15.12	− 0.42
»	11. 0	19.12	21.12	− 2. 0
»	11.50	23.30	24.48	− 1.18
»	12. 0	24.42	25.48	− 1. 6
»	1.10	26.30	26. 0	+ 0.30
»	2. 0	27.24	26. 0	+ 1.24
»	2.30	26.36	26. 0	+ 0.36
Juillet 14.	9.35	20.24	21.48	− 1.24
»	10.20	24.18	25.24	− 1. 6
»	11. 0	27.24	27.12	+ 0.12
			Moyenne....	− 0.33

Au reste, nous avons retrouvé des différences analogues à celles que les tableaux précédents mettent en évidence, en étudiant simultanément la marche de notre

boussole des variations et celle d'une boussole de Gambey destinée aux mesures absolues et installée à poste fixe dans le pavillon magnétique. Il est en effet résulté de cette étude que, même dans les jours où l'accord des observations a été plus constant, des différences de plus d'une minute se manifestent tout à coup entre des résultats de mesures simultanées. Nous reproduisons comme preuve une série d'observations faites le 8 mars 1861.

Comparaison des indications simultanées de la boussole des variations et de celle de Gambey.

1861 Mars 8.

	Heures.	Boussole des variations.	Marche entre 2 observ.	Boussole de Gambey.	Marche entre 2 observ.
	h m	′ ″	′ ″	′ ″	′ ″
M.	8.45	9. 0		4.42	
	9.30	10.36	+ 1.36	6.18	+ 1.36
	10. 0	12.54	+ 2.18	8.18	+ 2. 0
	10.30	14.30	+ 1.36	9.48	+ 1.30
	11. 0	16. 6	+ 1.36	11.30	+ 1.42
	11.30	17.36	+ 1.30	13. 0	+ 1.30
	12. 0	20. 0	+ 2.24	14.30	+ 1.30
S.	0.30	20. 0	0. 0	15. 0	+ 0.30
	2. 0	19.12	− 0.48	13.18	− 1.42
	2.30	19.12	0. 0	14.18	+ 1. 0
	3. 0	18. 0	− 1.12	12.42	− 1.36
	3.30	16.48	− 1.12	11.18	− 1.24
	4. 0	16.30	− 0.18	10.42	− 0.36

L'accord n'est certainement pas absolu, et pourtant, pendant toute la série de ces observations, aucune perturbation n'est venue troubler la marche des aiguilles. Lorsqu'elles sont un peu agitées, leur marche présente notablement plus de différences. Voici, par exemple, des résultats obtenus le 30 octobre 1860 :

	Heures.	Boussole de Gambey.	Marche entre 2 observ.	Boussole des variations.	Marche entre 2 observ.
M.	9.25	13.42		14. 6	
	10.30	17. 0	+ 3.18	20.54	+ 6.48
	11.30	22.18	+ 5.18	26.42	+ 5.48
	12. 0	24.18	+ 2. 0	30. 0	+ 3.18
S.	0.30	22.42	− 1.36	24.42	− 5.18
	1. 0	24.12	+ 1.30	26. 6	+ 1.24
	1.30	24.12	0. 0	26. 6	0. 0
	2. 0	23. 6	− 1. 6	24.18	− 1.48
	3. 0	21. 0	− 2. 6	24.18	0. 0
	4. 0	17. 0	− 4. 0	20.24	− 3.54

Il est évident qu'ici, entre midi et 3 heures, il y eut quelques oscillations des aiguilles, et en même temps on voit combien la correspondance de leurs mouvements est troublée. Enfin nous avons souvent constaté que le matin l'aiguille de notre boussole des variations marchait encore vers le minimum, alors que la boussole de Gambey avait atteint le sien et y restait stationnaire depuis près de deux heures. Puis, les deux aiguilles remontaient ensemble vers le maximum, mais avec des vitesses irrégulièrement inégales ; seulement il s'établissait entre ces différences une sorte de compensation, et au moment du maximum les deux aiguilles se trouvaient l'une et l'autre sensiblement à même distance de leurs minimums respectifs.

A l'appui de ces nouvelles assertions, nous citons deux séries d'observations faites le 25 octobre et le 3 novembre 1860.

1860 Octobre 25.

	Heures.	Boussole de Gambey.	Marche entre 2 observ.	Boussole de variations.	Marche entre 2 observ.
M.	7h.45m	20'.15"		14'.30"	
	8.45	20.24	+ 0'. 9"	12.54	— 1'.36"
	10.15	25.36	+ 5.12	16.30	+ 3.36
	11.10	31. 0	+ 5.24	21.18	+ 4.48
	12. 0	34. 0	+ 3. 0	24.30	+ 3.12
S.	0.30	35.30	+ 1.30	25.48	+ 1.18
	1. 0	35. 0	— 0.30	25. 6	— 0.42
	2. 0	34.30	— 0.30	23.30	— 1.36
	3. 0	29. 6	— 5.24	21.30	— 2. 0
	4. 0	30. 0	+ 0.54	20.45	— 0.45
	7.35	27.30	— 2.30	16.48	— 3.57

1860 Novembre 3.

	Heures.	Boussole de Gambey.	Marche entre 2 observ.	Boussole de variations.	Marche entre 2 observ.
M.	7.15	12.12		16.42	
	8.40	12.18	+ 0. 6	16.30	— 0.12
	9. 0	12.18	0. 0	15.42	— 0.48
	9.20	12.18	0. 0	14.30	— 1.12
	9.45	14. 0	+ 1.42	17. 0	+ 2.30
	10. 0	14.12	+ 0.12	17.36	+ 0.36
	11. 0	16.18	+ 2. 6	20. 0	+ 2.24
	12. 0	19.42	+ 3.24	21.54	+ 1.54
S.	0.30	19.42	0. 0	22.42	+ 0.48
	1. 0	20. 0	+ 0.18	24.18	+ 1.36
	1.30	21.18	+ 1.18	24.54	+ 0.36
	3.30	17.30	— 3.48	21. 0	— 3.54
	4. 0	17.30	0. 0	21. 0	0. 0
	5. 0	17.30	0. 0	20.45	— 0.15

Entre $9^h 20^m$ du matin et $1^h 30^m$, la boussole de Gambey a marché de 9′ et celle des variations de 10′4. Nous ne savons pas s'il nous sera possible de diminuer ces très-légères différences que nous avons toujours trouvées jusqu'ici entre la marche de nos différents déclinomètres, mais nous avons constaté que ces différences n'influent pas d'une manière sensible sur les moyennes mensuelles. Pour y arriver, nous avons, pendant les mois de juin et juillet 1860, déterminé les moyennes mensuelles aux heures convenues, d'abord par les courbes seules, ensuite par les indications de la boussole des variations. Enfin nous avons déterminé la moyenne générale de ces quatre observations. Les résultats se sont trouvés très-voisins l'un de l'autre, ainsi que l'établit le tableau suivant :

		IXʰ M.	XIIʰ.	IIʰ S.	IVʰ S.	Moyenne des 4 observat.
				1860 Juin.		
Résultats mensuels.	Courbe.........	19°17′54″	19°29′0″	19°29′30″	19°24′54″	19°25′19″
	Boussole.......	19.15.42	19.27.54	19.30.12	19.25.36	19.24.51
	Courbe-Boussole.	+ 2.12	+ 1. 6	− 0.42	− 0.42	+ 0.28
				1860 Juillet.		
Résultats mensuels.	Courbe.........	19.17.24	19.27.36	19.28.42	19.25.36	19.24.57
	Boussole.......	19.14.54	19.26.36	19.28.54	19.26. 6	19.24. 7
	Courbe-Boussole.	+ 2.30	+ 1. 0	− 0.12	− 0.30	+ 0.50

Ces tableaux s'accordent aussi avec les précédents pour montrer que deux aiguilles différentes n'ont pas toujours une marche rigoureusement parallèle, pendant la période de la variation diurne.

§ III. — INCLINAISON.

Dans la boussole d'inclinaison que nous avons employée, le cercle vertical a 36 centimètres de diamètre, le cercle horizontal 20; chacun d'eux est divisé en sixièmes de degré. Dans toutes nos expériences, nous avons déduit l'inclinaison maximum d'un couple de déterminations faites dans deux azimuts rectangulaires distincts l'un et l'autre du méridien magnétique. Enfin, nous n'avons négligé aucune des précautions à l'aide desquelles on élimine les erreurs qui peuvent provenir : 1° de ce que le zéro de la division n'est pas sur l'horizontale passant par le centre du cercle; 2° de ce que l'aiguille n'est pas régulièrement aimantée; 3° enfin de ce qu'elle est mal centrée.

Nos plus anciennes mesures remontent au mois de décembre 1858 ; depuis cette

époque, nous avons mesuré l'inclinaison absolue une ou deux fois par an. Le tableau suivant renferme les résultats de ces déterminations.

Inclinaisons observées à l'Observatoire de Paris.

1858	Décembre	15....	66° 16′
1859	Février	21....	66.12
	Juillet	26....	66.16
	Décembre	18....	66.11
1861	Janvier	26....	66. 6.35″
	Février	5....	66. 5
	Février	7....	66. 4.30

Les expériences qui nous ont conduits aux nombres précédents ont été faites, soit dans les pavillons qui sont spécialement destinés aux observations magnétiques, soit dans le jardin lui-même. Le point où l'on s'installait pour faire la mesure n'avait du reste aucune influence. Nous nous sommes en effet assurés que dans toute la portion du jardin qui entoure le pavillon et jusqu'à une vingtaine de mètres environ, l'inclinaison est rigoureusement la même au même instant. Les expériences qui nous ont conduits à cette conclusion ont été faites le 17 février 1859.

En cette journée, nous avons déterminé l'inclinaison : 1° au pavillon Sud-Est; 2° à la colonne qui existe à l'extrémité Sud de l'allée du milieu du jardin supérieur; 3° au coude de l'avenue; 4° enfin nous avons fait une nouvelle détermination au pavillon Sud-Est. Seulement, comme nous ne voulions rien autre chose que de comparer les valeurs de l'inclinaison en ces différentes stations, nous n'avons jamais interverti les pôles de l'aiguille. Cette opération eût été inutile, et, en accroissant la durée des expériences, elle aurait rendu les résultats moins comparables entre eux.

Le tableau suivant contient le résumé des opérations du 17 février.

Noms des stations.	Heures.	Inclinaison.
Pavillon	9ʰ M. à 10ʰ. 0ᵐ	66°. 0′.20″
Colonne	10 à 11.30	66. 2
Coude de l'avenue........	1 à 2.30	66. 1.30
Pavillon	3 à 4. 0	66. 2.30

Ces nombres présentent entre eux tout l'accord qu'on peut attendre de l'instrument qui a servi à les déterminer. La petite différence qui paraît exister entre les résultats des expériences 1 et 4 faites au même point, mais à des heures différentes, a lieu dans le sens de la variation diurne ordinaire, et elle est à peine de l'ordre de grandeur de cette variation.

Indépendamment des déterminations absolues dont nous venons de faire connaître les résultats, nous avons aussi entrepris une série d'observations quotidiennes destinées à donner les variations diurnes de l'inclinaison. Dans la boussole de variations que nous employons à ces usages, l'aiguille a une longueur de $0^{m},50$. Elle porte à chacune de ses extrémités un réticule formé de deux fils d'araignée croisés. En son milieu, elle est traversée par un couteau semblable à celui des balances de précision et dont l'arête vive sert d'axe de suspension.

Cette arête repose par ses deux extrémités sur des plans d'agate fixés à la partie supérieure d'une forte colonne verticale. On oriente l'appareil de manière que l'arête de suspension soit perpendiculaire au méridien magnétique : alors l'aiguille obéit librement à l'action terrestre totale. Enfin nous ajouterons encore que le plan bissecteur de l'angle du couteau est incliné d'environ 66° sur la ligne de foi de l'aiguille. Les mouvements se mesurent à l'aide de micromètres à peigne que l'on peut tourner de manière à ce que les vis micrométriques se meuvent tangentiellement à l'arc de cercle que décrit l'extrémité de l'aiguille.

Les variations diurnes de l'inclinaison se mesurent fort aisément avec cet appareil; il faut seulement prendre la précaution de faire les lectures aux deux micromètres, afin de s'assurer que l'aiguille ne progresse pas parallèlement à elle-même, par suite d'un glissement du couteau de suspension sur les plans d'agate qui le supportent. L'observation régulière des variations de l'inclinaison est installée depuis le 1er février 1861. Antérieurement à cette époque, nous nous étions proposé de comparer la marche que suivent ces variations pendant l'été à celle qu'elles ont pendant l'hiver. A cet effet, nous avons fait deux séries d'observations, l'une du 15 juin au 15 juillet 1859, l'autre du 15 décembre 1869 au 15 janvier 1860.

En juin et juillet 1859, nous avons toujours vu l'inclinaison diminuer de 9 heures du matin à 4 heures du soir. La marche horaire moyenne était de $-0'56''$ environ, et, par suite, la variation diurne de 9 heures du matin à 4 heures du soir était environ de $3'92''$.

Le tableau suivant renferme les données qui nous ont conduits à ce résultat.

Dates.	Heures.	Marche angulaire de l'aiguille depuis la 1re observat.
	h m	′ ″
1859 Juin 15.	9.30	— 0.00
	12. 0	— 1.22
	2. 0	— 2.36
	4. 0	— 3.18
Juin 16.	9.45	0. 0
	12. 0	— 1.24
	2. 0	— 2.30
	4. 0	— 3.12
Juin 17.	10. 9	0. 0
	12. 0	— 0.48
	1.23	— 1.12
	2. 6	— 1.36
	4. 0	— 2. 6
Juin 18.	9.34	0. 0
	12. 5	— 1.54
	1.10	— 2.48
	2.10	— 3.50
	4. 5	— 4.18
Juin 19.	11.37	0. 0
	1. 7	— 0.24
	3.45	— 0.48
Juin 20.	9.30	0. 0
	11.40	— 0.36
	2. 0	— 1.48
	4. 0	— 2.48
Juin 21.	9.30	0. 0
	12. 0	— 0.42
	2. 0	— 1.36
	4. 0	— 1.54
Juin 22.	9.30	0. 0
	10.20	— 0.12
	11.20	— 0.36
	12.15	— 1. 0
	1. 7	— 1.24
	2.15	— 2.06
	4. 0	— 2.48
Juin 23.	9.45	0. 0
	12. 0	— 1.12
	2.25	— 1.42
	4. 0	— 2.42
Juin 24.	9.34	0. 0
	12. 5	— 1.12
	2. 5	— 1.42
	3.51	— 2.42
Juin 25.	9.40	0. 0
	12. 0	— 4. 0
	2. 9	— 6. 6
	2.26	— 6.42
	4. 0	— 7.30
Juin 27.	10. 0	0. 0
	12. 0	— 1.24
	2.15	— 3. 0
	4. 6	— 3.54
Juin 28.	9. 0	0. 0
	12. 0	— 1.18
	2.25	— 3. 6
	4. 0	— 3. 0
Juin 29.	10. 5	0. 0
	12. 0	— 0.24
	2.30	— 1. 0
	4.15	— 1.24
Juin 30.	10. 0	0. 0
	12.15	— 1. 2
	2. 5	— 2.30
	4. 0	— 3.12
1859 Juil. 9.	9.45	0. 0
	12.10	— 0.54
	2. 0	— 1. 0
	3.30	— 0.48
	4. 0	— 1. 0
Juil. 11.	9.30	0. 0
	10.15	— 0. 6
	12.10	— 2. 0
	2.20	— 3.12
	3.10	— 4. 0
	4. 0	— 4. 0
Juil. 12.	9.30	0. 0
	10. 0	+ 2. 0
	10.30	+ 3.36
	10.55	+ 2.42
	11.35	+ 1.42
	12. 0	+ 2. 0
	1.18	+ 0.48
	2.20	— 0.42
	3.50	— 1.42
Juil. 13.	9.45	0. 0
	12. 0	— 2.48
	2.15	— 3.36
	3.50	— 6. 6
	10.30	— 4.30
Juil. 14.	9.40	0. 0
	12.35	— 1.36
	2.20	— 2. 6
	3.55	— 3.36
Juil. 15.	9.40	0. 0
	12.30	+ 4.30
	2. 5	+ 3.48
	4. 0	+ 2.36

Nous n'avons pas compris dans le calcul de cette marche horaire estivale les observations faites les 12 et 15 juillet, jours pendant lesquels les variations de l'inclinaison ont été inverses de leur marche diurne habituelle.

Au contraire, dans l'hiver 1859-1860 et dans l'hiver 1860-1861, l'inclinaison nous a paru ou rester à peu près stationnaire pendant la journée, ou même le plus souvent éprouver une légère augmentation entre $9^h 30^m$ du matin et 4 heures du soir.

Pour que l'on puisse juger de la grandeur de cette variation, nous donnons *in extenso* le tableau des observations faites pendant le mois de février 1861; celles de décembre 1859 et janvier 1860 conduisaient à des résultats semblables.

Dates.	Heures.	Marche angulaire de l'aiguille depuis la 1re observat.	Dates.	Heures.	Marche angulaire de l'aiguille depuis la 1re observat.
	h m	′ ″		h m	′ ″
1861 Février 1.	9. 0	0. 0	Février 13.	9.30	0. 0
	12. 0	+ 1.54		12. 0	+ 0.48
	2. 0	+ 1.38		2. 0	+ 1.24
	4. 0	+ 2.18		4. 0	+ 2.18
Février 2.	9.30	0. 0	Février 14.	9.30	0. 0
	12. 0	+ 1.24		12. 0	+ 0. 6
	4. 0	+ 3.42		2. 0	— 0.18
				4. 0	+ 0.18
Février 4.	12. 0	0. 0	Février 15.	9.30	0. 0
	2. 0	0. 0		12. 0	0. 0
	4. 0	+ 0. 6		2. 0	+ 0.30
Février 5.	9.30	0. 0		4. 0	+ 0.36
	12. 0	+ 1.12	Février 16.	9.30	0. 0
	2. 0	+ 1. 0		12. 0	+ 1.18
	3. 0	+ 1. 0		2. 0	0. 0
	4. 0	+ 1. 0		4. 0	+ 2.24
Février 6.	9. 0	— 0.24	Février 18.	9.30	0. 0
	9.30	0. 0		12. 0	+ 0.18
	2. 0	+ 4.18		2. 0	— 0. 6
	4. 0	+ 6.18		4. 0	+ 0.54
Février 7.	9. 0	0. 0	Février 19.	9.30	0. 0
	12. 0	+ 1.18		12. 0	+ 0.30
	2. 0	— 0.24		2. 0	+ 0.48
Février 8.	9.30	0. 0	Février 20.	9.30	0. 0
	12. 0	+ 1. 0		12. 0	+ 0.18
	2. 0	+ 1.22		4. 0	— 0.42
	4. 0	+ 2.24	Février 21.	9.30	0. 0
Février 9.	9.30	0. 0		12. 0	+ 1.42
	12. 0	+ 0.42		2. 0	+ 0.54
	2. 0	+ 1.22		4. 0	+ 1.22

Dates.	Heures.	Marche angulaire de l'aiguille depuis la 1re observat.	Dates.	Heures.	Marche angulaire de l'aiguille depuis la 1re observat.
	h m	′ ″		h m	′ ″
1861 Février 22.	9.30	0. 0	Février 25.	12. 0	0. 0
	12. 0	+ 0.54		2. 0	+ 1. 0
	2. 0	− 0.12	Février 27.	9.30	0. 0
	4. 0	− 0.16		12. 0	+ 1.18
Février 23.	9.30	0. 0	Février 28.	9.30	0. 0
	12. 0	− 0.42		12. 0	− 0.36
	2. 0	− 0.42		2. 0	+ 2.18
	4. 0	− 1.18		3. 0	+ 0.24
Février 25.	9.30	0. 0		4. 0	+ 2.24

La boussole de variations à l'aide de laquelle ont été faites les observations précédentes est, comme il a été dit, orientée dans le méridien magnétique. Si on la dirigeait dans un plan faisant avec ce méridien un angle un peu considérable, les changements de position de l'aiguille dépendraient non-seulement des variations survenues dans les grandeurs des composantes horizontales et verticales de la force terrestre, mais aussi de la variation diurne en déclinaison.

En effet, on sait que si le limbe vertical d'une boussole d'inclinaison fait un angle a avec le méridien, l'inclinaison i' de l'aiguille sera liée à celle que l'on mesurerait dans le méridien par l'équation

$$\cot i' = \cos a \cot i.$$

Pour trouver le rapport qui existe entre les variations correspondantes de i' et a, on différentie cette équation et l'on trouve

$$\frac{di'}{da} = \cot i \sin a \sin^2 i'.$$

di' est plus petit que da; toutefois, pour des valeurs de a un peu grandes, une variation de 15′ sur a influerait sur i' d'une manière très-sensible. Mais tant que a ne dépasse pas 3 ou 4°, l'influence dont il s'agit est tout à fait négligeable.

§ IV. — NOTES HISTORIQUES.

A l'occasion des recherches dont nous venons d'exposer partiellement les résultats, nous avons été conduits à rassembler quelques documents sur l'ensemble des travaux du même genre qui ont été exécutés à l'Observatoire pendant le cours du XVIIIe siècle; nous pensons qu'il ne sera pas inutile de les reproduire ici.

Au commencement de ce siècle, la mesure de la déclinaison était faite régulièrement chaque année par La Hire, et l'on trouve, dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences* (1716), la description de l'appareil auquel il donne la préférence pour ces déterminations.

« La boëte dont on se sert dans ces sortes de boussoles, doit être d'une figure » quarrée ou d'un quarré long dont deux de ses côtés qui doivent être dirigés » vers le Septentrion dans l'usage, soient exactement parallèles entre eux, et bien » à l'équaire avec le fond de la boëte. La matière de cette boëte est ordinairement » de bois (la pierre est préférable), bien ferme et non sujet à se tourmenter à » l'humidité et à la sécheresse. . . . .

» Sur le fond de cette boëte, il faut tracer par dedans et par dehors une ligne » droite suivant sa longueur, et qui divise sa largeur en deux parties égales » entr'elles, et au milieu de cette ligne on scelle le pivot qui doit soutenir la chapelle ou chapiteau de l'aiguille. On attache au dedans de la boëte et vers les » extrémités de sa longueur, si elle n'est pas quarrée, deux arcs de cercle égaux » qui doivent être divisés dans leurs degrés et dans leurs parties les plus petites » qu'il sera possible. Le rayon du cercle interne de ces arcs doit être égal, ou » tant soit peu plus grand que la moitié de la longueur de l'aiguille, afin qu'en » tournant sur son pivot elle puisse affleurer par ses pointes le bord intérieur » de ces arcs pour montrer exactement la quantité de la déclinaison de l'aiguille » aimantée. »

Quant à la manière dont La Hire orientait cet appareil, elle se trouve expliquée par La Hire lui-même dans un compte rendu des observations de physique générales faites à l'Observatoire en l'année 1702.

« Je fais toujours les observations contre un des piliers de la terrasse basse de » l'Observatoire, en y appliquant le côté de la boëte où est enfermée l'aiguille, et » par ce moyen j'évite toutes les erreurs qui pourraient provenir de la position de » la boussole sur le méridien. J'ai autréfois vérifié la position du côté de ce pilier » par le passage du Soleil par le méridien, en y appliquant une grande règle qui » portait, à ses deux extrémités, deux pinnules par où passaient les rayons du » Soleil; l'ouverture de la pinnule objective et le trait marqué sur l'autre étaient » dans une ligne exactement parallèle au côté de la règle qui s'appliquait contre » la face du pilier. . . . . »

Les dernières observations de La Hire sont de 1717. De 1719 à 1754, les déterminations magnétiques ont été faites à l'Observatoire par Maraldi d'abord et par de Fouchy ensuite.

Presque toujours ces savants opéraient avec une aiguille longue de 4 pouces seulement; leur appareil était donc moins sensible que celui de La Hire. Toutefois

ces petites boussoles n'étaient pas seules employées. En 1742, Maraldi cite des déterminations faites par lui avec une aiguille de 12 pouces, et Mussenbroëk paraît avoir adopté dans ses déterminations un modèle de boussole tout semblable à celui de La Hire. La *fig.* 1, *Pl. V*, que nous extrayons de son *Traité de Physique*, ne peut laisser de doute sur ce point, et il existe encore à l'Observatoire une boîte de boussole qui rappelle de tous points l'appareil de Mussenbroëk. MQPN est la boîte de la boussole. S et T sont les deux arcs divisés. Z la chappe. Enfin l'ensemble des pièces *vwz* et AB forme un système de leviers, à l'aide duquel on soulève l'aiguille pour décharger le pivot quand l'appareil n'est pas en expérience.

Il ne paraît donc pas que pendant les cinquante années qui ont suivi les derniers travaux de La Hire, il ait été apporté de modifications bien importantes aux méthodes employées à l'Observatoire pour déterminer la déclinaison. Mais vers 1750 un académicien dont le nom est resté dans la science, Du Hamel, à Denainvilliers, en Gatinois, reprit la question avec un soin tout particulier et prépara les progrès qu'elle devait faire bientôt par les découvertes de Coulomb. Par les soins de Du Hamel, le parc du château de Denainvilliers était devenu un vaste observatoire magnétique dans lequel quatre boussoles de déclinaison, fort éloignées les unes des autres et installées sur de solides colonnes de pierre, étaient observées régulièrement quatre fois par jour. Les *Mémoires de l'Académie* pour 1772 donnent la description de ces appareils; nous en extrayons quelques détails qui nous semblent mériter de fixer d'une façon toute spéciale. Du Hamel paraît être un des premiers physiciens qui se soient préoccupés des incertitudes qui peuvent provenir d'un défaut de coïncidence entre l'axe de figure et l'axe magnétique de l'aiguille. Aussi, pour éviter les erreurs auxquelles doivent nécessairement conduire les « sinuosités des filets magnétiques, » il prenait des aiguilles peu épaisses et les suspendait de champ. Quelques-unes d'entre elles avaient d'ailleurs jusqu'à 15 pouces de long, et cette grande longueur contribuait encore à atténuer la fâcheuse influence du défaut de coïncidence entre les deux axes. Du Hamel avait en outre disposé l'une de ses boussoles de manière à pouvoir atteindre un haut degré de précision dans la mesure des angles. Vers les deux extrémités de l'aiguille il avait fixé deux petites pointes parallèles au plan des grandes faces de l'aiguille, et qui se trouvaient verticales quand l'aiguille était en repos. Puis, à la hauteur de ces pointes il avait tracé sur un mur, placé à 52 pieds de distance, une division correspondant à de petites fractions de degré comptées dans un cercle dont le centre était au point de suspension de l'aiguille. En s'alignant sur les deux pointes, il pouvait voir nettement les divisions, et mesurer ainsi avec une grande certitude la quantité dont l'aiguille déclinait à l'ouest du méridien passant par le centre de suspension; ce méridien avait été déterminé par des expériences directes. Les observations magnétiques

que Du Hamel avait insérées aux *Mémoires de l'Académie* sont de 1777; mais vers cette époque, par les soins de Cassini le fils, l'étude du magnétisme reçoit à l'Observatoire de nouveaux développements, et, grâce aux découvertes théoriques de Coulomb, grâce aux nouveaux instruments dont cet homme si éminent dote la science, les déterminations acquièrent une précision qu'elles n'avaient pu jusqu'alors atteindre.

Du Hamel, ainsi que nous l'avons indiqué, avait compris que les « sinuosités des filets magnétiques, » c'est-à-dire le défaut de coïncidence entre l'axe de figure et l'axe polaire de l'aiguille, était une des causes principales des incertitudes des observations; mais il n'avait pas réussi à faire disparaître la fâcheuse influence de cet écartement des deux axes, et sans aucun doute c'est en partie à cette irrégularité dans la distribution du magnétisme qu'il faut attribuer les différences qu'il observait entre les indications simultanées de ces quatre boussoles, différences qui s'élèvent quelquefois à 1°.

Coulomb, en donnant la méthode du retournement (*Savants étrangers*, 1772), rendit les déterminations indépendantes d'une cause d'erreurs qui pouvait apporter une si grande incertitude dans les mesures absolues. Cette découverte fut immédiatement appréciée à sa valeur, car Lemonnier parle du retournement comme d'une opération indispensable, en décrivant, quelques années plus tard, une boussole dont il se servait conjointement avec Cassini pour mesurer la déclinaison absolue.

A l'époque où il faisait connaître le procédé précieux dont nous venons de rappeler l'importance, Coulomb donnait en outre deux boussoles nouvelles, dont l'une était exclusivement destinée à mesurer les variations diurnes et dont l'autre, fort semblable à la première, pouvait être également employée à la mesure des déclinaisons absolues.

De nouveaux modèles de ces boussoles ont depuis été construits avec beaucoup de soins par Fortin d'abord et par Gambey ensuite. Ils sont représentés dans tous les *Traités de Physique*, et généralement employés pour suivre d'heure en heure la marche des aiguilles aimantées. Nous ne les reproduirons pas ici, mais nous décrirons les appareils primitifs de Coulomb sous la forme même qu'il leur avait donnée, tels, en un mot, qu'ils ont servi à Cassini dans les nombreuses déterminations qu'il a faites de 1777 à 1790 environ.

« La *fig.* 2, *Pl. V*, représente extérieurement en perspective toutes les parties de » la boussole; elle est formée d'une boîte de deux ou trois pieds de longueur » posée sur deux traverses de cuivre BB, II; sur ces traverses s'élèvent les piliers » AB, AB et IP, IP; les deux premiers sont liés par une traverse N*n* qui porte » au milieu un trou circulaire pour recevoir la tige creuse CF. On voit cette tra-

ment à l'abri de toute erreur tenant à cette cause, en employant pour soutenir la partie supérieure du paquet de fils l'appareil maintenant connu sous le nom de *micromètre de torsion*.

Cet appareil fut imaginé par un contemporain de Coulomb, le physicien Magny, et il valut à son auteur une mention honorable de l'Académie, dans la séance où elle partageait entre Coulomb et Van-Swinden le prix qu'elle avait proposé pour la question suivante : « Quelle est la meilleure manière de fabriquer les aiguilles » aimantées, de les suspendre et de s'assurer qu'elles sont dans le méridien magné» tique, enfin de rendre raison de leurs variations diurnes régulières? »

Toutes les recherches de Cassini sur les variations diurnes ont été faites avec le premier des deux appareils que nous venons de décrire. Quant aux déterminations de déclinaison absolue, elles ont souvent été exécutées avec une boussole construite sous la direction de Lemonnier (*Mémoires de l'Académie*, 1778), et que l'on employait à peu près comme une boussole marine, quoiqu'elle ressemblât beaucoup par la forme aux anciennes boussoles de La Hire.

Le passage suivant, extrait de la collection des *Mémoires de Météorologie* du P. Cotte, fait connaître les résultats de mesures effectuées avec cet appareil.

« M. Cassini fils m'a communiqué en 1783 les journaux d'observations qu'il a » faites à l'Observatoire en 1780 et 1781 au nombre de 106. Il s'est servi de la » boussole de M. Lemonnier, garnie d'un secteur. L'aiguille forme un parallélipi» pède de $9\frac{1}{2}$ pouces de longueur. M. Cassini place à chaque observation son » instrument sur un fût de colonne, élevé dans le jardin de l'Observatoire, et il » dirige la lunette du secteur vers le troisième moulin de la butte Montmartre à » l'ouest de la pyramide, avec laquelle il fait un angle de 52'. L'angle de ce moulin » avec la méridienne qui passe par le fût de colonne est de 31' 20" qu'il faut » ajouter au nombre des degrés; ..... Le 11 avril 1783, nous avons trouvé la » déclinaison occidentale de 20° 4'. J'ai calculé les 106 observations de Cassini, » et j'en ai conclu la déclinaison moyenne 20° 44' 35". »

Nous terminerons ce résumé historique par un tableau des déclinaisons mesurées à l'Observatoire pendant le XVIIe siècle avec les instruments que nous venons de décrire.

Nous y joindrons quelques déterminations anciennes que le P. Cotte donne également au Tome I de son *Traité de Météorologie*, comme ayant été faites à Paris.

Déclinaisons observées à Paris de 1580 à 1788.

Observateurs.	Dates.	Déclinaisons.
»	1580	Orient. 11°.30′
»	1610	8. 0
»	1664	0. 4
»	1666	0. 0
»	1670	Occid. 1.30
»	1680	2.40
»	1683	3.50
»	1684	4.10
»	1685	4.10
»	1686	4.30
»	1692	5.50
»	1693	6.20
»	1696	7. 8
»	1698	7.40
La Hire.........	1699 Oct. 23.	8.10
La Hire.........	1700 Nov. 20.	8.12
La Hire.........	1702 Sept. 22.	8.48
La Hire.........	1703 Déc. 18.	9. 8
La Hire.........	1704 Oct. 30.	9.20
La Hire.........	1705 Déc. 31.	9.35
La Hire.........	1706 Déc. 31.	9.48
La Hire.........	1707 Déc. 28.	10.10
La Hire.........	1708 Déc. 27.	10.15
La Hire.........	1709 Déc. 24.	10.30
La Hire.........	1710 Déc. 30.	10.50
La Hire.........	1711 Déc. 30.	10.50
La Hire.........	1712 Déc. 30.	11.15
La Hire.........	1713 Déc. 29.	11.12
La Hire.........	1714 Déc. 31.	11.30
La Hire.........	1715 Déc. 30.	11.10
La Hire.........	1716	12.20
La Hire.........	1717	12.40
La Hire fils aîné..	1718	12.30
La Hire fils aîné..	1719 Janv. 7.	12.20
Maraldi.........	1719 Sept. 26.	12.30
Maraldi.........	1720 Sept.	13. 0
Maraldi.........	1721 Janv. 2.	13. 0
Maraldi.........	1721 Oct. 16.	13. 0
Maraldi.........	1722 Janv. 4.	13. 0
Maraldi.........	1723 Nov. 22.	13. 0
Maraldi.........	1723 Janv. 4.	13. 0
Maraldi.........	1723 Déc. 22.	13. 0
Maraldi.........	1724 Janv. 4.	13. 0

Observateurs.	Dates.	Déclinaisons.
Maraldi.........	1724 Nov. 2.	13°. 0′
Maraldi.........	1725 Janv. 3.	13. 0
Maraldi.........	1725 Déc. 30.	13.15
Maraldi.........	1726 Déc. 5.	13.45
Maraldi.........	1728 Janv. 3.	14. 0
Maraldi.........	1729	14. 0
Maraldi.........	1730 Nov. 20.	14.25
Maraldi.........	1731 Déc. 5.	14.45
Maraldi.........	1732 Sept. 5.	15.15
Maraldi.........	1733 Ct de Déc.	15.45
Maraldi.........	1734 Mai 13.	15.35
Maraldi.........	1734 Déc. 1.	15.40
Maraldi.........	1735 Août 28.	15.45
Maraldi.........	1735 Oct. 1.	14.55
Maraldi.........	1736 Décembre.	15.40
Maraldi.........	1737 Janvier.	15.40
Cassini.........	1737	15.45
Cassini.........	1738 Mars 28.	15.10
Maraldi.........	1739 Décembre.	15.30
Maraldi.........	1740	15.45
Cassini.........	1741	15.40
Cassini.........	1742 Mai 26.	15.40
Cassini.........	1742 Juin 2.	15.40
Cassini.........	1743	15.10
De Fouchy.......	1744 Juillet 17, 18, 20, 21.	16.15
De Fouchy.......	1745 Mai 17, 18, 19.	16.15
De Fouchy.......	1746 Juin 24, 25	16.15
De Fouchy.......	1747 Juillet 20, 21, 22.	16.30
De Fouchy.......	1749 Juin 10, 11	16.30
De Fouchy.......	1750 Juin 16, 17	17.15
De Fouchy.......	1752 Juin 15, 16	17.15
De Fouchy.......	1753 Fév. 25, 26	17.20
De Fouchy.......	1754 Mars 6.	17.15
»	1755	17.30
»	1756	17.45
»	1757	18. 0
»	1758	18. 0
»	1759	18.10
»	1760	18.45
»	1761	18.40

Observateurs.	Dates.	Déclinaisons.	Observateurs.	Dates.	Déclinaisons
»	1762	18°.50′	Lemonnier et Cassini.	1779 Juin 24.	20°.34′
»	1763	18.45	»	1780	20°44′35
»	1764	19.15	»	1781	
»	1765	18.52	»	1783	
»	1766	19.15	Cassini	1785 Janv. 1.	21.33
»	1767	19.30	»	1785 Mai 30.	22. 0
»	1768	19.50	»	1786 Juin 1.	21.27
»	1769	19.50	»	1787 Juin 1.	21.36
»	1770	19.55	»	1788 Juin 1.	21.40
Lemonnier et Cassini.	1779 Mars 22.	20.30			

MÉMOIRE

SUR

LE CALCUL DES DIVERS TERMES

DU

DÉVELOPPEMENT DE LA FONCTION PERTURBATRICE

ET DE SES DÉRIVÉES;

PAR J. BOURGET,

Professeur à la Faculté des Sciences de Clermont-Ferrand.

INTRODUCTION.

Lorsqu'on veut calculer les diverses inégalités d'une planète ordinaire, la méthode la plus simple consiste à développer algébriquement la fonction perturbatrice R et ses dérivées en séries de termes proportionnels aux sinus et cosinus des multiples des anomalies moyennes T et T' des deux corps considérés. De simples substitutions numériques dans des formules bien connues conduisent ensuite aux résultats demandés. Le développement algébrique de R est, il est vrai, assez laborieux, et les erreurs y sont faciles; mais il a été exécuté plusieurs fois par divers géomètres qui se sont mutuellement contrôlés et corrigés, et les derniers travaux de M. Le Verrier sur ce sujet, insérés dans les *Annales de l'Observatoire*, ne laissent rien à désirer au point de vue de l'étendue et de l'exactitude.

Lorsqu'il s'agit au contraire d'un astéroïde ou d'une comète, l'excentricité et l'inclinaison sont trop fortes pour que la série qui représente R soit rapidement convergente, et la même méthode conduit alors à des calculs si laborieux, qu'on doit l'abandonner. D'ailleurs, dans le cas même d'une planète ordinaire, le calcul d'une inégalité à longue période dont l'argument serait un peu élevé exigerait qu'on poussât le développement algébrique trop loin, et l'on est encore amené à

recourir à quelque méthode d'interpolation permettant de calculer approximativement le coefficient numérique de R qui correspond à l'inégalité en question.

On sait depuis longtemps que le coefficient d'un terme quelconque du développement de R ou de ses dérivées peut s'exprimer par une intégrale double; mais son évaluation par la méthode des quadratures approchées est pénible. Dans le Tome I[er] de son Journal, M. Liouville a montré qu'on peut ramener l'intégrale double à une intégrale simple qui en diffère très-peu, ce qui suffit dans les applications numériques. Le procédé qu'il indique est extrêmement simple en théorie, mais il présente quelques difficultés quand on veut le mettre en pratique. M. Le Verrier a donné une méthode pour calculer approximativement les divers termes de la fonction perturbatrice et de ses dérivées au moyen de valeurs particulières de ces fonctions; elle présente sur les autres cet avantage qu'on utilise tous les calculs antérieurs si l'on est amené dans la suite à reconnaître qu'il faut augmenter le nombre des valeurs particulières de la fonction (*). M. Le Verrier en a fait usage dans le calcul d'une inégalité de Pallas due à l'action de Jupiter et dépendant de l'argument $(18n' - 7n)$.

M. Hansen a publié sous le titre suivant, *Mémoire sur la détermination des perturbations absolues dans les ellipses d'une excentricité et d'une inclinaison quelconques,* une méthode conduisant par une autre voie au même résultat. Enfin l'illustre Cauchy, dans diverses Notes faisant partie des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, et en particulier dans les Notes annexées au Mémoire de M. Le Verrier sur les inégalités de Pallas, a indiqué plusieurs procédés à l'aide desquels on peut évaluer rapidement les termes de la fonction R avec autant d'approximation que l'on veut (**). Cauchy a fait usage de deux de ces méthodes pour contrôler le travail de M. Le Verrier sur Pallas.

La première est particulièrement intéressante, parce qu'elle suffit pour traiter complétement une planète; en cherchant à en faire quelques applications, j'ai été conduit à lui donner une notable extension, et, je crois, aussi d'importantes améliorations. La seconde ne peut servir que dans le cas où n' est élevé, mais elle est alors d'une extrême rapidité. Cauchy déduit les formules qui se rapportent à ce dernier cas, d'un Mémoire sur l'évaluation des fonctions de grands nombres; j'en donne ici une démonstration directe extrêmement simple, que j'étends à une autre fonction dont le développement est nécessaire pour la théorie d'une planète.

Je présente dans ce Mémoire l'ensemble de toutes mes recherches sur ces deux

---

(*) *Annales de l'Observatoire*, page 384.

(**) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, Tomes XII, XIII,.. , XX.

méthodes. On verra qu'elles offrent une application nouvelle des transcendantes de Bessel et des nombres de Cauchy, qui manifeste toute l'importance des théorèmes que nous avons formulés dans un précédent travail.

§ I. — FORMULES GÉNÉRALES POUR LE CALCUL DES VARIATIONS DES ÉLÉMENTS.

1. *Conventions et notations.* — Nous désignerons par t le temps compté à partir d'une époque quelconque, et rapporté à l'année Julienne prise pour unité.

Nous prendrons pour plan fixe le plan de l'écliptique à l'origine du temps et nous rapporterons les longitudes à la position moyenne de la ligne des équinoxes à cette époque. Sur l'orbite d'une planète nous compterons les longitudes à partir du rabattement sur cette orbite de la ligne des équinoxes, ce rabattement s'effectuant autour de la ligne du nœud ascendant de l'orbite sur l'écliptique.

Nous désignerons en outre par :

a, le demi grand axe de l'orbite;

μ, le moyen mouvement sidéral en une année Julienne;

e, l'excentricité de l'orbite;

f, la racine $\sqrt{1-e^2}$;

η, la tang $\left(\frac{1}{2}\text{ arc sin} = e\right) = \frac{e}{1+f} = \frac{e}{2}(1+\eta^2)$;

ϖ, la longitude du périhélie;

φ, l'inclinaison du plan de l'orbite sur le plan fixe;

I, l'inclinaison mutuelle des orbites de m et m';

θ, la longitude du nœud ascendant;

ε, la longitude de l'époque;

r, le rayon vecteur héliocentrique;

ρ, la distance des deux planètes;

δ, la distance angulaire des deux planètes, vue du Soleil;

s, le cosinus de δ;

u, l'anomalie excentrique;

v, la longitude vraie;

w, l'anomalie vraie ou $v - \varpi$;

T, l'anomalie moyenne ou $\mu t + \varepsilon - \varpi$;

l, la longitude moyenne $\mu t + \varepsilon$;

ζ, la partie μt de la longitude moyenne dans le mouvement troublé;

m, la masse de la planète rapportée à celle du Soleil prise pour unité;

k, le nombre $\frac{a\mu m'}{1+m}$;

R, la fonction perturbatrice $\frac{rs}{r'^2} - \frac{1}{\rho}$;

c, la base des logarithmes népériens;

M, le module 0,43429... qui sert à passer des logarithmes népériens aux logarithmes vulgaires;

Π, la longitude du nœud ascendant de la planète troublée sur l'orbite de la planète perturbatrice, comptée à partir du nœud ascendant de cette dernière sur le plan fixe de l'écliptique.

Nous désignons par les mêmes lettres accentuées les quantités de même nom qui se rapportent à m'. D'autres notations, que nous ferons connaître, s'introduiront dans le cours du Mémoire.

2. *Changement de plan fixe.* — On simplifie le calcul des perturbations en prenant pour plan fixe le plan de la planète perturbatrice à l'origine du temps. Dans ce cas les longitudes sont comptées à partir du nœud ascendant de la planète perturbatrice sur le plan de l'écliptique. Nous désignerons par

$$\nu_1, \quad \varpi_1, \quad \varepsilon_1, \quad \nu'_1, \quad \varpi'_1, \quad \varepsilon'_1,$$

les quantités que nous avions désignées d'abord par

$$\nu, \quad \varpi, \quad \varepsilon, \quad \nu', \quad \varpi', \quad \varepsilon',$$

et nous appellerons H l'angle formé par les nœuds de la planète troublée sur l'écliptique et sur le plan de l'orbite de la planète perturbatrice. Si donc nous désignons par N, N' les nœuds des deux planètes sur l'écliptique, par I l'intersection des deux orbites apparentes sur la sphère céleste décrite du Soleil comme centre, les trois points N, N', I déterminent un triangle sphérique dont les côtés sont

$$\theta - \theta', \quad \mathrm{H}, \quad \Pi,$$

et les angles opposés

$$\mathrm{I}, \quad \varphi', \quad \pi - \varphi.$$

3. *Formules qui servent à calculer les inégalités.* — Si nous transportons nos conventions dans les formules données par M. Le Verrier (*Annales de l'Observatoire*, Tome I, page 336), nous trouvons pour déterminer les perturbations de la planète m, dues à l'influence de m', les équations suivantes :

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \sin \mathrm{I}\,\frac{d\Pi}{dt} &= \frac{\sin \mathrm{I}}{f} \sin(w_1 + \varpi_1 - \Pi) \sin(w'_1 + \varpi'_1 - \Pi)\, krr' \left(\frac{1}{r'^3} - \frac{1}{\rho^3}\right) \\ &= \frac{d\mathrm{I}}{dt} \operatorname{tang}(w_1 + \varpi_1 - \Pi), \end{aligned}\right.$$

(2) $$\frac{d\mathrm{I}}{dt} = \frac{\sin \mathrm{I}}{f} \cos(w_1 + \varpi_1 - \Pi) \sin(w'_1 + \varpi'_1 - \Pi)\, krr' \left(\frac{1}{r'^3} - \frac{1}{\rho^3}\right),$$

(3) $$\left\{ \begin{aligned} \frac{d \log a}{dt} &= -\frac{2\mathrm{M}e}{f^3} \frac{af^2}{r} \sin w_1 \left(kr\frac{d\mathrm{R}}{dr}\right) - \frac{2\mathrm{M}}{f^3}\left(\frac{af^2}{r}\right)^2 \left(k\frac{d\mathrm{R}}{dv_1}\right) \\ &= -2\mathrm{M}k\frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{T}}, \end{aligned} \right.$$

(4) $$\frac{de}{dt} = \frac{f}{e}\left(k\frac{d\mathrm{R}}{dv_1}\right) + \frac{f^2}{2\mathrm{M}e}\frac{d\log a}{dt},$$

(5) $$\frac{e\,d\varpi_1}{dt} = -af\left(k\,\frac{1}{a}\frac{d\mathrm{R}}{de}\right) + e \tang \frac{1}{2}\mathrm{I}\left(\sin \mathrm{I}\frac{d\Pi}{dt}\right),$$

(6) $$\frac{d(\varepsilon_1 - \varpi_1)}{dt} = 2\left(kr\frac{d\mathrm{R}}{dr}\right) + \frac{af^2}{e}\left(k\frac{1}{a}\frac{d\mathrm{R}}{de}\right),$$

(7) $$k\frac{1}{a}\frac{d\mathrm{R}}{de} = -\frac{\cos w_1}{r}\left(kr\frac{d\mathrm{R}}{dr}\right) + \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{af^2}\right)\sin w_1 \left(k\frac{d\mathrm{R}}{dv_1}\right),$$

(8) $$\frac{d^2\zeta}{dt^2} = 3k\mu\frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{T}} = -\frac{3\mu}{2\mathrm{M}}\frac{d\log a}{dt}.$$

Ces formules conviennent surtout au cas où l'excentricité de m est assez grande et nous avons précisément pour but d'exposer une méthode d'interpolation applicable à la théorie des astéroïdes et des comètes.

Aux formules ci-dessus il faut joindre les suivantes auxquelles la valeur de R conduit facilement :

(9) $$k\mathrm{R} = \frac{krr's}{r'^3} - \frac{k}{\rho},$$

(10) $$kr\frac{d\mathrm{R}}{dr} = k\left(\frac{rr's}{r'^3} - \frac{rr's - r^2}{\rho^3}\right),$$

(11) $$k\frac{d\mathrm{R}}{dv_1} = k\frac{d\mathrm{R}}{ds}\frac{ds}{dv_1} = krr'\frac{ds}{dv_1}\left(\frac{1}{r'^3} - \frac{1}{\rho^3}\right).$$

4. *Calcul des perturbations des éléments de m rapportés au plan fixe de l'écliptique.* — Les formules précédentes (1), (2), ..., permettent de calculer par l'intégration

$$\delta\Pi,\ \delta\mathrm{I},\ \delta a,\ \delta e,\ \delta\varpi_1,\ \delta\varepsilon_1,\ \delta\zeta,$$

mais elles ne font pas connaître

$$\delta\varphi,\ \delta\theta,\ \delta\mathrm{H},\ \delta\varpi,\ \delta\varepsilon.$$

Ces dernières variations peuvent facilement se tirer des calculs précédents, en se servant des formules que nous allons donner.

1° Le triangle INN′ donne

$$(12) \qquad -\cos\varphi = -\cos I \cos\varphi' + \sin I \sin\varphi' \cos\Pi.$$

Si l'on différentie cette équation, en observant que φ' est invariable quand on cherche les variations du premier ordre par rapport aux masses perturbatrices, et en utilisant les relations

$$(13) \qquad \cos I \cos\Pi = \cot H \sin\Pi - \cot\varphi' \sin I,$$

$$(14) \qquad \frac{\sin\varphi'}{\sin\varphi} = \frac{\sin H}{\sin\Pi},$$

on obtient

$$(15) \qquad \delta\varphi = \cos H\,\delta I - \sin I \sin H\,\delta\Pi.$$

2° Le même triangle sphérique nous donne les relations suivantes :

$$(16) \qquad \frac{\sin(\theta-\theta')}{\sin I} = \frac{\sin\Pi}{\sin\varphi},$$

$$(17) \qquad \cos\Pi\cos H = -\cot(\theta-\theta')\sin H + \cot I \sin\varphi,$$

$$(18) \qquad \cos\Pi = \cos H\cos(\theta-\theta') - \sin H \sin(\theta-\theta')\cos\varphi;$$

on en déduit en différentiant la première, et en opérant quelques transformations au moyen des deux autres,

$$(19) \qquad \sin\varphi\,\delta\theta = \sin H\,\delta I + \cos H \sin I\,\delta\Pi.$$

3° L'équation (14) différentiée et unie aux équations (18) et (16) fournit encore la relation

$$(20) \qquad \sin\varphi\,\delta H = \cos(\theta-\theta')\sin\varphi'\,\delta\Pi - \sin H\cos\varphi\,\delta I.$$

4° On a d'ailleurs

$$(21) \qquad \varpi = \varpi_1 + H + \theta - \Pi;$$

on en conclut

$$(22) \qquad \delta\varpi = \delta\varpi_1 + \delta H + \delta\theta - \delta\Pi,$$

et en substituant les valeurs des trois dernières variations trouvées plus haut, on

obtient, après quelques réductions fondées sur les formules

$$(23)\qquad \cos I = \cos\varphi \cos\varphi' + \sin\varphi \sin\varphi' \cos(\theta - \theta'),$$

$$(24)\qquad \cos\varphi' = \cos\varphi \cos I + \sin\varphi \sin I \cos H,$$

l'équation

$$(25)\qquad \partial\varpi = \partial\varpi_1 + \sin H \tang\frac{1}{2}\varphi\partial I + \frac{\sin^2\frac{1}{2}\varphi - \sin^2\frac{1}{2}\varphi' - \sin^2\frac{1}{2}I}{\cos^2\frac{1}{2}\varphi}\partial\Pi.$$

5° Enfin, comme on a aussi

$$(26)\qquad \varepsilon = \varepsilon_1 + H + \theta - \Pi,$$

d'où

$$(27)\qquad \partial\varepsilon = \partial\varepsilon_1 + \partial H + \partial\theta - \partial\Pi,$$

on obtient encore

$$(28)\qquad \partial\varepsilon = \partial\varepsilon_1 + \sin H \tang\frac{1}{2}\varphi\partial I + \frac{\sin^2\frac{1}{2}\varphi - \sin^2\frac{1}{2}\varphi' - \sin^2\frac{1}{2}I}{\cos^2\frac{1}{2}\varphi}\partial\Pi.$$

Les cinq formules (15), (19), (20), (25), (28) permettent donc de revenir du calcul des perturbations des éléments de la planète rapportée au plan de la planète perturbatrice, à celui des perturbations des mêmes éléments rapportés au plan de l'écliptique.

5. *Remarque.* — Pour éviter des écritures pénibles, nous nommerons dans ce qui va suivre

$$\varepsilon,\quad \varpi,\quad \nu,\quad w,\quad \varepsilon',\quad \varpi',\quad \nu',\quad w',$$

ce que nous devrions appeler

$$\varepsilon_1,\quad \varpi_1,\quad \nu_1,\quad w_1,\quad \varepsilon'_1,\quad \varpi'_1,\quad \nu'_1,\quad w'_1,$$

Comme le retour au plan de l'écliptique ne s'opère qu'au bout du calcul relatif à ces dernières quantités, ce changement de notation n'amènera aucune confusion.

§ II. — RÉDUCTION DU PROBLÈME DU DÉVELOPPEMENT DE LA FONCTION PERTURBATRICE ET DE SES DÉRIVÉES A LA RECHERCHE DE QUATRE FORMULES.

6. On sait que pour déduire des formules (1), (2), etc., les inégalités de la planète m, il suffit de développer les seconds membres en séries de termes proportionnels aux sinus et cosinus des multiples des anomalies moyennes T et T', ou, ce qui revient au même, en séries de termes proportionnels aux puissances et aux produits des exponentielles imaginaires

$$y = c^{\mathrm{T}i}, \qquad y' = c^{\mathrm{T}'i}. \tag{29}$$

Nous supposerons d'abord que l'on ait donné une valeur particulière à T, les seconds membres ne seront plus fonctions que de T', et chacun d'eux pourra être développé en une série de termes proportionnels aux puissances de l'exponentielle

$$y' = c^{\mathrm{T}'i},$$

Il nous sera facile de montrer ensuite comment, par diverses méthodes, on peut trouver le coefficient d'un terme quelconque

$$c^{(n\mathrm{T}+n'\mathrm{T}')i},$$

du développement à former, quand on connaît pour une série de valeurs particulières de T, le coefficient de

$$c^{n'\mathrm{T}'i}.$$

Posons donc, en admettant que T ait reçu une valeur particulière,

$$k\mathrm{R} = \sum_{-\infty}^{\infty}{}_{n'} \mathrm{Y}_{n'} y'^{n'}, \tag{30}$$

$$2\,kr\frac{d\mathrm{R}}{dr} = \sum_{-\infty}^{\infty}{}_{n'} \mathrm{Y}'_{n'} y'^{n'}, \tag{31}$$

$$k\frac{d\mathrm{R}}{dv} = \sum_{-\infty}^{\infty}{}_{n'} \mathrm{Y}''_{n'} y'^{n'}, \tag{32}$$

$$\frac{d\mathrm{I}}{dt} = \sum_{-\infty}^{\infty}{}_{n'} \mathrm{Y}'''_{n'} y'^{n'}. \tag{33}$$

Si nous substituons dans les formules (1), (2), etc., aux premiers membres des équations (30), (31), (32), (33) leurs valeurs, nous aurons, pour calculer les perturbations des éléments, les formules suivantes :

$$\text{(I)} \qquad \frac{dI}{dt} = \sum_{-\infty}^{\infty}{}_{n'} Y'''_{n'} y'^{n'},$$

$$\text{(II)} \qquad \sin I \frac{d\Pi}{dt} = \sum_{-\infty}^{\infty}{}_{n'} Y'''_{n'} \operatorname{tang}(w + \varpi - \Pi) y'^{n'},$$

$$\text{(III)} \qquad \begin{cases} \dfrac{d\log a}{dt} = -2Mk\dfrac{dR}{dT} \\ \qquad = \displaystyle\sum_{-\infty}^{\infty}{}_{n'} \left[-\frac{Me}{f^3}\frac{af^2}{r}\sin w\, Y'_{n'} - \frac{2M}{f^3}\left(\frac{af^2}{r}\right)^2 Y''_{n'} \right] y'^{n'}, \end{cases}$$

$$\text{(IV)} \qquad \frac{de}{dt} = \sum_{-\infty}^{\infty}{}_{n'} \frac{f}{e} Y''_{n'} y'^{n'} + \frac{f^2}{2Me}\frac{d\log a}{dt},$$

$$\text{(V)} \qquad \begin{cases} \delta\varpi = \delta_1\varpi + \delta_2\varpi, \\ e\dfrac{d\delta_1\varpi}{dt} = \displaystyle\sum_{-\infty}^{\infty}{}_{n'} \left[\frac{af}{2r}\cos w\, Y'_{n'} - \frac{2}{f}\left(1 + \frac{e}{2}\cos w\right)\sin w\, Y''_{n'} \right] y'^{n'}, \\ \delta_2\varpi = \operatorname{tang}\dfrac{1}{2}I(\sin I\,\delta\Pi), \end{cases}$$

$$\text{(VI)} \qquad \frac{d(\varepsilon - \varpi)}{dt} = \sum_{-\infty}^{\infty}{}_{n'} \left[\left(1 - \frac{af^2}{2er}\cos w\right) Y'_{n'} + \frac{2}{e}\left(1 + \frac{e}{2}\cos w\right)\sin w\, Y''_{n'} \right] y'^{n'},$$

$$\text{(VII)} \qquad \frac{d^2\zeta}{dt^2} = 3k\mu\frac{dR}{dT} = 3\mu\frac{d}{dT}(kR) = -\frac{3\mu}{2M}\frac{d\log a}{dt}.$$

Nous sommes donc ramenés à trouver les quatre quantités $Y_{n'}$, $Y'_{n'}$, $Y''_{n'}$, $Y'''_{n'}$ pour une valeur déterminée de T, et nous aurons dans les équations précédentes les coefficients de $y'_{n'}$ pour cette même valeur particulière. A la vérité $Y_{n'}$ ne paraît pas dans ces formules, mais il est clair qu'il entre implicitement dans les formules qui donnent $\frac{d\log a}{dt}$ et $\frac{d^2\zeta}{dt^2}$.

§ III. — CALCUL DE $Y_{n'}$.

7. *Réduction du problème à d'autres plus simples.* — Nous avons posé

$$R = \frac{rr's}{r'^3} - \frac{1}{\rho};$$

admettons qu'on ait effectué les quatre développements des fonctions

$$krr's, \quad \frac{1}{r'^3}, \quad \frac{krr's}{r'^3}, \quad \frac{k}{\rho},$$

et soient

(34) $$krr's = \sum_{-\infty}^{\infty}{}_{n'} A_{n'} y'^{n'},$$

(35) $$\frac{1}{r'^3} = \sum_{-\infty}^{\infty}{}_{n'} B_{n'} y'^{n'},$$

(36) $$\frac{krr's}{r'^3} = \sum_{-\infty}^{\infty}{}_{n'} C_{n'} y'^{n'},$$

(37) $$\frac{k}{\rho} = \sum_{-\infty}^{\infty}{}_{n'} D_{n'} y'^{n'},$$

nous aurons évidemment

(38) $$Y_{n'} = C_{n'} - D_{n'};$$

nous allons donc chercher $C_{n'}$ et $D_{n'}$, et incidemment $A_{n'}$, $B_{n'}$ qui nous fourniront des vérifications pour le calcul de $C_{n'}$ et dont nous aurons besoin plus tard.

8. *Transformation de s et de krr's.* — Si nous nous reportons à la *fig.* 1, nous tirons de la considération du triangle $mm'I$ l'équation

(39) $$s = \cos mI \cos m'I + \sin mI \sin m'I \cos I.$$

Posons

(40) $$\sin^2 \frac{1}{2} I = \nu, \qquad \cos^2 \frac{1}{2} I = o,$$

puis

(41) $$\chi' = \varpi' - \theta' - \Pi = \varpi'_1 - \Pi,$$

(42) $$\chi = \varpi - \theta - H = \varpi_1 - \Pi,$$

puis encore

(43) $$\varkappa' - \varkappa = \omega, \qquad \varkappa' + \varkappa = \Omega,$$

il viendra enfin

(44) $$s = o \cos(w' - w + \omega) + \nu \cos(w' + w + \Omega).$$

En développant le second membre et en posant

(45) $$\left\{ \begin{array}{ll} \mathrm{M} = o \cos\omega + \nu \cos\Omega, & \mathrm{N} = o \sin\omega + \nu \sin\Omega, \\ \mathrm{M}' = o \cos\omega - \nu \cos\Omega, & \mathrm{N}' = o \sin\omega - \nu \sin\Omega, \end{array} \right.$$

nous avons

(46) $$s = \mathrm{M} \cos w \cos w' + \mathrm{M}' \sin w \sin w' - \mathrm{N} \cos w \sin w' + \mathrm{N}' \sin w \cos w'.$$

A la place de w' introduisons l'anomalie excentrique u', et posons, pour abréger,

(47) $$\left\{ \begin{array}{l} g = k(\mathrm{M} a'.r \cos w + \mathrm{N}' a'.r \sin w), \\ h = k(\mathrm{N} a' f'.r \cos w - \mathrm{M}' a' f'.r \sin w), \end{array} \right.$$

nous aurons

(48) $$krr's = -ge' + g \cos u' - h \sin u',$$

ou bien encore

(49) $$krr's = -ge' + \frac{1}{2} g \left(x' + \frac{1}{x'}\right) + \frac{1}{2} hi \left(x' + \frac{1}{x'}\right),$$

en posant

(50) $$x' = c^{u'i}.$$

9. *Recherche de* $\mathrm{A}_{n'}$. — Pour cette recherche et pour d'autres qui vont suivre, nous ferons usage d'un théorème de Cauchy dont voici l'énoncé : *Pour trouver le coefficient* $\mathrm{A}_{n'}$ *de l'exponentielle* $y^{n'}$ *relative à l'anomalie moyenne dans le développement d'une fonction* R *quelconque, il suffit de chercher celui de* $x'^{n'}$ *dans le développement, suivant les puissances de* x', *de la fonction*

$$\mathrm{R}\left[1 - \frac{e'}{2}\left(x' + \frac{1}{x'}\right)\right] c^{\frac{n'e'}{2}\left(x' - \frac{1}{x'}\right)},$$

en d'autres termes on a

$$A_{n'} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x'^{-n'} R\left[1 - \frac{e'}{2}\left(x' + \frac{1}{x'}\right)\right] e^{\frac{n'e'}{2}\left(x' - \frac{1}{x'}\right)}\, du'.$$

Ce théorème nous donne pour la fonction (49)

$$(51)\quad \left\{\begin{aligned} A_{n'} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x'^{-n'} &\left[-ge' + \frac{1}{2}g\left(x' + \frac{1}{x'}\right) + \frac{1}{2}hi\left(x' - \frac{1}{x'}\right)\right] \\ &\times \left[1 - \frac{e'}{2}\left(x' + \frac{1}{x'}\right)\right] e^{\frac{n'e'}{2}\left(x' - \frac{1}{x'}\right)}\, du'. \end{aligned}\right.$$

Exécutons les calculs sous le signe $\int$, et rappelons-nous la notation adoptée dans un Mémoire sur les nombres de Cauchy et les transcendantes de Bessel (*), en vertu de laquelle

$$(52)\qquad (j, n)_p = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x^{-p}\left(x + \frac{1}{x}\right)^j e^{\frac{ne}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)}\, du,$$

nous aurons

$$\left\{\begin{aligned} A_{n'} = &-ge'\left\{(0, n')_{n'} - \frac{e'}{2}(1, n')_{n'}\right\} \\ &+ \frac{1}{2}g\left\{(0, n')_{n'-1} + (0, n')_{n'+1} - \frac{e'}{2}\left[(1, n')_{n'-1} + (1, n')_{n'+1}\right]\right\} \\ &+ \frac{1}{2}hi\left\{(0, n')_{n'-1} - (0, n')_{n'+1} - \frac{e'}{2}\left[(1, n')_{n'-1} - (1, n')_{n'+1}\right]\right\}. \end{aligned}\right.$$

Mais

$$(53)\qquad \frac{e}{2}(1, n)_p = \frac{p}{n}(0, n)_p,$$

donc

$$(54)\qquad A_{n'} = \frac{g}{2n'}\left[(0, n')_{n'-1} - (0, n')_{n'+1}\right] + i\frac{h}{2n'}\left[(0, n')_{n'-1} + (0, n')_{n'+1}\right].$$

Enfin posons, pour abréger,

$$(55)\qquad \left\{\begin{aligned} \sigma_p^{(n')} &= (0, n')_{n'-p} + (0, n')_{n'+p}, \\ \delta_p^{(n')} &= (0, n')_{n'-p} - (0, n')_{n'+p}, \end{aligned}\right.$$

(*) *Voir* la note placée à la fin du Mémoire.

d'où l'on conclut

$$\sigma_{-p} = \sigma_p, \qquad \delta_{-p} = -\delta_p; \tag{56}$$

l'équation (54) devient

$$A_{n'} = \frac{g}{2n'}\,\delta_1^{(n')} + i\,\frac{h}{2n'}\,\sigma_1^{(n')}. \tag{57}$$

Cette formule a besoin d'être transformée pour servir à la détermination de A_0; cherchons directement cette dernière quantité. L'équation (51) donne, en posant $n' = 0$,

$$A_0 = \int_0^{2\pi} \left[-ge' + \frac{1}{2} g \left(x' + \frac{1}{x'}\right) + \frac{1}{2} hi \left(x' - \frac{1}{x'}\right) \right] \left[1 - \frac{e'}{2} \left(x' + \frac{1}{x'}\right) \right] du'.$$

Cette intégrale se réduit à la partie indépendante de x' dans le développement du produit placé sous le signe $\int$; car tout terme renfermant une puissance x'^k de l'exponentielle, où le nombre entier k n'est pas nul, donne zéro après l'intégration. Donc

$$A_0 = -\frac{3}{2} ge'. \tag{58}$$

10. *Recherche de* $B_{n'}$. — Le rayon vecteur r' est donné par la formule

$$r' = a'(1 - e' \cos u') = a' \left[1 - \frac{e'}{2} \left(x' + \frac{1}{x'} \right) \right];$$

mais, en vertu des notations adoptées (**1**), on a

$$e' = \frac{2\eta'}{1 + \eta'^2};$$

donc

$$r' = \frac{a'e'}{2\eta'} (1 - \eta' x') \left(1 - \frac{\eta'}{x'} \right). \tag{59}$$

On en déduit sans peine

$$r'^{-3} = E_0 + E_1 \left(x' + \frac{1}{x'} \right) + E_2 \left(x'^2 + \frac{1}{x'^2} \right) + \ldots, \tag{60}$$

en posant

$$
(61)\quad \left\{
\begin{aligned}
E_0 &= \left(\frac{2\eta'}{a'e'}\right)^3 [1 + 9\eta'^2 + 36\eta'^4 + 100\eta'^6 + 225\eta'^8 + \ldots],\\
E_1 &= \left(\frac{2\eta'}{a'e'}\right)^3 3\eta' [1 + 6\eta'^2 + 20\eta'^4 + 50\eta'^6 + 105\eta'^8 + \ldots],\\
E_2 &= \left(\frac{2\eta'}{a'e'}\right)^3 6\eta'^2 [1 + 5\eta'^2 + 15\eta'^4 + 35\eta'^6 + 70\eta'^8 + \ldots],\\
E_3 &= \left(\frac{2\eta'}{a'e'}\right)^3 10\eta'^3 [1 + 4,5\eta'^2 + 12,6\eta'^4 + 28\eta'^6 + \ldots],\\
E_4 &= \left(\frac{2\eta'}{a'e'}\right)^3 15\eta'^4 [1 + 4,2\eta'^2 + 11,2\eta'^4 + 24\eta'^6 + \ldots],\\
E_5 &= \left(\frac{2\eta'}{a'e'}\right)^3 21\eta'^5 [1 + 4\eta'^2 + \frac{72}{7}\eta'^4 \ldots],\\
E_6 &= \left(\frac{2\eta'}{a'e'}\right)^3 28\eta'^6 [1 + \frac{27}{7}\eta'^2 \ldots].
\end{aligned}
\right.
$$

Ce développement étant effectué, nous en tirons, au moyen du théorème de Cauchy,

$$
(62)\quad B_{n'} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x'^{-n'} \left[E_0 + E_1\left(x' + \frac{1}{x'}\right) + E_2\left(x'^2 + \frac{1}{x'^2}\right) + \ldots\right] \times \left[1 - \frac{e'}{2}\left(x' + \frac{1}{x'}\right)\right] c^{\frac{n'e'}{2}\left(x' - \frac{1}{x'}\right)} du',
$$

et les transcendantes de Bessel transforment cette formule en cette autre

$$
\begin{aligned}
B_{n'} = E_0 &\left\{ (0, n')_{n'} - \frac{e'}{2}(1, n')_{n'} \right\}\\
+ E_1 &\left\{ (0, n')_{n'-1} + (0, n')_{n'+1} - \frac{e'}{2}[(1, n')_{n'-1} + (1, n')_{n'+1}] \right\}\\
+ E_2 &\left\{ (0, n')_{n'-2} + (0, n')_{n'+2} - \frac{e'}{2}[(1, n')_{n'-2} + (1, n')_{n'+2}] \right\}\\
+ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Mais la formule (53) nous permet encore de simplifier cette expression et d'écrire

$$
(63)\quad B_{n'} = \frac{1}{n'}\left(E_1 \delta_1^{(n')} + 2E_2 \delta_2^{(n')} + 3E_3 \delta_3^{(n')} + \ldots\right).
$$

Cette équation ne se prêtant pas, sans transformation, au calcul de B_0, cherchons directement cette quantité par la formule (31); nous trouverons sans peine

$$
(64)\quad B_0 = E_0 - E_1 e'.
$$

11. *Calcul de* $C_{n'}$. — Ce coefficient peut être déterminé de deux manières :

1° En vertu du théorème de Cauchy, et de la valeur de kr'^s donnée par la formule (49), nous avons

$$(65)\qquad C_{n'} = \frac{1}{a'}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x'^{-n'}\left[-ge' + \frac{1}{2}g\left(x' + \frac{1}{x'}\right) + \frac{1}{2}hi\left(x' + \frac{1}{x'}\right)\right] r'^{-2} c^{\frac{n'e'}{2}\left(x' - \frac{1}{x'}\right)} du'.$$

Mais de la formule (59) on tire

$$(66)\qquad r'^{-2} = F_0 + F_1\left(x' + \frac{1}{x'}\right) + F_2\left(x'^2 + \frac{1}{x'^2}\right) + \ldots$$

en posant

$$(67)\quad \left\{\begin{aligned} F_0 &= \left(\frac{2\eta'}{a'e'}\right)^2 (1 + 4\eta'^2 + 9\eta'^4 + 16\eta'^6 + 25\eta'^8 + 36\eta'^{10} + \ldots),\\ F_1 &= \left(\frac{2\eta'}{a'e'}\right)^2 2\eta' (1 + 3\eta'^2 + 6\eta'^4 + 10\eta'^6 + 15\eta'^8 + \ldots),\\ F_2 &= \left(\frac{2\eta'}{a'e'}\right)^2 3\eta'^2 \left(1 + \frac{8}{3}\eta'^2 + 5\eta'^4 + 8\eta'^6 + \frac{35}{3}\eta'^8 + \ldots\right),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ F_p &= \left(\frac{2\eta'}{a'e'}\right)^2 (p+1)\eta'^p \left[1 + \frac{2(p+2)}{p+1}\eta'^2 + \frac{3(p+3)}{p+1}\eta'^4 + \ldots\right], \end{aligned}\right.$$

par suite l'intégrale (65) donne, au moyen des transcendantes de Bessel,

$$\begin{aligned} C_{n'} = &-\frac{1}{a'}ge' \Big\{ F_0 (0, n')_{n'} + F_1 [(0, n')_{n'-1} + (0, n')_{n'+1}] + \ldots \\ &\qquad + F_p[(0, n')_{n'-p} + (0, n')_{n'+p}] + \ldots \Big\} \\ &+ \frac{1}{a'}\frac{1}{2}g \Big\{ F_0 [(0, n')_{n'-1} + (0, n')_{n'+1}] + \ldots \\ &\qquad + F_p [(0, n')_{n'-p-1} + (0, n')_{n'+p+1} + (0, n')_{n'-p+1} + (0, n')_{n'+p-1}] + \ldots \Big\} \\ &+ i\frac{1}{a'}\frac{1}{2}h \Big\{ F_0 [(0, n')_{n'-1} - (0, n')_{n'+1}] + \ldots \\ &\qquad + F_p[(0. n')_{n'-p-1} - (0, n')_{n'+p+1} - (0, n')_{n'-p+1} + (0, n')_{n'+p-1}] + \ldots \Big\}, \end{aligned}$$

ou encore à l'aide des conventions (55)

$$(68)\quad \left\{\begin{aligned} C_{n'} = & -\frac{1}{a'}\, ge' \left[\frac{1}{2} F_0 \sigma_0^{(n')} + F_1 \sigma_1^{(n')} + F_2 \sigma_2^{(n')} + \ldots\right] \\ & + \frac{1}{a'}\frac{1}{2} g \left[\frac{1}{2} F_0 \left(\sigma_1^{(n')} + \sigma_{-1}^{(n')}\right) + F_1 \left(\sigma_2^{(n')} + \sigma_0^{(n')}\right) + \ldots \right. \\ & \qquad \left. + F_p \left(\sigma_{p+1}^{(n')} + \sigma_{p-1}^{(n')}\right) + \ldots,\right] \\ & + i\frac{1}{a'}\frac{1}{2} h \left[\frac{1}{2} F_0 \left(\delta_1^{(n')} - \delta_{-1}^{(n')}\right) + F_1 \left(\delta_2^{(n')} - \delta_0^{(n')}\right) + \ldots \right. \\ & \qquad \left. + F_p \left(\delta_{p+1}^{(n')} - \delta_{p-1}^{(n')}\right) + \ldots \right], \end{aligned}\right.$$

de telle sorte qu'en posant

$$(69)\quad \left\{\begin{aligned} U_{n'} &= -\frac{2e'}{2a'}\left[\frac{1}{2} F_0 \sigma_0^{(n')} + F_1 \sigma_1^{(n')} + F_2 \sigma_2^{(n')} + \ldots\right], \\ V_{n'} &= \frac{1}{2a'}\left[\frac{1}{2} F_0 \left(\sigma_1^{(n')} + \sigma_{-1}^{(n')}\right) + F_1 \left(\sigma_2^{(n')} + \sigma_0^{(n')}\right) + F_2 \left(\sigma_3^{(n')} + \sigma_1^{(n')}\right) + \ldots\right], \\ W_{n'} &= \frac{1}{2a'}\left[\frac{1}{2} F_0 \left(\delta_1^{(n')} - \delta_{-1}^{(n')}\right) + F_1 \left(\delta_2^{(n')} - \delta_0^{(n')}\right) + F_2 \left(\delta_3^{(n')} - \delta_1^{(n')}\right) + \ldots\right], \end{aligned}\right.$$

on obtient enfin

$$(70)\qquad C_{n'} = g\,(U_{n'} + V_{n'}) + ih\, W_{n'}.$$

Pour avoir C_0 il faut avoir recours à l'équation (65), et on trouve

$$(71)\qquad C_0 = -\frac{g}{a'}(F_0 e' - F_1) = 0.$$

2° On peut déduire aussi $C_{n'}$ des valeurs trouvées pour $A_{n'}$ et $B_{n'}$, car on peut poser l'équation

$$(72)\quad krr's \times \frac{1}{r'^3} = \left\{\begin{aligned} & A_0 + A_1\, y' \;\; + A_2\, y'^2 \;\; + \ldots \\ & \quad + A_{-1} y'^{-1} + A_{-2} y'^{-2} + \ldots \end{aligned}\right\}\left\{\begin{aligned} & B_0 + B_1 y' \;\; + B_2 y'^2 \;\; + \ldots \\ & \quad + B_1 y'^{-1} + B_2 y'^{-2} + \ldots \end{aligned}\right\},$$

et l'on voit que

$$(73)\quad \left\{\begin{aligned} C_{n'} = & A_0 B_{n'} + A_1\, B_{n'-1} + A_2\, B_{n'-2} + \ldots + A_{n'}\, B_0 \\ & + A_{-1} B_{n'+1} + A_{-2} B_{n'+2} + \ldots + A_{-n'} B_{2n'} + \ldots. \end{aligned}\right.$$

Cette équation peut servir de vérification à la formule (70). La formule (71) conduit aussi à la relation suivante

$$(74)\qquad 0 = A_0\, B_0 + (A_1 + A_{-1})\, B_1 + (A_2 + A_{-2})\, B_2 + \ldots,$$

qui servira à vérifier la bonté des calculs relatifs à la détermination des nombres

$$A_0,\ A_1,\ A_2,\ \ldots,$$
$$B_0,\ B_1,\ B_2,\ \ldots.$$

12. *Calcul de* $D_{n'}$, *ou développement de* $\frac{k}{\rho}$. — Ce développement est le plus laborieux travail du calcul des perturbations ; pour qu'on puisse suivre facilement l'exposé de notre méthode, nous diviserons cet article en divers paragraphes.

(a). *Expression de* ρ^2 *en fonction de* u'. — Dans la formule

$$(75)\qquad \rho^2 = r^2 + r'^2 - 2rr's,$$

mettons pour r'^2 et pour $rr's$ leurs valeurs en u', nous aurons l'équation

$$\rho^2 = r^2 + a'^2(1 - e'\cos u')^2 + \frac{2}{k}(ge' - g\cos u' + h\sin u'),$$

qui donne

$$(76)\qquad \rho^2 = H - K\cos(u' - \psi) + J\cos 2u',$$

en posant, pour abréger,

$$(77)\qquad \left\{\begin{aligned} H &= r^2 + a'^2 + \frac{2g}{k}e' + \frac{a'^2e'^2}{2},\\ K\cos\psi &= 2a'^2e' + \frac{2g}{k},\\ K\sin\psi &= -\frac{2h}{k},\\ J &= \frac{a'^2e'^2}{2}.\end{aligned}\right.$$

(b). *Décomposition de* $D_{n'}$ *en parties de plus en plus faibles* — De l'équation (76) nous tirons

$$(78)\qquad \frac{k}{\rho} = k\left[H - K\cos(u' - \psi) + J\cos 2u'\right]^{-\frac{1}{2}},$$

et comme la planète perturbatrice m' est une planète ordinaire à faible excentricité, nous pouvons développer le second membre de l'équation (78) suivant les puissances de J, quantité de second ordre par rapport à e' ; nous aurons donc,

en négligeant les quantités du sixième ordre par rapport à e',

$$(79)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{k}{\rho} &= k\left[\mathrm{H} - \mathrm{K}\cos(u'-\psi)\right]^{-\frac{1}{2}} \\ &\quad - \frac{k}{2}\mathrm{J}\cos 2u'\left[\mathrm{H} - \mathrm{K}\cos(u'-\psi)\right]^{-\frac{3}{2}} \\ &\quad + \frac{3k}{8}\mathrm{J}^2\cos^2 2u'\left[\mathrm{H} - \mathrm{K}\cos(u'-\psi)\right]^{-\frac{5}{2}}. \end{aligned}\right.$$

On pousserait sans peine le développement plus loin, si dans une question on le jugeait nécessaire; mais en général les termes négligés seront insensibles, puisque le troisième que nous avons écrit donne des quantités négligeables dans le cas de Pallas troublé par Jupiter.

Posons maintenant

$$(80)\qquad \left\{\begin{aligned} k\left[\mathrm{H} - \mathrm{K}\cos(u'-\psi)\right]^{-\frac{1}{2}} &= \sum_{-\infty}^{\infty}{}_{n'}\, \mathrm{D}'_{n'}\, y'^{n'}, \\ -\frac{k}{2}\mathrm{J}\cos 2u'\left[\mathrm{H} - \mathrm{K}\cos(u'-\psi)\right]^{-\frac{3}{2}} &= \sum_{-\infty}^{\infty}{}_{n'}\, \mathrm{D}''_{n'}\, y'^{n'}, \\ \frac{3k}{8}\mathrm{J}^2\cos^2 2u'\left[\mathrm{H} - \mathrm{K}\cos(u'-\psi)\right]^{-\frac{5}{2}} &= \sum_{-\infty}^{\infty}{}_{n'}\, \mathrm{D}'''_{n'}\, y'^{n'}; \end{aligned}\right.$$

nous aurons

$$(81)\qquad \mathrm{D}_{n'} = \mathrm{D}'_{n'} + \mathrm{D}''_{n'} + \mathrm{D}'''_{n'}.$$

La recherche du coefficient $\mathrm{D}_{n'}$ se trouve ainsi ramenée à celle de plusieurs parties de plus en plus faibles.

(c). *Calcul de* $\mathrm{D}'_{n'}$. — Dans l'expression

$$\mathrm{H} - \mathrm{K}\cos(u'-\psi)$$

introduisons l'exponentielle imaginaire x', et posons

$$(82)\qquad \theta = \operatorname{tang}\frac{1}{2}\left(\arc\sin\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{H}}\right),$$

nous aurons

$$(83)\qquad \mathrm{H} - \mathrm{K}\cos(u'-\psi) = \frac{\mathrm{K}}{2\theta}\left(1 - \theta x' c^{-\psi i}\right)\left(1 - \frac{\theta}{x'}c^{\psi i}\right),$$

le développement à effectuer pour avoir $D'_{n'}$ est donc celui de la fonction

$$(84) \qquad kG\left(1-\theta x' c^{-\psi i}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1-\frac{\theta}{x'}c^{\psi i}\right)^{-\frac{1}{2}},$$

en posant, pour abréger,

$$(85) \qquad \left(\frac{2\theta}{K}\right)^{\frac{1}{2}} = G.$$

Or le théorème de Cauchy nous donne

$$(86) \qquad D'_{n'} = kG\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x'^{-n'}\left(1-\theta x' c^{-\psi i}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1-\frac{\theta}{x'}c^{\psi i}\right)^{-\frac{1}{2}} \times\left[1-\frac{e'}{2}\left(x'+\frac{1}{x'}\right)\right]c^{\frac{n'e'}{2}\left(x'-\frac{1}{x'}\right)}du';$$

mais on sait que

$$(87) \qquad \left(1-\theta x' c^{-\psi i}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1-\frac{\theta}{x'}c^{\psi i}\right)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{-\infty}^{\infty}{}_h \Theta_h x'^h c^{-h\psi i},$$

Θ_h étant la moitié de la transcendante $b_{\frac{1}{2}}^{(h)}$ de Laplace, que l'on sait calculer à l'aide de nombreuses formules, et dont il existe des Tables assez étendues construites par J. Runkle, sous les auspices de la Société Smithsonienne. Donc nous aurons, en faisant usage des transcendantes de Bessel, comme dans les déterminations de $A_{n'}$, $B_{n'}$, $C_{n'}$, la formule suivante

$$(88) \qquad D'_{n'} = \frac{k}{n'}G\sum_{-\infty}^{\infty}{}_h h\Theta_h(0, n')_{n'-h}\, c^{-h\psi i}.$$

Rétablissons, pour les applications numériques, les sinus et cosinus à la place des exponentielles imaginaires, combinons entre eux les termes conjugués, et nous obtiendrons sans peine l'équation que voici :

$$(89) \qquad D'_{n'} = \frac{k}{n'}G\sum_{1}^{\infty}{}_h h\,\Theta_h\left[\delta_h^{(n')}\cos h\psi - i\sigma_h^{(n')}\sin h\psi\right],$$

dont la mise en nombres n'offre aucune difficulté.

Cette formule ne peut pas donner sans transformation le coefficient D'_0, mais

on le tire immédiatement de la formule générale (86), et l'on obtient

$$(90) \qquad D'_0 = k\,G\,(\Theta_0 - \Theta_1\, e' \cos\psi).$$

(d). *Calcul de* $D''_{n'}$. — Il s'agit de développer, suivant les puissances de y', la fonction

$$(91) \qquad -\frac{k}{2}\, J \cos 2u' \left[H - K\cos(u' - \psi)\right]^{-\frac{3}{2}}.$$

Mettons dans cette expression pour $\cos 2u'$ sa valeur en exponentielles imaginaires, remplaçons la quantité entre crochets par sa valeur tirée de l'équation (83), la quantité (91) devient

$$(92) \qquad -\frac{k}{4}\, J G^3 \left(x'^2 + \frac{1}{x'^2}\right)\left(1 - \theta x' c^{-\psi i}\right)^{-\frac{3}{2}}\left(1 - \frac{\theta}{x'} c^{\psi i}\right)^{-\frac{3}{2}}.$$

Appliquons maintenant le théorème de Cauchy, et servons-nous des transcendantes de Bessel après avoir posé

$$(93) \qquad \left(1 - \theta x' c^{-\psi i}\right)^{-\frac{3}{2}}\left(1 - \frac{\theta}{x'} c^{\psi i}\right)^{-\frac{3}{2}} = \sum_{-\infty}^{\infty}{}_h\, \Theta'_h\, x'^h\, c^{-h\psi i},$$

il viendra

$$(94) \quad D''_{n'} = -\frac{k}{4} J G^3 \sum_{-\infty}^{\infty}{}_h\, \Theta'_h\, c^{-h\psi i} \Big\{ (0, n')_{n'-h-2} + (0, n')_{n'-h+2} - \frac{e'}{2}\left[(1, n')_{n'-h-2} + (1, n')_{n'-h+2}\right] \Big\},$$

ou bien encore

$$(95) \quad D''_{n'} = -\frac{k}{4n'} J G^3 \sum_{-\infty}^{\infty}{}_h\, \Theta'_h\, c^{-h\psi i} \left[(h+2)\,(0, n')_{n'-h-2} + (h-2)\,(0, n')_{n'-h+2}\right].$$

Mettons pour l'exponentielle sa valeur en lignes trigonométriques, combinons les termes conjugués, nous aurons enfin

$$(96) \qquad D''_{n'} = -\frac{k}{4n'} J G^3 \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{2}\Theta'_0\left(2\,\delta_2^{(n')} - 2\,\delta_{-2}^{(n')}\right) \\ &+ \sum_{1}^{\infty}{}_h\, \Theta'_h \left[(h+2)\,\delta_{h+2}^{(n')} + (h-2)\,\delta_{h-2}^{(n')}\right] \cos h\psi \\ &- i \sum_{1}^{\infty}{}_h\, \Theta'_h \left[(h+2)\,\sigma_{h+2}^{(n')} + (h-2)\,\sigma_{h-2}^{(n')}\right] \sin h\psi \end{aligned} \right\}.$$

Si l'on veut poser encore

$$(97)\qquad \begin{cases} (h+2)\,\delta_{h+2}^{(n')} + (h-2)\,\delta_{h-2}^{(n')} = \Delta_h^{(n')}, \\ (h+2)\,\sigma_{h+2}^{(n')} + (h-2)\,\sigma_{h-2}^{(n')} = S_h^{(n')}, \end{cases}$$

la formule (96) prend une forme encore plus simple et devient

$$(98)\qquad D''_n = -\frac{k}{4n'} JG^3 \left(\frac{1}{2}\Theta'_0 \Delta_0^{(n')} + \sum_1^{\infty} {}_h \Theta'_h \Delta_h^{(n')} \cos h\psi - i \sum_{-\infty}^{\infty} {}_h \Theta'_h S_h^{(n')} \sin h\psi \right).$$

On calcule directement la valeur de D''_0, et l'on trouve, au moyen du théorème de Cauchy,

$$(99)\qquad D''_0 = -\frac{k}{2} JG^4 \Theta'_2 \cos 2\psi + \frac{k}{4} JG^3 e' (\Theta'_1 \cos\psi + \Theta'_3 \cos 3\psi),$$

qui se réduit sensiblement à son premier terme.

(e). *Calcul de* $D''_{n'}$. — Il s'agit de développer la fonction

$$(100)\qquad \frac{3k}{8} J^2 \cos^2 2u' [H - K\cos(u' - \psi)]^{-\frac{5}{2}},$$

ou encore

$$(101)\qquad \frac{3k}{32} J^2 G^5 \left(2 + x'^4 + \frac{1}{x'^4}\right) \left(1 - \theta x' c^{-\psi i}\right)^{-\frac{5}{2}} \left(1 - \frac{\theta}{x'} c^{\psi i}\right)^{-\frac{5}{2}}.$$

Or on peut décomposer cette expression en deux autres :

$$(102)\qquad \frac{6k}{32} J^2 G^5 \left(1 - \theta x' c^{-\psi i}\right)^{-\frac{5}{2}} \left(1 - \frac{\theta}{x'} c^{\psi i}\right)^{-\frac{5}{2}} \qquad (1^{\text{re}} \text{ partie}),$$

et

$$(103)\qquad \frac{3k}{32} J^2 G^5 \left(x'^4 + \frac{1}{x'^4}\right) \left(1 - \theta x' c^{-\psi i}\right)^{-\frac{5}{2}} \left(1 - \frac{\theta}{x'} c^{\psi i}\right)^{-\frac{5}{2}} \qquad (2^{\text{e}} \text{ partie}).$$

On voit que l'expression (102) est analogue à celle qui nous a donné $D'_{n'}$, et l'expression (103) est analogue à celle qui nous a donné $D''_{n'}$.

Posons

$$(104)\qquad \left(1 - \theta x' c^{-\psi i}\right)^{-\frac{5}{2}} \left(1 - \frac{\theta}{x'} c^{\psi i}\right)^{-\frac{5}{2}} = \sum_{-\infty}^{\infty} {}_h \Theta''_h x'^h c^{-h\psi i},$$

la partie de $D_{n'}'''$ qui viendra de l'expression (102) sera

$$(105)\qquad \frac{6k}{32n'}J^2G^5\left[\sum_{1}^{\infty}{}_h\, h\,\Theta_h''\left(\partial_h^{(n')}\cos h\psi - i\sigma_h^{(n')}\sin h\psi\right)\right],$$

et celle qui viendra de l'expression (103) sera

$$(106)\qquad \frac{3k}{32n'}J^2G^5\left(\frac{1}{2}\Theta_0''\nabla_0^{(n')} + \sum_{1}^{\infty}{}_h\,\Theta_h''\nabla_h^{(n')}\cos h\psi - i\sum_{1}^{\infty}{}_h\,\Theta_h''\square_h^{(n')}\sin h\psi\right),$$

en posant

$$(107)\qquad \begin{cases} \nabla_h^{(n')} = (h+4)\,\partial_{h+4}^{(n')} + (h-4)\,\partial_{h-4}^{(n')}, \\ \square_h^{(n')} = (h+4)\,\sigma_{h+4}^{(n')} + (h-4)\,\sigma_{h-4}^{(n')}; \end{cases}$$

par conséquent la formule de $D_{n'}'''$ sera

$$(108)\qquad D_{n'}''' = \frac{3k}{32n'}J^2G^5\left\{\begin{array}{l} 2\sum_{1}^{\infty}{}_h\, h\,\Theta_h''\partial_h^{(n')}\cos h\psi + \frac{1}{2}\Theta_0''\nabla_0^{(n')} + \sum_{1}^{\infty}{}_h\,\Theta_h''\nabla_h^{(n')}\cos h\psi \\ -i\left(2\sum_{1}^{\infty}{}_h\, h\,\Theta_h''\sigma_h^{(n')}\sin h\psi + \sum_{1}^{\infty}{}_h\,\Theta_h''\square_h^{(n')}\sin h\psi\right) \end{array}\right\}.$$

Cette formule ne peut pas servir à calculer D_0'', mais on peut déterminer directement cette dernière quantité en se servant du théorème de Cauchy; on trouve alors

$$(109)\qquad D_0''' = \frac{3k}{16}J^2G^5\left[\Theta_0'' + \Theta_4''\cos 4\psi - e'\Theta_1''\cos\psi - \frac{e'}{2}\left(\Theta_3''\cos 3\psi + \Theta_5''\cos 5\psi\right)\right],$$

qui se réduit sensiblement aux premiers termes.

Nous avons ainsi tous les éléments nécessaires au calcul de $D_{n'}$, c'est-à-dire au calcul des coefficients du développement de $\frac{1}{\rho}$ pour une valeur particulière de T. Il suffit de comparer notre méthode avec celle de Cauchy pour voir que nous avons évité une opération des plus laborieuses, savoir la recherche des nombres désignés par a et b dans les notes de l'illustre géomètre. Un autre avantage de la marche que nous suivons, c'est de conduire directement aux formules des coefficients de l'exponentielle $y'^{n'}$, sans qu'on soit obligé de passer par la recherche des coefficients de l'exponentielle $x'^{n'}$.

§ IV. — CALCUL DE $Y'_{n'}$.

13. *Réduction du problème à d'autres plus simples.* — La quantité $Y'_{n'}$ est le coefficient de $y'^{n'}$ dans le développement de la fonction

$$kr\frac{dR}{dr} = k\left(\frac{rr's}{r'^3} - \frac{rr's - r^2}{\rho^3}\right); \tag{110}$$

mais nous avons déjà trouvé

$$\frac{krr's}{r'^3} = C_0 + \sum_1^{\infty}{}_{n'}(C_{n'}y'^{n'} + C_{-n'}y'^{-n'}), \tag{111}$$

et

$$k(rr's - r^2) = (A_0 - kr^2) + \sum_1^{\infty}{}_{n'}(A_{n'}y'^{n'} + A_{-n'}y'^{-n'}). \tag{112}$$

Si donc nous posons

$$\frac{1}{\rho^3} = E_0 + \sum_1^{\infty}{}_{n'}(E_{n'}y'^{n'} + E_{-n'}y'^{-n'}), \tag{113}$$

nous aurons pour toute valeur de n', y compris $n' = 0$, la formule

$$Y'_{n'} = C_{n'} - \left\{\begin{array}{r} E_{n'}(A_0 - kr^2) + E_{n'-1}A_1 + E_{n'-2}A_2 + \ldots \\ E_{n'+1}A_{-1} + E_{n'+2}A_{-2} + \ldots \end{array}\right\}. \tag{114}$$

Nous sommes donc ramenés à la recherche de $E_{n'}$ ou au développement de $\frac{1}{\rho^3}$.

14. *Calcul de $E_{n'}$ ou développement de $\frac{1}{\rho^3}$.* — Le développement de cette fonction s'exécute comme le développement de $\frac{1}{\rho}$, car on a aussi, en vertu de la formule (76),

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{\rho^3} = [H - K\cos(u' - \psi)]^{-\frac{3}{2}} \\ \quad - \frac{2}{3}J\cos 2u'[H - K\cos(u' - \psi)]^{-\frac{5}{2}} \\ \quad + \frac{15}{8}J^2\cos^2 2u'[H - K\cos(u' - \psi)]^{-\frac{7}{2}}, \end{array}\right. \tag{115}$$

en négligeant les termes d'un ordre supérieur; donc en posant

$$(116)\quad \begin{cases} [H - K\cos(u'-\psi)]^{-\frac{3}{2}} = \sum_{-\infty}^{\infty}{}_{n'} E'_{n'} y'^{n'}, \\ -\frac{3}{2} J \cos 2u' [H - K\cos(u'-\psi)]^{-\frac{5}{2}} = \sum_{-\infty}^{\infty}{}_{n'} E''_{n'} y'^{n'}, \\ \frac{15}{8} J^2 \cos 2u' [H - K\cos(u'-\psi)]^{-\frac{7}{2}} = \sum_{-\infty}^{\infty}{}_{n'} E'''_{n'} y'^{n'}, \end{cases}$$

nous aurons

$$(117)\quad E_{n'} = E'_{n'} + E''_{n'} + E'''_{n'}.$$

(a). *Recherche de* $E'_{n'}$. — Si dans la valeur de $D'_{n'}$ nous mettons

Θ'_h	au lieu de	Θ_h,
G^3	au lieu de	G,
1	au lieu de	k,

nous aurons précisément la formule demandée. Donc

$$(118)\quad E'_{n'} = \frac{1}{n'} G^3 \sum_{-\infty}^{\infty}{}_h h\Theta'_h (0, n')_{n'-h} c^{-h\psi i},$$

ou bien

$$(119)\quad E'_{n'} = \frac{1}{n'} G^3 \sum_{1}^{\infty}{}_h h\Theta'_h \left(\delta_h^{(n')} \cos h\psi - i\sigma_h^{(n')} \sin h\psi\right)$$

et

$$(120)\quad E'_0 = G^3 (\Theta'_0 - \Theta'_1 e' \cos\psi).$$

(b). *Recherche de* $E''_{n'}$ — Si dans la formule de $D''_{n'}$ nous mettons

Θ''_h	au lieu de	Θ'_h,
G^5	au lieu de	G^3,
3	au lieu de	k,

nous aurons précisément celle qui donne la valeur de $E''_{n'}$; donc

$$(121)\qquad E''_{n'} = -\frac{3}{4n'} JG^5 \left[\frac{1}{2}\Theta''_0 \Delta_0^{(n')} + \sum_1^\infty {}_h \Theta''_h \Delta_h^{(n')} \cos h\psi - i\sum_1^\infty {}_h \Theta''_h S_h^{(n')} \sin h\psi\right],$$

et aussi

$$(122)\qquad F''_n = -\frac{3}{2} JG^5 \Theta''_2 \cos 2\psi + \frac{3}{4} JG^5 e' (\Theta''_1 \cos\psi + \Theta''_3 \cos 3\psi),$$

qui se réduit sensiblement à son premier terme.

(c). *Recherche de* $E'''_{n'}$. — Si dans la formule de D'''_n nous mettons

Θ'''_h,	au lieu de	Θ''_h,
G^7,	au lieu de	G^5,
5,	au lieu de	k,

nous aurons précisément celle qui donne la valeur de $E'''_{n'}$: donc

$$(123)\qquad E'''_{n'} = \frac{15}{32n'} J^2 G^7 \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}\Theta'''_{n'} \nabla_0^{(n')} + \sum_1^\infty {}_h \Theta'''_h \left[2h\partial_h^{(n')} + \nabla_h^{(n')}\right] \cos h\psi \\ \qquad - i\sum_1^\infty {}_h \Theta'''_h \left[2h\sigma_h^{(n')} + \square_h^{(n')}\right] \sin h\psi \end{array} \right\},$$

et

$$(124)\qquad E'''_0 = \frac{15}{16} J^2 G^7 \left[\Theta'''_0 + \Theta'''_4 \cos 4\psi - e'\Theta'''_1 \cos\psi - \frac{e'}{2} (\Theta'''_3 \cos 3\psi + \Theta'''_5 \cos 5\psi)\right],$$

qui se réduit sensiblement aux deux premiers termes.

On voit que le développement de $\frac{1}{\rho^3}$ n'exigera pas le calcul de quantités nouvelles autres que Θ'''; on pourra donc le former rapidement aussitôt qu'on aura calculé tous les nombres nécessaires au développement de $\frac{1}{\rho}$.

§ V. — CALCUL DE Y''_n.

15. *Réduction du problème à d'autres plus simples.* — La quantité que nous

cherchons est le coefficient de $y'^{n'}$ dans le développement de la fonction

$$k\frac{dR}{dv} = krr'\frac{ds}{dv}\left(\frac{1}{r'^3} - \frac{1}{\rho^3}\right). \tag{125}$$

Le développement de la parenthèse a été déjà effectué; si donc nous posons

$$krr'\frac{ds}{dv} = F_0 + \sum_{1}^{\infty}{}_{n'}(F_{n'}y'^{n'} + F_{-n'}y'^{-n'}), \tag{126}$$

nous aurons pour toute valeur de n', y compris $n' = 0$,

$$\left\{\begin{aligned} Y_{n'}^{m} = F_0(B_{n'} - E_{n'}) + F_1(B_{n'-1} - E_{n'-1}) + F_2(B_{n'-2} - E_{n'-2}) + \ldots \\ + F_{-1}(B_{n'+1} - E_{n'+1}) + F_{-2}(B_{n'+2} - E_{n'+2}) + \ldots, \end{aligned}\right. \tag{127}$$

et nous sommes ramenés à trouver la formule de $F_{n'}$.

16. *Calcul de* $F_{n'}$. — Nous avons trouvé (formule 48)

$$krr's = -ge' + g\cos u' - h\sin u',$$

formule dans laquelle

$$\left\{\begin{aligned} g &= k(M a'.r\cos w - N' a'.r\sin w), \\ h &= k(N a' f'.r\cos w - M' a' f'.r\sin w); \end{aligned}\right.$$

de là nous tirons, en regardant r comme une constante,

$$krr'\frac{ds}{dv} = -\frac{dg}{dv}.e' + \frac{dg}{dv}\cos u' - \frac{dh}{dv}\sin u'. \tag{128}$$

Si donc nous posons

$$\left\{\begin{aligned} g' &= \frac{dg}{dv} = k(-M a'.r\sin w + N' a'.r\cos w), \\ h' &= \frac{dh}{dv} = k(-N a' f'.r\sin w - M' a' f'.r\cos w), \end{aligned}\right. \tag{129}$$

l'équation (128) devient

$$krr'\frac{ds}{dv} = -g'e' + g'\cos u' - h'\sin u', \tag{130}$$

équation de même forme que l'équation (48), et qui par suite conduit aux mêmes

conclusions, savoir :

$$F_{n'} = \frac{g'}{2n'}\delta_1^{(n')} + i\frac{h'}{2n'}\sigma_1^{(n')} \tag{131}$$

et

$$F_0 = -\frac{3}{2}g'e'. \tag{132}$$

Ces deux formules unies à la formule (127) et à celles que donnent $B_{n'}$, $E_{n'}$ suffisent pour le calcul de $Y_{n'}''$.

§ VI. — CALCUL DE $Y_{n'}'''$.

17. *Réduction du problème à d'autres plus simples.* — On sait qu'il s'agit de développer, suivant les puissances de y', la fonction

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\sin I}{f} krr' \cos(w + \varpi - \Pi) \sin(w' + \varpi' - \Pi)\left(\frac{1}{r'^3} - \frac{1}{\rho^3}\right). \tag{133}$$

Si nous posons

$$\frac{\sin I}{f} krr' \cos(w + \varpi - \Pi) \sin(w' + \varpi' - \Pi) = G_0 + \sum_1^{\infty}{}_{n'} (G_{n'} y'^{n'} + G_{-n'} y'^{-n'}), \tag{134}$$

nous aurons pour toute valeur de n', y compris $n' = 0$,

$$\left\{\begin{aligned} Y_{n'}''' = G_0(B_{n'} - E_{n'}) &+ G_1(B_{n'-1} - E_{n'-1}) + G_2(B_{n'-2} - E_{n'-2}) + \ldots \\ &+ G_{-1}(B_{n'+1} - E_{n'+1}) + G_{-2}(B_{n'+2} - E_{n'+2}) + \ldots, \end{aligned}\right. \tag{135}$$

et nous sommes ramenés au calcul de $G_{n'}$.

18. *Recherche de* $G_{n'}$. — Le premier membre de l'équation (134) peut se mettre sous la forme

$$\frac{k}{f}\sin I . r\cos(w + \varpi - \Pi)\,[r'\sin w'\cos(\varpi' - \Pi) + r'\cos w' . \sin(\varpi' - \Pi)],$$

ou bien

$$-g''e' + g''\cos u' - h''\sin u', \tag{136}$$

en posant

$$(137)\qquad \begin{cases} g'' = \dfrac{ka'}{f}\sin \mathrm{I} \sin(\varpi' - \Pi).r\cos(w + \varpi - \Pi), \\ h'' = -\dfrac{ka'}{f} f' \sin \mathrm{I} \cos(\varpi' - \Pi).r\cos(w + \varpi - \Pi) \\ \quad = -g'' f' \cot(\varpi' - \Pi). \end{cases}$$

L'expression (136) ayant la même forme que le second membre de l'équation (48), nous en concluons

$$(138)\qquad \mathrm{G}_{n'} = \frac{g''}{2n'}\,\delta_1^{(n')} + i\,\frac{h''}{2n'}\,\sigma_1^{(n')}$$

et

$$(139)\qquad \mathrm{G}_0 = -\frac{3}{2} g'' e'.$$

Nous avons donc achevé de résoudre le problème du développement de toutes les fonctions nécessaires au calcul des diverses inégalités.

On voit que tous ces développements exigent le calcul des transcendantes de Bessel, et les plus importants exigent en outre celui des transcendantes de Laplace. Dans un autre Mémoire nous avons ramené le calcul des transcendantes de Bessel aux nombres de Cauchy. Quant aux quantités Θ, elles ont attiré l'attention d'un grand nombre de géomètres, et M. Le Verrier a préparé des formules faciles à mettre en nombre pour leur calcul direct, dans le tome II des *Annales de l'Observatoire*. Nous avons déjà dit qu'il existe des Tables américaines assez étendues de ces nombres, nous n'aurons donc rien à ajouter sur ce sujet au point de vue pratique. Il ne sera pas sans intérêt, au point de vue théorique, de montrer la liaison de ces quantités avec les nombres de Cauchy : c'est ce que nous avons fait dans une Note placée à la fin de notre Mémoire.

§ VII. — CALCUL DU COEFFICIENT DE L'EXPONENTIELLE $c^{(n'\mathrm{T}'-n\mathrm{T})i}$, QUAND ON CONNAIT POUR UNE SÉRIE DE VALEURS T LE COEFFICIENT DE L'EXPONENTIELLE $c^{n'\mathrm{T}'i}$.

19. *Réduction du problème à une quadrature.* — Considérons, par exemple, la fonction

$$k\mathrm{R},$$

et désignons par

$$\mathrm{Y}_{n',-n}$$

le coefficient de l'exponentielle

$$c^{(n'T'-nT)i}$$

dans le développement de cette fonction. En admettant que T fût donné, nous avons trouvé le coefficient de

$$c^{n'T'i}$$

dans le développement de la même fonction, et nous l'avons désigné par $Y_{n'}$. Il est clair que cette quantité est une fonction de T et que l'on a

$$(140)\quad \begin{cases} Y_{n'} = Y_{n',0} + Y_{n',-1}\,C^{-Ti} + Y_{n',-2}\,C^{-2Ti} + \ldots + Y_{n',-n}\,C^{-nTi} + \ldots \\ \qquad + Y_{n',1}\,C^{Ti} + Y_{n',2}\,C^{2Ti} + \ldots + Y_{n',n}\,C^{nTi}\ldots; \end{cases}$$

nous pourrons tirer de là

$$(141)\qquad Y_{n',-n} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} y^n\, Y_{n'}\, dT,$$

et nous sommes ramenés à une quadrature pour laquelle nous ne connaissons pas la fonction située sous le signe $\int$, mais une série de valeurs particulières de cette fonction.

20. *Méthodes diverses à employer pour le calcul de cette quadrature.* — Les méthodes que l'on peut employer pour calculer la formule (141) sont fort nombreuses.

1° Cauchy fait usage de la méthode des trapèzes pure et simple; nous pensons que ce mode de calcul à l'inconvénient de donner trop peu d'approximation, et d'exiger, par conséquent, un trop grand nombre de valeurs particulières de la fonction $Y_{n'}$.

2° Les méthodes connues de Simpson, de Poncelet, présenteraient plus d'avantages en général, mais leur degré d'approximation est limité.

3° La formule de quadrature donnée par Laplace (*Mécanique céleste*, Tome IV, page 207; *Annales de l'Observatoire*, Tome Ier, page 131) nous semble réunir des qualités plus avantageuses encore. Si nous divisons 2π en q parties égales à α, en posant

$$q\alpha = 2\pi,$$

et si nous cherchons les valeurs particulières de $Y_{n'}C^{nTi}$ pour les valeurs de T égales à

$$0,\quad \alpha,\quad 2\alpha,\ldots,\quad (q-1)\alpha,\quad q\alpha = 2\pi,$$

nous aurons, en désignant par

$$\varphi_0, \quad \varphi_1, \quad \varphi_2, \ldots, \quad \varphi_{q-1}, \quad \varphi_q,$$

ces valeurs particulières, et par Δ, $\Delta^{(2)}$, $\Delta^{(3)}$, ..., les différences successives

$$(142) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Y_{n'} C^{nTi}\,dT = & \frac{1}{q}\left(\frac{1}{2}\varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_{q-1} + \frac{1}{2}\varphi^q\right) \\ & -\frac{1}{q}\frac{1}{12}\left(\Delta^{(1)}_{q-1} - \Delta^{(1)}_0\right) - \frac{1}{q}\frac{1}{24}\left(\Delta^{(2)}_{q-2} + \Delta^{(2)}_0\right) \\ & -\frac{1}{q}\frac{19}{720}\left(\Delta^{(3)}_{q-3} - \Delta^{(3)}_0\right) - \frac{1}{q}\frac{3}{160}\left(\Delta^{(4)}_{q-4} + \Delta^{(4)}_0\right) \\ & -\frac{1}{q}\frac{863}{60480}\left(\Delta^{(5)}_{q-5} - \Delta^{(5)}_0\right) - \ldots. \end{aligned} \right.$$

On voit que la première ligne du second membre représente la somme des trapèzes, et les termes suivants une série de corrections qui permettent, avec un nombre assez limité de valeurs particulières, d'atténuer l'erreur due à la première évaluation.

4° La meilleure marche à suivre, sans contredit, pour le calcul des diverses quantités

$$\begin{matrix} Y_{n',0}, & Y_{n',-1}, & Y_{n',-2}, \ldots, \\ & Y_{n',1}, & Y_{n',2}, \ldots, \end{matrix}$$

c'est celle de M. Le Verrier; ce mode de calcul, sous la forme que lui a donnée Hoüel dans un récent Mémoire, est facile, et présente le précieux avantage d'utiliser tous les calculs antérieurs, quand on reconnaît qu'il est nécessaire de faire usage d'un plus grand nombre de valeurs particulières.

§ VIII. — SIMPLIFICATION DES FORMULES QUI DONNENT $A_{n'}$, $B_{n'}$, $C_{n'}$, $F_{n'}$, $G_{n'}$, DANS LE CAS OU m' A UNE FAIBLE EXCENTRICITÉ.

21. *Simplification de la formule de* $A_{n'}$. — Négligeons tous les termes qui renferment e' à une puissance supérieure à la première. Nous savons que généralement

$$(143) \qquad (j, n)_q = \sum_{0}^{\infty}{}_p \frac{\left(\frac{ne}{2}\right)^p}{1.2\ldots p} N_{-q,j,p} \quad (*).$$

(*) *Voir* notre Mémoire sur les nombres de Cauchy, ou la Note placée à la fin du Mémoire.

Dans les limites de l'approximation à laquelle nous nous arrêtons, on a simplement

$$(144)\qquad (j, n)_q = N_{-q,j,0} + \frac{ne}{2} N_{-q,j,1}.$$

Cela posé, reprenons la valeur de $A_{n'}$ donnée par la formule

$$(145)\qquad A_{n'} = \frac{g}{2n'}\left[(0, n')_{n'-1} - (0, n')_{n'+1}\right] + i\frac{h}{2n'}\left[(0, n')_{n'-1} + (0, n')_{n'+1}\right]$$

et remplaçons les transcendantes de Bessel par leurs valeurs tirées de la formule (144), nous aurons

$$(146)\qquad \begin{cases} A_{n'} = \dfrac{g}{2n'}\left[N_{-n'+1,0,0} - N_{-n'-1,0,0} + \dfrac{n'e'}{2}\left(N_{-n'+1,0,1} - N_{-n'-1,0,1}\right)\right] \\ \quad + i\dfrac{h}{2n'}\left[N_{-n'+1,0,0} + N_{-n'-1,0,0} + \dfrac{n'e'}{2}\left(N_{-n'+1,0,1} + N_{-n'-1,0,1}\right)\right]. \end{cases}$$

Mais en nous reportant aux tableaux triangulaires qui donnent les valeurs des nombres de Cauchy, nous voyons que $A_{n'}$ est insensible ou nul dans les limites de notre approximation pour toute valeur de n' qui surpasse 2, et l'on a

$$(147)\qquad \begin{cases} A_0 = -\dfrac{3}{2} g e', \\ A_1 = \dfrac{g}{2} + i\dfrac{h}{2}, \\ A_2 = \dfrac{ge'}{4} + i\dfrac{he'}{4}, \end{cases}$$

formules dont le calcul est extrêmement facile, et qui peuvent servir à vérifier les calculs plus rigoureux exécutés à l'aide des formules exactes.

22. *Simplification de la formule de* $B_{n'}$. — Nous avons obtenu

$$B_{n'} = \frac{1}{n'} E_1 \partial_1^{(n')} + \frac{2}{n'} E_2 \partial_2^{(n')} + \ldots;$$

mais les formules qui donnent les nombres E nous montrent que E_2 est du second ordre par rapport à η, et par suite par rapport à e ; donc

$$B_{n'} = \frac{1}{n'} E_1 \partial_1^{(n')},$$

ou bien

$$(148)\qquad B_{n'} = \frac{1}{n'}\left(\frac{2\eta'}{a'e'}\right)^3 3\eta'\left[(0, n')_{n'-1} - (0, n')_{n'+1}\right].$$

Mettons les nombres de Cauchy à la place des transcendantes de Bessel, il viendra

$$B_{n'} = \frac{1}{n'}\left(\frac{2\eta'}{a'e'}\right)^3 3\eta'(N_{-n'+1,0,0} - N_{-n'+1,0,0}). \tag{149}$$

Cette formule donnera zéro pour toute valeur de n' supérieure à l'unité, et l'on aura

$$\left\{\begin{aligned} B_0 &= F_0 - E_1 e' = \left(\frac{2\eta'}{a'e'}\right)^3, \\ B_1 &= \left(\frac{2\eta'}{a'e'}\right)^3 3\eta', \end{aligned}\right. \tag{150}$$

formules dont le calcul n'offre aucune difficulté.

23. *Simplification de la formule de* $C_{n'}$. — Nous avons trouvé

$$C_{n'} = g(U_{n'} + V_{n'}) + ihW_{n'};$$

mais en nous reportant aux formules de $U_{n'}$, $V_{n'}$, $W_{n'}$, si nous négligeons les termes d'un ordre supérieur au premier, nous avons

$$\left\{\begin{aligned} C_{n'} = &-\frac{1}{a'}ge'\frac{1}{2}F_0\sigma_0^{(n')} \\ &+\frac{1}{a'}\frac{1}{2}g\left[\frac{1}{2}F_0\left(\sigma_1^{(n')} + \sigma_{-1}^{(n')}\right) + F_1\left(\sigma_2^{(n')} + \sigma_0^{(n')}\right)\right] \\ &+ i\frac{1}{a'}\frac{1}{2}h\left[\frac{1}{2}F_0\left(\delta_1^{(n')} - \delta_{-1}^{(n')}\right) + F_1\left(\delta_2^{(n')} - \delta_0^{(n')}\right)\right], \end{aligned}\right. \tag{151}$$

et nous avons

$$\left\{\begin{aligned} &F_0 = \left(\frac{2\eta'}{a'e'}\right)^2, \qquad F_1 = \left(\frac{2\eta'}{a'e'}\right)^2 \cdot 2\eta', \\ &\sigma_0^{(n')} = 2N_{-n',0,0}, \\ &\sigma_1^{(n')} + \sigma_{-1}^{(n')} = 2\left[N_{-n'+1,0,0} + N_{-n'-1,0,0} + \frac{n'e'}{2}(N_{-n'+1,0,1} + N_{-n'-1,0,1})\right], \\ &\sigma_2^{(n')} + \sigma_0^{(n')} = N_{-n'+2,0,0} + N_{-n'-2,0,0} + 2N_{-n',0,0}, \\ &\delta_1^{(n')} - \delta_{-1}^{(n')} = 2\left[N_{-n'+1,0,0} - N_{-n'-1,0,0} + \frac{n'e'}{2}(N_{-n'+1,0,1} - N_{-n'-1,0,1})\right], \\ &\delta_2^{(n')} - \delta_0^{(n')} = N_{-n'+2,0,0} - N_{-n'-2,0,0}. \end{aligned}\right. \tag{152}$$

On conclut facilement de là que $C_{n'}$ est nul, dans les limites de notre approxima-

tion, pour toute valeur de n' supérieure à 2, et que l'on a pour les autres valeurs de n'

$$(153)\quad \begin{cases} C_0 = 0, \\ C_1 = \dfrac{1}{2a'}\left(\dfrac{2\eta'}{a'e'}\right)^2 (g + ih), \\ C_2 = \dfrac{1}{2a'}\left(\dfrac{2\eta'}{a'e'}\right)^2 (e' + 2\eta')(g + ih). \end{cases}$$

24. *Simplification de la formule de* $F_{n'}$. — La formule qui donne $F_{n'}$ est semblable à celle qui donne $A_{n'}$; par conséquent, les mêmes simplifications s'y appliquent. Pour toute valeur de n' supérieure à 2, $F_{n'}$ est insensible, et pour les autres

$$(154)\quad \begin{cases} F_0 = -\dfrac{3}{2} g' e', \\ F_1 = \dfrac{g'}{2} + i\dfrac{h'}{2}, \\ F_2 = \dfrac{g' e'}{4} + i\dfrac{h' e'}{4}. \end{cases}$$

25. *Simplification de la formule de* $G_{n'}$. — On voit sans peine que $G_{n'}$ est insensible aussi pour toute valeur de n' supérieure à 2, et que l'on a pour les autres valeurs de n',

$$(155)\quad \begin{cases} G_0 = -\dfrac{3}{2} g'' e', \\ G_1 = \dfrac{g''}{2} + i\dfrac{h''}{2}, \\ G_2 = \dfrac{g'' e'}{4} + i\dfrac{h'' e'}{4}. \end{cases}$$

Toutes les formules que nous venons de donner serviront à faire rapidement le calcul des inégalités du premier ordre d'un astéroïde ou d'une comète, quand on se bornera à une première approximation relativement à l'excentricité de la planète perturbatrice.

§ IX. — SIMPLIFICATION DE LA FORMULE DE $D_{n'}$ DANS LE CAS OU e' EST TRÈS-PETIT ET n' ASSEZ GRAND.

26. *Simplification dans le cas de e' très-petit.* — D'après la formule (81), $D_{n'}$ se compose de plusieurs parties $D'_{n'}$, $D''_{n'}$, $D'''_{n'}$; mais la seconde $D''_{n'}$ est déjà du second ordre par rapport à e' : donc nous avons simplement ici

$$D_{n'} = D'_{n'};$$

par suite

$$(156)\qquad D_{n'} = \frac{k}{n'} G \sum_{-\infty}^{\infty}{}_h\, h\,\Theta_h\,(0, n')_{n'-h}\, c^{-h\psi i}.$$

En introduisant les nombres de Cauchy, cette formule devient

$$(157)\qquad D_{n'} = \frac{k}{n'} G \sum_{-\infty}^{\infty}{}_h\, h\,\Theta_h\, c^{-h\psi i}\left(N_{-n'+h,0,0} + \frac{n'e'}{2} N_{-n'+h,0,1}\right).$$

En vertu de théorèmes connus, la parenthèse est nulle pour toute valeur de h qui rend $-n'+h$ différent des trois nombres

$$0, \quad 1, \quad -1;$$

il suffit donc de donner à h successivement les trois valeurs

$$n', \quad n'+1, \quad n'-1,$$

et l'on obtient pour $D_{n'}$ la formule suivante, où n'entrent plus que les transcendantes Θ,

$$(158)\qquad D_{n'} = kG c^{-n'\psi i}\left\{\Theta_{n'} + \frac{e'}{2}\left[(n'-1)\,\Theta_{n'-1}\, c^{\psi i} - (n'+1)\,\Theta_{n'+1}\, c^{-\psi i}\right]\right\}.$$

Il convient de développer cette formule pour les applications, et l'on trouve

$$(159)\qquad D_{n'} = \left\{\begin{array}{l} kG\left\{\begin{array}{l}\Theta_{n'}\cos n'\psi + \frac{e'}{2}\cos n'\psi\cos\psi\left[(n'-1)\,\Theta_{n'-1} - (n'+1)\,\Theta_{n'+1}\right] \\ \qquad + \frac{e'}{2}\sin n'\psi\sin\psi\left[(n'-1)\,\Theta_{n'-1} + (n'+1)\,\Theta_{n'+1}\right]\end{array}\right\} \\ -ikG\left\{\begin{array}{l}\Theta_{n'}\sin n'\psi + \frac{e'}{2}\sin n'\psi\cos\psi\left[(n'-1)\,\Theta_{n'-1} - (n'+1)\,\Theta_{n'+1}\right] \\ \qquad - \frac{e'}{2}\cos n'\psi\sin\psi\left[(n'-1)\,\Theta_{n'-1} + (n'+1)\,\Theta_{n'+1}\right]\end{array}\right\}\end{array}\right\},$$

ou encore

$$(160)\qquad D_{n'} = \left\{\begin{array}{l} kG\left\{\Theta_{n'}\cos n'\psi + \frac{e'}{2}\left[(n'-1)\,\Theta_{n'-1}\cos(n'-1)\psi - (n'+1)\,\Theta_{n'+1}\cos(n'+1)\psi\right]\right\} \\ -ikG\left\{\Theta_{n'}\sin n'\psi + \frac{e'}{2}\left[(n'-1)\,\Theta_{n'-1}\sin(n'-1)\psi - (n'+1)\,\Theta_{n'+1}\sin(n'+1)\psi\right]\right\}\end{array}\right\}.$$

27. *Cas où n' est grand*. — Ajoutons maintenant à l'hypothèse précédente

que n' est assez considérable pour que $\frac{1}{n'}$ soit du même ordre que e', et nous allons pouvoir simplifier encore la formule (158).

Nous savons qu'on a généralement (*voir* les Notes de Cauchy)

$$(161) \qquad \Theta_{n'} = \frac{1.3.5\ldots(2n'-1)}{2.4.6\ldots 2n'} \frac{\theta^{n'}}{\sqrt{1-\theta^2}} \left[1 - \frac{1}{4n'+4}\frac{\theta^2}{1-\theta^2} + \ldots\right].$$

Si n' est considérable, cette expression conduit à la formule approchée

$$(162) \qquad \Theta_{n'} = \frac{1.3.5\ldots(2n'-1)}{2.4.6\ldots 2n'} \frac{\theta^{n'}}{\sqrt{1-\theta^2}} \left(1 - \frac{1}{4n'}\frac{\theta^2}{1-\theta^2}\right),$$

ou même à

$$(163) \qquad \Theta_{n'} = \frac{1.3.5\ldots 2n'-1}{2.4.6\ldots 2n'} \frac{\theta^{n'}}{\sqrt{1-\theta^2}},$$

qui donne

$$(164) \qquad \begin{cases} \Theta_{n'-1} = \Theta_{n'} \dfrac{2n'}{2n'-1}\theta^{-1} = \Theta_{n'}\left(1+\dfrac{1}{2n'}\right)\dfrac{1}{\theta} & \text{environ,} \\ \Theta_{n'+1} = \Theta_{n'} \dfrac{2n'+1}{2n'+2}\theta \;= \Theta_{n'}\left(1-\dfrac{1}{2n'}\right)\theta & \text{environ.} \end{cases}$$

Dans la formule (158) substituons ces deux dernières quantités, elle prendra la forme

$$(165) \quad D_{n'} = kGc^{-n'\psi i}\left\{\Theta_{n'} + \frac{e'}{2}\Theta_{n'}\left[(n'-1)\left(1+\frac{1}{2n'}\right)\frac{1}{\theta}c^{\psi i} - (n'+1)\left(1-\frac{1}{2n'}\right)\theta c^{-\psi i}\right]\right\}.$$

Remplaçons dans cette dernière le premier $\Theta_{n'-1}$ par sa valeur tirée de la formule (162), et le second par sa valeur tirée de la formule (163); posons, pour abréger,

$$(166) \qquad \xi = \frac{1}{\theta}c^{\psi i};$$

nous aurons enfin

$$(167) \qquad \begin{cases} D_{n'} = k\,\dfrac{1.3.5\ldots(2n'-1)}{2.4.6\ldots 2n'}\,G\,\dfrac{\theta^{n'}}{\sqrt{1-\theta^2}}\,c^{-n'\psi i} \\ \qquad \times\left[1 + \dfrac{n'e'}{2}\left(\xi - \dfrac{1}{\xi}\right) - \dfrac{e'}{4}\left(\xi + \dfrac{1}{\xi}\right) - \dfrac{1}{4n'}\dfrac{\theta^2}{1-\theta^2}\right]. \end{cases}$$

C'est précisément la formule donnée par Cauchy dans la sixième des Notes annexées au Mémoire de M. Le Verrier.

Pour les applications, il convient de lui donner une autre forme. Posons

$$(168) \qquad M = \frac{1}{\theta} + \theta, \qquad N = \frac{1}{\theta} - \theta,$$

la parenthèse devient

$$(169) \qquad 1 - \frac{1}{4n'}\frac{\theta^2}{1-\theta^2} + \frac{e'}{4}\cos\psi\,(2Nn' - M) + i\frac{e'}{4}\sin\psi\,(2Mn' - N).$$

Mais cette expression est le commencement du développement de l'exponentielle

$$c^{\mathfrak{P} + \mathfrak{Q}i},$$

ou

$$(170) \qquad \begin{cases} \mathfrak{P} = -\frac{1}{4n'}\frac{\theta^2}{1-\theta^2} + \frac{e'}{4}\cos\psi\,(2Nn' - M), \\ \mathfrak{Q} = \frac{e'}{4}\sin\psi\,(2Mn' - N); \end{cases}$$

donc

$$(171) \qquad \begin{cases} D_{n'} = k\,\frac{1.3.5\ldots(2n'-1)}{2.4.6\ldots 2n'}\,G\,\frac{\theta^{n'}}{\sqrt{1-\theta^2}}\,c^{-n'\psi i}\,c^{\mathfrak{P} + \mathfrak{Q}i} \\ \quad = k\,\frac{1.3.5\ldots(2n'-1)}{2.4.6\ldots 2n'}\,\frac{\theta^{n'}}{\sqrt{1-\theta^2}}\,G c^{\mathfrak{P}}\,[\cos(\mathfrak{Q} - n'\psi) + i\sin(\mathfrak{Q} - n'\psi)]. \end{cases}$$

§ X. — SIMPLIFICATION DE LA FORMULE DE $E_{n'}$ DANS LE CAS OU e' EST TRÈS-PETIT ET n' ASSEZ GRAND.

28. *Cas ou e' est très-petit.* — Nous négligerons dans ce cas les puissances de e' supérieures à la première; par conséquent, $E_{n'}$ se réduira à sa première partie $E'_{n'}$. Mais on voit que cette quantité se déduit de $D'_{n'}$ en changeant dans cette dernière

k	en	1,
G	en	G^3,
Θ	en	Θ';

donc, si nous effectuons ces changements dans les formules (158) et (160), nous aurons, pour le cas qui nous occupe,

$$(172) \qquad E_{n'} = G^3 c^{-n'\psi i}\left\{\Theta'_{n'} + \frac{e'}{2}\left[(n'-1)\,\Theta'_{n'-1}\,c^{\psi i} - (n'+1)\,\Theta'_{n'+1}\,c^{-\psi i}\right]\right\}$$

et

$$(173)\quad F_{n'} = \left\{ \begin{array}{l} G^3 \left\{ \Theta'_{n'} \cos n'\psi + \frac{e'}{2} \left[(n'-1)\,\Theta'_{n'-1} \cos(n'-1)\psi - (n'+1)\,\Theta'_{n'+1} \cos(n'+1)\psi \right] \right\} \\ -\, i G^3 \left\{ \Theta'_{n'} \sin n'\psi + \frac{e'}{2} \left[(n'-1)\,\Theta'_{n'-1} \sin(n'-1)\psi - (n'+1)\,\Theta'_{n'+1} \sin(n'+1)\psi \right] \right\} \end{array} \right\}.$$

29. *Cas où n' est considérable.* — De la formule connue

$$(174)\qquad \Theta'_{n'} = \frac{3.5\ldots(2n'+1)}{2.4\ldots2n'}\,\frac{\theta^{n'}}{(1-\theta^2)^{\frac{3}{2}}}\left(1 + \frac{3}{4n'+4}\,\frac{\theta^2}{1-\theta^2} + \ldots\right),$$

on déduit, si n' est grand,

$$(175)\qquad \Theta'_{p'} = \frac{3.5\ldots(2n'+1)}{2.4\ldots2n'}\,\frac{\theta^{n'}}{(1-\theta^2)^{\frac{3}{2}}}\left(1 + \frac{3}{4n'}\,\frac{\theta^2}{1-\theta^2}\right) \text{ environ,}$$

ou même

$$(176)\qquad \Theta'_{n'} = \frac{3.5\ldots(2n'+1)}{2.4\ldots2n'}\,\frac{\theta^{n'}}{(1-\theta^2)^{\frac{3}{2}}} \text{ environ,}$$

qui conduit aux relations approchées

$$(177)\qquad \left\{ \begin{array}{l} \Theta'_{n'-1} = \Theta'_{n'}\,\frac{2n'}{2n'+1}\,\frac{1}{\theta} = \left(1 - \frac{1}{2n'}\right)\Theta'_{n'}\,\frac{1}{\theta} \text{ environ,} \\ \Theta'_{n'+1} = \Theta'_{n'}\,\frac{2n'+3}{2n'+2}\,\theta = \left(1 + \frac{1}{2n'}\right)\Theta'_{n'}\,\theta \text{ environ.} \end{array} \right.$$

Substituons les valeurs (177) dans la formule (172), nous en tirerons

$$(178)\quad F_{n'} = G^3 c^{-n'\psi i} \left\{ \Theta'_{n'} + \frac{e'}{2}\,\Theta'_{n'} \left[(n'-1)\left(1 - \frac{1}{2n'}\right)\xi - (n'+1)\left(1 + \frac{1}{2n'}\right)\frac{1}{\xi} \right] \right\};$$

remplaçons le premier $\Theta'_{n'}$ par sa valeur tirée de (175), et le second par sa valeur tirée de (176), il viendra enfin

$$(179)\quad E_{n'} = \frac{3.5\ldots(2n'+1)}{2.4\ldots2n'}\,\frac{\theta^{n'}}{(1-\theta^2)^{\frac{3}{2}}}\,G^3 c^{-n'\psi i}\left[1 + \frac{3}{4n'}\,\frac{\theta^2}{1-\theta^2} + \frac{n'e'}{2}\left(\xi - \frac{1}{\xi}\right) - \frac{3e'}{4}\left(\xi + \frac{1}{\xi}\right)\right].$$

En posant

$$(180)\quad \begin{cases} \mathfrak{P} = \dfrac{3}{4n'}\dfrac{\theta^2}{1-\theta^2} + \dfrac{e'}{4}\cos\psi\,(2\,\mathrm{N}\,n' - 3\,\mathrm{M}), \\ \mathfrak{Q} = \dfrac{e'}{4}\sin\psi\,(2\,\mathrm{M}\,n' - 3\,\mathrm{N}), \end{cases}$$

la formule (179) devient

$$(181)\quad \begin{cases} \mathrm{E}_{n'} = \dfrac{3.5\ldots(2n'+1)}{2.4\ldots 2n'}\dfrac{\theta^{n'}}{(1-\theta^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{G}^3 c^{\mathfrak{P}} c^{(\mathfrak{Q}-n'\psi)i} \\ \quad = \dfrac{3.5\ldots(2n'-1)}{2.4\ldots 2n'}\dfrac{\theta^{n'}}{(1-\theta^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{G}^3 c^{\mathfrak{P}}\,[\cos(\mathfrak{Q}-n'\psi) + i\sin(\mathfrak{Q}-n'\psi)]. \end{cases}$$

On voit que les deux formules (171) et (181) sont débarrassées des transcendantes de Laplace et des transcendantes de Bessel, ce qui rend très-facile leur mise en nombre.

Note sur les transcendantes de Bessel et les nombres N *de Cauchy.*

1. Dans cette Note, je me propose de démontrer brièvement les propriétés des transcendantes $(j, n)_p$ et celles des nombres $\mathrm{N}_{-p,j,q}$, dont la connaissance est nécessaire pour comprendre facilement les calculs du Mémoire précédent.

2. *Nombres de Cauchy.* — En posant

$$x = c^{ui},$$

le nombre N de Cauchy est défini par l'intégrale

$$(1)\qquad \mathrm{N}_{-p,j,q} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x^{-p}\left(x+\frac{1}{x}\right)^j\left(x-\frac{1}{x}\right)^q du,$$

dans laquelle j et q sont des nombres entiers nuls ou positifs, et p un nombre entier qui peut être nul, positif ou négatif. Ces nombres ont plusieurs propriétés remarquables qui se démontrent facilement ; je vais énoncer les plus importantes.

1° *Le nombre* $\mathrm{N}_{-p,j,q}$ *est égal à la partie constante du développement de* $x^{-p}\left(x+\frac{1}{x}\right)^j\left(x-\frac{1}{x}\right)^q$, *suivant les puissances de* x.

En effet, tout terme qui dans le développement renferme l'exponentielle x, donnera zéro par l'intégration.

2° *Le nombre* $N_{-p,j,q}$ *est nul toutes les fois que la somme des indices* $-p+j+q$ *est négative ou impaire, et il est égal à l'unité quand cette somme est nulle.*

En effet, le développement du produit $x^{-p}\left(x+\frac{1}{x}\right)^j\left(x-\frac{1}{x}\right)^q$ donne un résultat de la forme

$$x^{j+q-p}+H_1 x^{j+q-p-2}+H_2 x^{j+q-p-4}+\ldots.$$

Il ne peut y avoir dans ce développement un terme indépendant de x qu'autant que

$$j+q-p=2k,$$

k étant un nombre positif, et si

$$j+q-p=0.$$

Le terme indépendant de x est l'unité.

3° *Si* p *change de signe,* N *garde la même valeur numérique; mais il change de signe si* $j-p$ *ou* q *est impair.*

En effet, nous avons identiquement

$$x^{-p}\left(x+\frac{1}{x}\right)^j\left(x-\frac{1}{x}\right)^q=\left(\frac{1}{x}\right)^p\left(\frac{1}{x}+x\right)^j\left(\frac{1}{x}-x\right)^q(-1)^q;$$

donc, en prenant les parties constantes des deux membres,

$$N_{-p,j,q}=(-1)^q N_{p,j,q}.$$

D'ailleurs on a

$$(-1)^q=(-1)^{2k-j+p}=(-1)^{j-p}.$$

Le théorème est donc démontré.

4° *Si on connaît tous les nombres* N *relatifs à une certaine valeur de* j, *on peut en déduire ceux qui se rapportent à une valeur de* j *immédiatement supérieure.*

En effet, on a identiquement

$$x^{-p}\left(x+\frac{1}{x}\right)^j\left(x-\frac{1}{x}\right)^q=x^{-p+1}\left(x+\frac{1}{x}\right)^{j-1}\left(x-\frac{1}{x}\right)^q+x^{-p-1}\left(x+\frac{1}{x}\right)^{j-1}\left(x-\frac{1}{x}\right)^q;$$

donc, en prenant les parties constantes des deux membres,

$$N_{-p,j,q}=N_{-p+1,j-1,q}+N_{-p-1,j-1,q}.$$

5° *Si on connaît tous les nombres* N *relatifs à une certaine valeur de* q, *on peut en déduire ceux qui se rapportent à une valeur de* q *immédiatement supérieure.*

En effet, on a

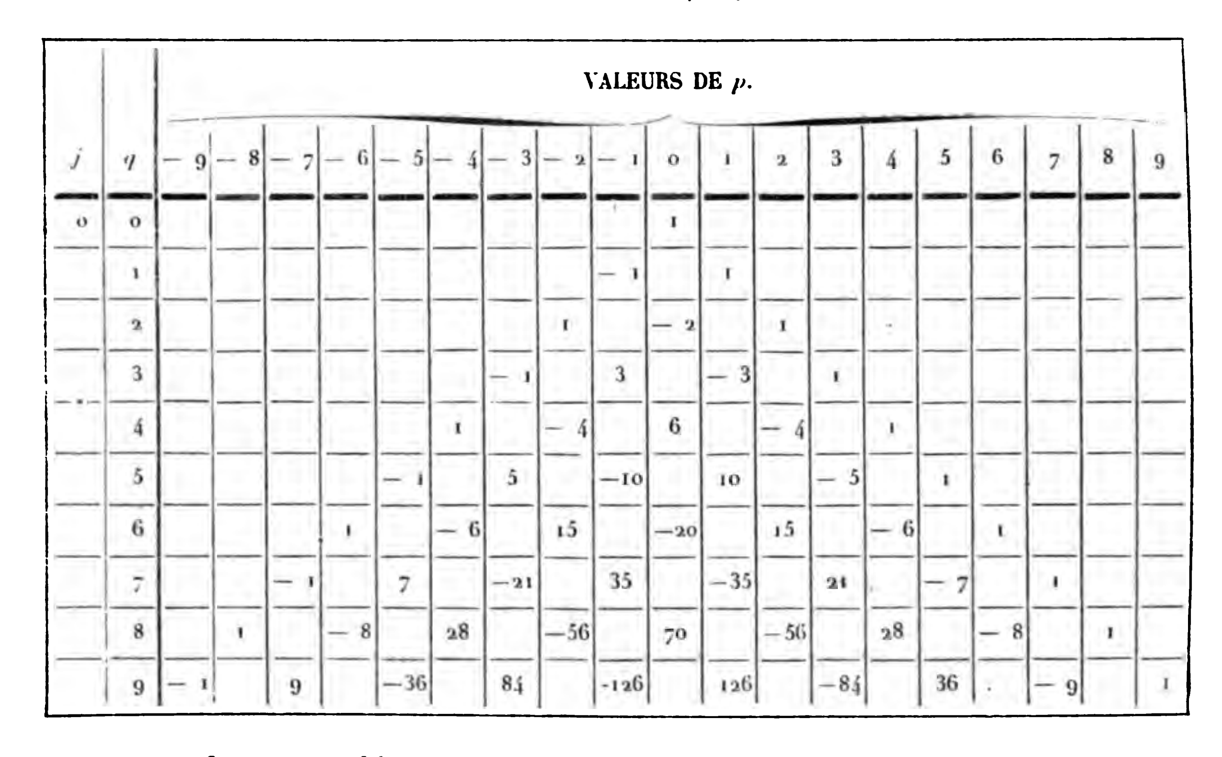
$$x^{-p}\left(x+\frac{1}{x}\right)^j\left(x-\frac{1}{x}\right)^q = x^{-p+1}\left(x+\frac{1}{x}\right)^j\left(x-\frac{1}{x}\right)^{q-1} - x^{-p-1}\left(x+\frac{1}{x}\right)^j\left(x-\frac{1}{x}\right)^{q-1};$$

donc, en prenant les parties constantes des deux membres,

$$N_{-p,j,q} = N_{-p+1,j,q-1} - N_{-p-1,j,q-1}.$$

De ces théorèmes on déduit un moyen simple de former des tableaux donnant tous ces nombres. Cherchons d'abord tous ceux pour lesquels $j=0$. En voici le tableau. Chaque case vide correspond à un nombre N égal à zéro.

Tableau des $N_{-p,0,q}$.



		VALEURS DE p.																		
j	q	−9	−8	−7	−6	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0										1									
	1									−1		1								
	2								1		−2		1							
	3							−1		3		−3		1						
	4						1		−4		6		−4		1					
	5					−1		5		−10		10		−5		1				
	6				1		−6		15		−20		15		−6		1			
	7			−1		7		−21		35		−35		21		−7		1		
	8		1		−8		28		−56		70		−56		28		−8		1	
	9	−1		9		−36		84		−126		126		−84		36		−9		1

Pour former ce tableau :

1° J'observe que $N_{0,0,0}=1$.

2° Si à partir de ce nombre je marche en diagonale vers la droite, je rencontre une série de cases qui correspondent à une somme d'indices égale à zéro, j'y place l'unité.

3° En partant de nouveau de la case (0, 0, 0), j'avance en diagonale vers la gauche, je dois placer alternativement -1 et $+1$ dans chaque case en vertu de la seconde propriété des nombres N.

4° Enfin, en vertu de la dernière propriété, chacun des nombres se forme en retranchant de celui qui est immédiatement à gauche et au-dessus, celui qui est immédiatement à droite et au-dessus.

On voit que chacune des lignes horizontales de ce tableau reproduit la série des coefficients binomiaux.

Cherchons maintenant la série des nombres N pour lesquels $j = 1$.

Tableau des $N_{-p,1,q}$.

		VALEURS DE p.														
j	q	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
1	0							1		1						
	1						-1		0		1					
	2					1		-1		-1		1				
	3				-1		2		0		-2		1			
	4			1		-3		2		2		-3		1		
	5		-1		4		-5		0		5		-4		1	
	6	1		-5		9		-5		-5		9		-5		1
	7		6		-14		14		0		-14		14		-6	

Ce tableau se forme suivant les mêmes règles que le précédent. On commence par remplir les cases correspondantes à une somme d'indices égale à zéro; les autres se remplissent alors à vue. On pourrait continuer la série de ces tableaux.

3. *Transcendantes de Bessel généralisées.* — La transcendante de Bessel est le coefficient de x^p dans le développement de

$$e^{\frac{n\rho}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)},$$

suivant les puissances de l'exponentielle $x = c^{ui}$. Elle a pour formule

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x^{-p} c^{\frac{ne}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)} du.$$

Posons plus généralement

$$(j, n)_p = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x^{-p}\left(x+\frac{1}{x}\right)^j c^{\frac{ne}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)} du.$$

Cette transcendante se confondra avec celle de Bessel si $j = 0$. Ce qu'il y a de remarquable, c'est que cette transcendante est liée aux nombres de Cauchy par une relation simple, qui en fait connaître immédiatement toutes les propriétés.

En effet, posons

$$c^{\frac{ne}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)} = \sum_0^{\infty}{}_q \frac{\left(\frac{ne}{2}\right)^q}{1.2\ldots q}\left(x-\frac{1}{x}\right)^q,$$

nous aurons

$$(j, n)_p = \sum_0^{\infty}{}_q \frac{\left(\frac{ne}{2}\right)^q}{1.2\ldots q}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x^{-p}\left(x+\frac{1}{x}\right)^j\left(x-\frac{1}{x}\right)^q du,$$

ou bien

$$(j, n)_p = \sum_0^{\infty}{}_q \frac{\left(\frac{ne}{2}\right)^q}{1.2\ldots q} N_{-p, j, q}.$$

Cette série donne, avec la même facilité, les transcendantes de Bessel et les transcendantes plus compliquées que nous proposons d'introduire dans le mécanisme céleste.

De cette formule découlent plusieurs propriétés, dont nous avons fait usage dans le Mémoire précédent :

1° *Si p change de signe, $(j, n)_p$ garde la même valeur numérique; mais il change de signe si $j - p$ est impair.*

2° *Si n change de signe, $(j, n)_p$ garde la même valeur numérique; mais il change de signe si $j - p$ est impair.*

3° *Si p et n changent de signes, $(j, n)_p$ ne change pas.*

4° *La transcendante $(j, n)_p$ peut se calculer au moyen des transcendantes $(j-1, n)_p$.*

par la formule

$$(j, n)_p = (j-1, n)_{p-1} + (j-1, n)_{p+1}.$$

C'est une conséquence immédiate de la quatrième propriété des nombres N.

5° *On a entre* $(1, n)_p$ *et* $(0, n)_p$ *la relation*

$$(1, n)_p = \frac{p}{\left(\frac{ne}{2}\right)} (0, n)_p.$$

On démontre cette propriété au moyen de l'intégration par parties appliquée à l'intégrale qui définit la transcendante.

6° *Une transcendante de Bessel peut se calculer au moyen des précédentes par la formule*

$$(0, n)_{p+1} = \frac{p}{\left(\frac{ne}{2}\right)} (0, n)_p - (0, n)_{p-1}.$$

En effet, la quatrième propriété donne

$$(1, n)_p = (0, n)_{p-1} + (0, n)_{p+1};$$

la cinquième donne

$$(1, n)_p = \frac{p}{\left(\frac{ne}{2}\right)} (0, n)_p;$$

donc

$$\frac{p}{\left(\frac{ne}{2}\right)} (0, n)_p = (0, n)_{p-1} + (0, n)_{p+1}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

4. *Liaison des transcendantes de Laplace aux nombres de Cauchy.* — La transcendante $b_s^{(p)}$ de Laplace est le coefficient de $\cos pu$ dans le développement de la fonction

$$(1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos u)^{-s}.$$

ou le double du coefficient de l'exponentielle $c^{pui} = x^p$ dans le même développement. Donc

$$\frac{1}{2} b_s^{(p)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x^{-p} (1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos u)^{-s} \, du.$$

Dans cette expression mettons $(1 + \alpha^2)$ en facteur, introduisons les exponentielles

imaginaires à la place des lignes trigonométriques, nous aurons

$$\frac{1}{2} b_s^{(p)} = (1+\alpha^2)^{-s} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x^{-p} \left[1 - \frac{\alpha}{1+\alpha^2}\left(x + \frac{1}{x}\right)\right]^{-s} du;$$

développons suivant la formule du binôme la parenthèse, nous obtiendrons

$$\frac{1}{2} b_s^{(p)} = \frac{1}{1+\alpha^2} \sum_0^{\infty} {}_j [s]_j \left(\frac{\alpha}{1+\alpha^2}\right)^j \mathrm{N}_{-p,\,j,\,0},$$

en posant avec Cauchy

$$[s]_j = \frac{s(s+1)\ldots(s+j-1)}{1.2\ldots j}.$$

Telle est la relation qui lie les N aux $b_s^{(p)}$. On démontrerait facilement plusieurs propriétés connues de la transcendante de Laplace au moyen des propriétés des nombres de Cauchy.

ÉTUDE

DU

MOUVEMENT DE ROTATION DE LA LUNETTE MÉRIDIENNE;

PAR A.-J. YVON VILLARCEAU.

THÉORIE.

Si les tourillons de la Lunette étaient des solides de révolution autour d'un axe commun, l'axe optique décrirait une surface conique ou un hyperboloïde de révolution autour de cet axe commun : du moins, il en serait ainsi, s'il ne se produisait de légères flexions (*), dont on compte éliminer l'effet en combinant les observations faites dans les deux positions de l'instrument. Les tourillons et leurs coussinets, ou les tourillons seulement, étant supposés affectés de certaines irrégularités de figure, la surface décrite par l'axe optique cessera d'être exactement conique ou d'appartenir à l'hyperboloïde de révolution ; et les écarts qu'elle présentera par rapport à ces dernières surfaces produiront, dans les observations, des erreurs qu'il s'agit de déterminer.

Pour ne laisser aucune obscurité sur cette matière, nous reprendrons brièvement la théorie de la Lunette méridienne, en y introduisant les éléments relatifs aux conditions particulières que nous nous proposons d'étudier.

$\mathcal{A}$ étant l'ascension droite d'une étoile observée, non affectée de l'aberration diurne;

$\mathcal{P}$ sa distance au pôle nord ;

L la latitude de l'observatoire ;

$x = 0^s,0206 \cos L$, la constante de l'aberration diurne en ascension droite, pour ce même lieu ;

t l'heure observée du passage de l'étoile à un fil défini, réel ou idéal;

(*) Dans un autre Mémoire, nous indiquerons les moyens de déterminer à la fois l'effet de ces flexions et de l'irrégularité de forme des tourillons.

∂t la correction à appliquer au temps t, pour tenir compte de ce que l'axe optique correspondant au fil considéré ne décrit pas exactement le méridien;

C_p la correction de la pendule :
on a d'abord

$$(1)\qquad \mathcal{A} \pm \frac{x}{\sin \mathfrak{P}} = t + C_p + \partial t \qquad \text{Pass.}\begin{cases}\text{sup.}\\ \text{inf.}\end{cases}$$

Soient actuellement (*fig.* 1 et 2, *Pl.* VII,) P le lieu du pôle sur la sphère, C le point où une parallèle à l'axe optique menée par le centre de la sphère rencontre sa surface du côté de l'objectif, et supposons actuellement ce point à l'Est du méridien : abaissons de C un arc $\overline{CM} = \psi$ perpendiculairement au méridien PM; nous aurons

$$(2)\qquad \sin\psi = \pm \sin\mathfrak{P}.\sin 15\partial t, \qquad \text{Pass.}\begin{cases}\text{sup.}\\ \text{inf.}\end{cases}$$

équation d'où l'on tirera ∂t quand ψ sera déterminé.

Concevons maintenant une droite de direction quelconque, mais liée géométriquement à l'axe matériel de rotation de la Lunette. Nous particulariserons cette droite suivant les cas; pour l'instant désignons-la par la lettre A.

Par le centre S d'une sphère nous mènerons (*fig.* 3) les trois droites :

SA parallèle à la droite A;

SO parallèle à la ligne Est-Ouest (O désignant le côté Ouest);

SC parallèle à l'axe optique considéré (C étant le côté de l'objectif).

Les trois plans passant par ces droites prises deux à deux, formeront le triangle sphérique COA.

Si dans le plan CSO on mène SM perpendiculaire à SO, SM sera la trace du méridien; et, en vertu de la définition précédente de l'angle ψ, on aura

$$\overline{CO} = 90° + \psi.$$

Soient

$$\overline{CA} = 90° + \chi, \qquad \overline{OA} = \gamma.$$

Menons du point O un arc horizontal OH, et abaissons de A un arc $\overline{AD} = b$ pe pendiculaire sur OH; soient $\overline{OD} = a$, θ l'angle dièdre AOD, h l'angle COH la hauteur du plan CSO au-dessus de l'horizon Sud. Cette hauteur h serait c de la Lunette, si elle avait un axe de rotation coïncidant avec SO; l'angle h serait cependant pas tout à fait égal à la hauteur méridienne de l'étoile obser puisque l'observation a lieu en C hors du méridien; mais la différence ne s qu'une quantité du second ordre de petitesse. (Théorie du Cercle mural.)

L'arc $a = \overline{OD}$ est la déviation horizontale de la droite A vers le Sud ; l'arc $b = \overline{AD}$ est l'élévation du côté occidental de la même droite au-dessus de l'horizon.

Ceci posé, le triangle sphérique COA, dans lequel on a $\widehat{COA} = h - \theta$, fournit la relation

$$(3) \qquad -\sin\chi = \cos\psi \sin\gamma \cos(h - \theta) - \sin\psi \cos\gamma.$$

Si l'on pose

$$(4) \qquad \operatorname{tang}\gamma' = \operatorname{tang}\gamma \cos(h - \theta),$$

il vient exactement

$$(5) \qquad \sin(\psi - \gamma') = \frac{\cos\gamma'}{\cos\gamma} \sin\chi :$$

l'ambiguïté de γ' étant d'ailleurs indifférente.

A l'aide des formules (4) et (5) on obtiendrait la valeur de ψ en fonctions des coordonnées angulaires θ et γ du point A, de la hauteur h et de la constante χ supposée connue.

Les coordonnées θ et γ sont d'ailleurs liées aux quantités a et b par les relations

$$(6) \qquad \begin{aligned} \operatorname{tang} a &= \operatorname{tang}\gamma \cos\theta, \\ \sin b &= \sin\gamma \sin\theta, \end{aligned}$$

qui permettent de substituer à l'équation (4) la suivante :

$$(7) \qquad \operatorname{tang}\gamma' = \operatorname{tang} a \cos h + \frac{\sin b}{\cos\gamma} \sin h.$$

A la solution exacte nous allons substituer une solution approchée : pour cela, nous supposerons que χ et γ soient des quantités du premier ordre de petitesse ; il s'ensuivra que a et b seront du même ordre. Suivant l'équation (4), γ' pourra être supposé du même ordre que γ. En ne négligeant donc que des quantités du troisième ordre, on aura par l'équation (5)

$$\psi = \chi + \gamma'.$$

Au même degré d'approximation, l'équation (7) se réduit à

$$\gamma' = a \cos h + b \sin h ;$$

d'où finalement

$$(8) \qquad \psi = \chi + a \cos h + b \sin h,$$

expression exacte, aux termes près, du troisième ordre. En vertu de la remarque présentée plus haut à l'égard de h, on voit que si l'on substitue à cet angle la hauteur méridienne elle-même, le degré d'exactitude de la formule (8) n'en sera pas altéré.

Enfin les équations (1) et (2) donnent, aux termes près du troisième ordre,

$$\mathcal{A} = t + C_p \pm \frac{1}{\sin \varphi}\left(\frac{\psi}{15} - x\right). \tag{9}$$

Quand on supposera que la droite A se confond avec l'axe de rotation d'une Lunette dont les tourillons seraient exactement de révolution autour de cet axe, les formules (8) et (9) s'identifieront avec les formules connues.

S'il s'agissait d'étudier les tourillons à l'aide d'un collimateur intérieur à l'axe de rotation, tel que celui réalisé par M. Airy à Greenwich, nous prendrions pour droite A la ligne qui joint le centre optique de ce collimateur au centre de l'image lumineuse produite à son foyer. Cette même image étant observée à l'aide d'un collimateur extérieur; si l'on joint le centre optique de ce second collimateur avec l'image qui se produit à son foyer, on a une droite parallèle à la droite A, qui décrit autour du centre optique une surface conique : en sorte que, pour étudier le mouvement angulaire de la droite A, il suffit d'observer le déplacement de l'image produite au foyer du collimateur extérieur. La démonstration des formules qui se rattachent à l'emploi de ce système est alors très-simple. Notons cependant que ce système peut présenter quelques inconvénients : il exige, en effet, que le collimateur extérieur et les coussinets de l'axe de l'instrument méridien ne subissent aucun déplacement relatif pendant la durée des opérations. Or il est à craindre que les piliers de l'instrument dont la base ne s'étend pas jusqu'aux piliers du collimateur, n'éprouvent des mouvements différents, que la dilatation des uns ne diffère de celle des autres.

A l'Observatoire impérial de Paris, on a pris d'autres dispositions. Des appendices portant des points très-petits ont été ajustés solidement aux extrémités des tourillons de l'axe de la Lunette méridienne. La droite joignant ces points est celle que nous avons désignée par A, et les points qui la déterminent sont observés au moyen de microscopes montés sur les coussinets eux-mêmes; en sorte que l'on n'a pas même à redouter l'effet d'une inégale dilatation dans les deux piliers. Nous allons présenter les formules qui se rapportent à cette disposition.

Soit un système d'axes coordonnés X, Y, Z menés par le centre S de la sphère : X dans la direction australe du méridien, Y dirigé vers le zénith et Z vers l'Ouest.

Désignons par ξ, η, ζ les coordonnées du point oriental de la droite A;

ξ', η', ζ' les coordonnées de son point occidental; R la distance linéaire de ces deux points, nous aurons

$$\zeta' - \zeta = R \cos b \cos a,$$
$$\xi' - \xi = R \cos b \sin a,$$
$$\eta' - \eta = R \sin b;$$

d'où

$$(\xi' - \xi)^2 + (\eta' - \eta)^2 + (\zeta' - \zeta)^2 = R^2.$$

Considérons maintenant $\xi' - \xi$ et $\eta' - \eta$ comme étant du premier ordre de petitesse par rapport à R, il s'ensuivra que $\zeta' - \zeta$ ne diffère de $\pm R$ que de quantités du second ordre. Posons, pour abréger,

$$\xi' - \xi = \bar{x}, \qquad \eta' - \eta = \bar{y};$$

il viendra, aux termes près du troisième ordre,

$$a = \frac{\bar{x}}{R \sin 1''}, \qquad b = \frac{\bar{y}}{R \sin 1''}.$$

Avant de poursuivre, nous ferons remarquer que si la droite A tournait autour d'un axe fixe ou d'un axe assujetti à rester parallèle à lui-même, les différences $\bar{x}$ et $\bar{y}$ des coordonnées de ses extrémités détermineraient un cercle. En effet, soient (a) et (b) le déplacement commun des extrémités parallèlement à X et Y, r et r' les rayons des cercles qui seraient décrits par les mêmes extrémités, en projection sur le plan des xy, si le mouvement de translation n'existait pas, ν l'angle de position des rayons parallèles; on aurait

$$\xi' = (a) + r' \cos \nu, \qquad \eta' = (b) + r' \sin \nu,$$
$$\xi = (a) + r \cos \nu, \qquad \eta = (b) + r \sin \nu;$$

d'où

$$\bar{x} = (r' - r) \cos \nu, \qquad \bar{y} = (r' - r) \sin \nu,$$

et

$$\bar{x}^2 + \bar{y}^2 = (r' - r)^2,$$

équation qui est celle d'un cercle.

Revenons maintenant au cas qui nous occupe. Si nous supposons que les irrégularités de forme des tourillons ne soient pas trop considérables, la figure construite au moyen des coordonnées $\bar{x}$ et $\bar{y}$ différera peu d'un cercle, à moins que ces coordonnées ne soient elles-mêmes très-petites. Prenons un point G (*fig.* 4) dans l'intérieur de la figure à peu près circulaire que fournissent les diffé-

rences $\bar{x}$ et $\bar{y}$; et soient $\bar{\alpha}$ et $\bar{\beta}$ les coordonnées de ce point G, ρ le rayon vecteur GA et φ l'angle de ce rayon vecteur avec l'axe des x, compté dans le sens de X à Y ; on aura

$$(10)\qquad \begin{aligned} \bar{x} - \bar{\alpha} &= \rho \cos\varphi, \\ \bar{y} - \bar{\beta} &= \rho \sin\varphi : \end{aligned}$$

si l'on pose

$$(11)\qquad \alpha = \frac{\bar{\alpha}}{\mathrm{R}\sin 1''}, \qquad \beta = \frac{\bar{\beta}}{\mathrm{R}\sin 1''},$$

les valeurs ci-dessus de a et b deviendront

$$a = \alpha + \frac{\rho}{\mathrm{R}\sin 1''}\cos\varphi,$$

$$b = \beta + \frac{\rho}{\mathrm{R}\sin 1''}\sin\varphi;$$

enfin, l'expression (8) de ψ deviendra elle-même

$$(12)\qquad \psi = \chi + \frac{\rho}{\mathrm{R}\sin 1''}\cos(h - \varphi) + \alpha\cos h + \beta\sin h.$$

Pour discuter cette expression, nous ferons remarquer que la figure décrite étant sensiblement circulaire, on peut choisir le point G de telle sorte que ρ varie très-peu : alors le mouvement angulaire de ρ différera peu du mouvement en hauteur de l'axe optique de la lunette ; par suite l'angle $h - \varphi$ sera une quantité sensiblement constante : le terme $\frac{\rho\cos(h-\varphi)}{\mathrm{R}\sin 1''}$ n'éprouvera donc que des variations proportionnelles à celles de ρ ou très-petites. Considérons un instant ρ et $h - \varphi$ comme des constantes, il est visible que le centre du cercle était pris pour le point G, ce point G appartiendra à l'axe de rotation : α et β seront la déviation azimutale et l'inclinaison du même axe. Pour interpréter les deux premiers termes de la valeur de ψ, projetons le point A (*fig.* 5) en A_1 sur la direction de CG ; menons par le point G une parallèle GH' à GH : à cause de la petitesse de la distance des points O et G, on aura sensiblement $\widehat{\mathrm{CGH'}} = h$, et par suite $\overline{\mathrm{GA}_1} = \frac{\rho}{\mathrm{R}\sin 1''}\cos(h - \varphi)$; attendu que, sur la sphère, l'arc GA a pour expression $\frac{\rho}{\mathrm{R}\sin 1''}$: on aura d'ailleurs, aux termes près des ordres supérieurs,

$$\overline{\mathrm{CA}_1} = \overline{\mathrm{CA}} = 90° + \chi,$$

par définition : il vient donc

$$\overline{CG} = 90^\circ + \chi + \frac{\rho}{R \sin 1''} \cos(h - \varphi).$$

L'aperçu qui précède ne laisse pas voir le degré d'approximation du résultat obtenu ; nous allons y suppléer par une autre démonstration, et sans faire de restrictions relativement à la variabilité de ρ et $h - \varphi$. Joignons (*fig.* 5) les points O et G, et soient g l'angle GOH, $\varepsilon = \overline{OG}$; nous aurons

$$\cos \overline{GC} = \cos \overline{OC} \cos \varepsilon + \sin \overline{OC} \sin \varepsilon \cos(h - g).$$

D'un autre côté, on a (*fig.* 4), en vertu des équations (11) et aux termes près du troisième ordre,

$$\varepsilon \cos g = \alpha, \quad \varepsilon \sin g = \beta ;$$

substituant ces valeurs dans l'équation précédente où l'on négligera les termes du troisième ordre, il viendra, en vertu de $\overline{OC} = 90^\circ + \psi$, et de ce que GC diffère peu de 90°,

$$-(\overline{GC} - 90^\circ) = -\psi + \alpha \cos h + \beta \sin h :$$

comparant cette relation avec l'équation (12), on en tire

$$\chi + \frac{\rho}{R \sin 1''} \cos(h - \varphi) = \overline{GC} - 90^\circ.$$

Si donc nous considérons la droite SG comme un axe fictif dont α et β soient la déviation et l'inclinaison, et que nous observions que l'excès de la distance de l'axe optique C à l'axe G sur 90° est ce que l'on appelle la collimation dans la théorie ordinaire de la Lunette méridienne, nous pourrons continuer de désigner par collimation l'ensemble des deux premiers termes de l'expression (12) : seulement, dans le cas actuel, cette collimation sera variable, à raison des variations de ρ et $h - \varphi$.

De ce rapprochement avec la théorie ordinaire de la Lunette méridienne, nous pouvons conclure que, pour avoir égard à l'irrégularité de forme des tourillons, il suffit de considérer la collimation comme variable avec la hauteur de la lunette au-dessus de l'horizon, et d'avoir égard, dans la réduction des observations, aux conséquences de cette variabilité.

Dans ce qui précède, les coordonnées ξ, ξ', η, η' sont comptées de l'origine S ; mais, dans la pratique, ces coordonnées seront rapportées à des origines différentes.

Si l'on veut que les mêmes lettres continuent de désigner les coordonnées mesurées, il faudra leur ajouter des constantes ; soient donc $\bar{p}$ et $\bar{q}$ les différences des constantes relatives aux ξ, ξ' et aux η et η', on aura

$$\bar{x} = \xi' - \xi + \bar{p}, \quad \bar{y} = \eta' - \eta + \bar{q} :$$

si l'on pose dès lors

$$(13) \qquad -p = \bar{p} - \bar{\alpha}, \quad -q = \bar{q} - \bar{\beta},$$

$$(14) \qquad x = \xi' - \xi, \quad y = \eta' - \eta,$$

il viendra

$$\bar{x} - \bar{\alpha} = x - p, \quad \bar{y} - \bar{\beta} = y - q ;$$

d'où, en vertu des équations (10),

$$(15) \qquad \begin{aligned} \rho \cos \varphi &= x - p, \\ \rho \sin \varphi &= y - q. \end{aligned}$$

Enfin, si l'on pose encore

$$(16) \qquad \text{P.R} \sin 1'' = \rho \cos (h - \varphi),$$

il viendra, en vertu des précédentes relations,

$$(17) \qquad \text{P.R} \sin 1'' = (x - p) \cos h + (y - q) \sin h,$$

et, d'après l'équation (16), la valeur (12) de ψ prendra la forme

$$(18) \qquad \psi = \chi + \text{P} + \alpha \cos h + \beta \sin h.$$

Il reste à déduire P, ou plutôt sa partie variable, des mesures des coordonnées ξ', ξ, η', η rapportées à des origines quelconques. Remarquons d'abord que les coordonnées $\bar{\alpha}$ et $\bar{\beta}$ du point G étant arbitraires, les quantités p et q, qui n'en diffèrent que par des constantes, sont arbitraires au même titre que $\bar{\alpha}$ et $\bar{\beta}$.

Supposant que les observations soient faites à diverses hauteurs h qui divisent exactement la circonférence, et que les observations s'étendent ainsi à la circonférence entière, N étant d'ailleurs le nombre de ces observations ; nous déterminerons p et q par les conditions

$$(19) \qquad p = \frac{1}{\text{N}} \Sigma x, \quad q = \frac{1}{\text{N}} \Sigma y.$$

Les valeurs de P s'obtiendront alors par l'équation (17).

Prenons la moyenne P_m de toutes les valeurs obtenues, ou soit

(20) $$P_m = \frac{1}{N}\Sigma P;$$

nous pourrons poser

(21) $$\delta c = P - P_m,$$
$$c = \chi + P_m,$$

après les explications qui ont été données sur la signification des deux premiers termes de la valeur (12) de ψ; et il viendra, en vertu de l'équation (18),

(22) $$\psi = \alpha \cos h + \beta \sin h + c + \delta c,$$

c désignant la collimation moyenne, et δc la correction à y appliquer.

La détermination de δc s'obtiendra à l'aide des formules (14), (19), (17), (20) et (21).

On y parviendrait également au moyen d'une opération graphique.

Supposons construite la courbe dont les coordonnées sont x et y, et que l'on marque la position du point (p, q) : si l'on mène par ce même point une droite dans la direction h, et que l'on projette sur cette droite le rayon vecteur ρ joignant les points (p, q) et (x, y), la projection obtenue sera égale à la quantité PR sin I″, équation (16). On peut donc suppléer au calcul de P par une construction très-simple.

Présentons maintenant quelques remarques :

1° Les coordonnées p et q sont celles du centre de gravité du contour de la figure (x, y) : on se convaincra aisément que ces coordonnées ne varieront pas, lorsqu'on changera la situation des deux points qui terminent la droite A, en s'astreignant à déterminer un nombre suffisant de points de ce contour.

Soient, en effet, Δ la distance du point déplacé, à sa place primitive, ϖ l'angle de Δ avec la direction de la lunette mesuré dans le sens de h; ξ_1 et η_1 les nouvelles coordonnées, on aura, entre celles-ci et les anciennes, les relations

$$\xi_1 = \xi + \Delta \cos(h + \varpi),$$
$$\eta_1 = \eta + \Delta \sin(h + \varpi).$$

Si donc on fait la somme de ces quantités étendue à toutes les observations que l'on suppose correspondre à un partage de la circonférence entière en parties égales, on aura

$$\Sigma\xi_1 = \Sigma\xi, \quad \Sigma\eta_1 = \Sigma\eta;$$

et les valeurs de p et de q resteront les mêmes qu'auparavant.

Les quantités $\bar{\alpha}$ et $\bar{\beta}$ ou α et β qui ne dépendent, suivant les équations (13), que de p et q et des constantes $\bar{p}$ et $\bar{q}$, détermineront ainsi la direction d'un même axe fictif G, dont la situation, relativement à l'axe optique C, fait connaître la collimation.

Il est donc démontré que le choix de la droite A n'a aucune influence sur la détermination de la déviation azimutale, de l'inclinaison et de la collimation.

2° De ce que les coordonnées relatives $\bar{p}$ et $\bar{q}$ des origines des coordonnées d'où se comptent les ξ, ξ', η et η' ont disparu des équations qui servent au calcul de δc, il résulte que ces origines pourront sans inconvénient recevoir un déplacement entre une série de déterminations et une autre série.

Détermination de l'inclinaison, de la collimation et de la différence d'azimut de la Lunette méridienne et des collimateurs.

L'hypothèse admise sur la figure irrégulière des tourillons ne permet plus d'employer le niveau pour mesurer l'inclinaison, ni le retournement pour déterminer la collimation. Il est nécessaire tout d'abord que la Lunette soit pourvue en son foyer d'un fil micrométrique mobile dans le sens parallèle à l'axe de rotation. Nous supposerons, pour fixer les idées, que la tête de vis du micromètre soit du côté de l'Est, ou l'origine Ω des tours à l'Ouest. Cette vis micrométrique aura permis de déterminer la position des fils horaires, et spécialement celle du fil réel ou fictif considéré jusqu'ici : nous désignerons par ν la position de ce fil, c'est-à-dire le nombre de tours que l'on compte au micromètre quand le fil mobile est en coïncidence avec ce même fil. La valeur angulaire des tours de vis sera d'ailleurs désignée par k; si la direction de la tête de vis était de sens contraire à celui que nous avons supposé, il suffirait de changer le signe de k dans les formules où entrera cette lettre. Il est encore nécessaire, pour l'intelligence de ce qui va suivre, de se rappeler que ψ est la quantité dont l'angle formé par la direction de l'Ouest et l'axe optique (côté de l'objectif) surpasse l'angle droit. La quantité δc variant avec la hauteur h, il en est de même de l'angle ψ, équation (22) : pour distinguer les valeurs particulières de ψ et δc, nous les affecterons simultanément des indices 0, 1, 2 et 3, suivant que l'angle h sera respectivement égal à 0, 1, 2, 3 droits.

Nous dirons successivement quels sont les appareils accessoires au moyen desquels on parvient à effectuer les déterminations que nous avons en vue.

Pointé au Nadir. — L'emploi du bain de mercure pour l'observation du Nadir va nous fournir une solution facile. Soient (*fig.* 6) : C le centre optique de l'objectif dirigé vers le Nadir, et, dans le plan focal, L le lieu où l'image du fil mobile

réfléchie par la surface du mercure coïncide avec le fil lui-même; la droite LC sera verticale. Soient : l la lecture correspondante du micromètre; V le lieu du fil qui, étant joint avec le centre optique de l'objectif, détermine l'axe optique, et dont la position est ν. Menons une horizontale EO, ou une perpendiculaire à LC; d'après ce que nous avons rappelé, l'angle ψ, qui devient ici ψ_s, est égal à l'angle LCV, et, bien que l'axe de la vis puisse n'être pas exactement horizontal, on a, aux quantités près du troisième ordre,

$$\psi_s = k(l - \nu).$$

Mais l'équation (22) devient alors

$$\psi_s = -\beta + c + \delta c_s;$$

on a donc

(23) $$\beta = k(\nu - l) + c + \delta c_s,$$

équation qui fera connaître β quand c sera déterminé.

Emploi de deux collimateurs horizontaux. — L'un de ces collimateurs pourra avoir un très-long foyer, de manière à pouvoir être utilement employé comme mire méridienne; l'autre servira exclusivement à la détermination de la collimation et sera, à cet effet, pourvu d'un fil mobile. On pointera d'abord le second collimateur sur le premier et l'on désignera par A la déviation azimutale commune des deux collimateurs, qui sera positive quand le côté austral de la ligne de collimation déviera du méridien vers l'Est.

La lunette étant supposée pointée sur le collimateur du Sud, soient M (*fig.* 7) le lieu de l'image dans le plan focal, m la position de cette image; la ligne CM fera l'angle A avec la ligne méridienne MM'. Soit V le lieu du fil de position ν et prolongeons les droites MM', CV, jusqu'à leur rencontre en U; menons par le point U la ligne EO dans la direction Est-Ouest ou perpendiculairement à MM', l'angle CUM' sera précisément l'angle ψ, qui deviendra ici ψ_0; et, si l'on observe que l'angle en C, malgré le défaut d'orientation exacte de la tête de vis, a pour expression $k(\nu - m)$, on aura

$$A - \psi_0 = k(\nu - m).$$

D'un autre côté, suivant l'équation (22), on a

$$\psi_0 = \alpha + c + \delta c_0;$$

d'où

(24) $$A = \alpha + k(\nu - m) + c + \delta c_0.$$

Supposons maintenant la lunette pointée (*fig.* 8) sur le collimateur du Nord, et soient N le lieu de l'image dans le plan focal, n la position de cette image; la ligne CN fera l'angle A avec la ligne méridienne CC'; soient encore V et ν le lieu et la position du fil considéré, l'angle C'CV sera l'angle ψ_2, car la droite VC fait, avec le côté O d'une ligne Est-Ouest EO, l'angle $90° + \psi_2$; d'autre part, l'angle NCV a pour mesure $k(n - \nu)$, malgré l'inexactitude de l'orientation de la vis micrométrique : il s'ensuit

$$A + \psi_2 = k(n - \nu);$$

mais, suivant l'équation (22), on a

$$\psi_2 = -\alpha + c + \delta c_2;$$

il vient donc

$$(25) \qquad A = \alpha + k(n - \nu) - c - \delta c_2.$$

Des équations (24) et (25) on tire les valeurs suivantes :

$$(26) \qquad c = k\left(\frac{m+n}{2} - \nu\right) - \frac{1}{2}(\delta c_0 + \delta c_2),$$

$$(27) \qquad A - \alpha = k\left(\frac{n-m}{2}\right) + \frac{1}{2}(\delta c_0 - \delta c_2),$$

dont la première fournit la collimation moyenne c du fil de position ν.

Désignant par ν_0 la position d'un fil idéal dont la collimation serait nulle, on tirera de l'équation (26)

$$(27\ bis) \qquad \nu_0 = \frac{1}{2}(m + n) - \frac{1}{2}\frac{\delta c_0 + \delta c_2}{k}.$$

L'équation (23) peut servir à donner l'inclinaison β, puisque c est connu : on obtiendrait une autre valeur de β en y substituant la valeur précédente de c; ce qui donnerait

$$(28) \qquad \beta = k\left(\frac{m+n}{2} - l\right) + \delta c_3 - \frac{1}{2}(\delta c_0 + \delta c_2).$$

Il sera cependant préférable de s'en tenir généralement à l'équation (23), attendu que c et ν résulteront le plus souvent de nombreuses déterminations qui en fixeront plus exactement la valeur qu'une détermination isolée de $m + n$. Par la même raison, il sera préférable encore de déterminer $A - \alpha$ au moyen de celle des deux expressions (24) et (25) qui répond à la mire méridienne, plutôt que d'employer la formule (27) : on évitera ainsi de pointer le second collimateur sur la mire chaque fois que l'on voudra obtenir $A - \alpha$.

Connaissant A — α, β et c, ainsi que les valeurs particulières de δc, on déterminera α par la combinaison des passages supérieurs et inférieurs des circompolaires, et la valeur de A s'ensuivra; seulement il faudra substituer à l'expression ordinaire des ascensions droites en fonction des données de l'observation, la suivante que l'on obtient en transportant la valeur (22) dans l'équation (9)

$$(29)\qquad \mathcal{R} = t + C_p \pm \frac{1}{\sin \varphi} (\alpha \cos h + \beta \sin h + c - x + \delta c). \qquad \text{Pass.} \begin{cases} \text{sup.} \\ \text{inf.} \end{cases}$$

Nous supprimons ici le diviseur 15 pour plus de simplicité; ce qui revient à supposer que α, β, c et δc soient, comme x, exprimés en secondes de temps.

L désignant toujours la latitude du lieu, si l'on pose, suivant l'usage,

$$(30)\qquad \begin{aligned} m &= +\alpha \sin L + \beta \cos L, \\ n &= -\alpha \cos L + \beta \sin L, \end{aligned}$$

on transforme l'équation (29) en la formule suivante :

$$(31)\qquad \mathcal{R} = t + C_p + m \pm n \cot \varphi \pm \frac{c - x + \delta c}{\sin \varphi}. \qquad \text{Pass.} \begin{cases} \text{sup.} \\ \text{inf.} \end{cases}$$

Cette formule et l'équation (29) ne diffèrent des formules connues qu'en ce que c est accompagné de δc.

On voit, en résumé, que le procédé pour avoir égard à l'effet de l'irrégularité de figure des tourillons consiste à déterminer les valeurs de δc correspondantes aux diverses hauteurs h, puis celles de c, β et A — α, comme nous l'avons indiqué; alors on fait usage, pour la réduction des observations, de la formule connue et modifiée seulement en ce que l'on y remplace c par $c + \delta c$.

De la théorie que nous venons d'exposer, il semblerait résulter que la perfection du travail des tourillons d'une Lunette méridienne est à peu près indifférente s'ils jouissent d'ailleurs, ainsi que les coussinets, des propriétés physiques nécessaires pour conserver leur forme pendant un assez long espace de temps. De même qu'on a renoncé à exiger des artistes la construction de cercles exempts d'erreurs de division, ne pourrait-on pas accepter un instrument des passages dont les tourillons seraient à peu près cylindriques et suffisamment résistants, puisque les corrections relatives à leur irrégularité jouent ici le même rôle que celles des erreurs de division dans les cercles muraux?

Cette conclusion n'est pas admissible dans la pratique; car, à raison de la dilatation de l'axe de rotation, il arrive que la tranche d'un tourillon qui, à un instant donné, est en contact avec une certaine tranche d'un coussinet, cesse bientôt de répondre à cette dernière, et le mode de rotation se trouve modifié si les coussinets

n'affectent pas une forme rigoureusement cylindrique. Or, la matière des coussinets est toujours moins dure que celle des tourillons; au bout de quelques jours, si la température ne varie pas trop, les coussinets prennent une forme qui est, pour ainsi dire, l'empreinte des tourillons, et il est visible que si cette empreinte n'est pas cylindrique, une variation de position mutuelle produira un changement dans le mode de rotation.

Il est donc de la plus grande importance que la figure des tourillons atteigne un degré de perfection qui ne laisse rien à désirer : heureusement quelques artistes, en très-petit nombre il est vrai, paraissent y avoir réussi.

Description des appareils employés à l'Observatoire impérial de Paris, dans la mesure des coordonnées de points situés aux extrémités de l'axe de rotation.

Les extrémités des tourillons ont été creusées sur une profondeur d'environ $\frac{1}{3}$ de millimètre, de manière à former une cavité cylindrique de 27 à 28 millimètres de diamètre. Dans cette cavité, on a ajusté à simple frottement un disque en laiton, au centre duquel est implanté un petit tube de verre présentant une saillie d'un peu moins de 1 centimètre.

Vers le centre du tube, la matière du verre présente un vide qui, vu au microscope, a l'aspect d'une tache circulaire ou d'un point ayant un diamètre extrêmement faible.

Le système du disque et du tube a été consolidé sur les tourillons au moyen d'une matière résineuse dite *arcanson*, que l'on a coulée à chaud sur tout le pourtour du disque.

D'autre part on a fixé, au moyen de quatre vis, sur les massifs de bronze qui servent de base aux coussinets fixes, deux supports formant la monture des microscopes à l'aide desquels on s'est proposé d'observer le déplacement des points. La dimension de ces microscopes, comprise entre le système objectif et le plan des fils du micromètre, est de 46 centimètres. Ces fils, au nombre de deux pour chaque microscope, sont rectangulaires; ils sont l'un et l'autre portés sur un châssis spécial et sont rendus mobiles au moyen d'une vis micrométrique. Deux peignes également rectangulaires servent à lire les nombres entiers de tours de vis, tandis que les tambours des têtes de vis permettent d'apprécier les millièmes de tour. Les microscopes grossissent environ cent fois.

Les appareils que nous venons de décrire ont été construits par M. Brunner.

Les têtes de vis ont été disposées de la manière suivante :

Microscope occidental...	Tête de vis au Nord. Tête de vis au Nadir.
Microscope oriental.....	Tête de vis au Sud. Tête de vis au Zénith.

Voici les motifs de cette disposition : les images produites dans le plan des fils étant renversées, leurs mouvements vers le Nord correspondent à des déplacements des points vers le Sud; il en résulte que la vis Nord du microscope occidental peut mesurer les abscisses ξ' que l'on est convenu de considérer comme positives vers le Sud; la vis nadirale du même microscope fournira de même les ordonnées η' positives vers le zénith. Quant au microscope oriental, on a disposé à dessein les vis en sens contraire de celles du premier, afin de pouvoir changer en sommes les différences $\xi' - \xi$ et $\eta' - \eta$, équations (14) : ainsi ξ et η désignant les coordonnées mesurées au microscope oriental avec les vis dirigées comme il vient d'être dit, les formules (14) se changent en

$$x = \xi' + \xi, \qquad y = \eta' + \eta.$$

Ceci posé, disons maintenant comment on est parvenu à orienter les microscopes. Les tubes de ces appareils peuvent recevoir seulement deux mouvements, l'un parallèle à l'axe, l'autre autour de l'axe. Les objectifs n'ont pas de mouvement de réglage, comme dans les microscopes des cercles muraux, en sorte qu'ils restent à une distance constante des fils micrométriques. Ayant donc mis les microscopes en présence des points à observer, on a commencé par régler leur distance en amenant les images des points dans le plan des fils. On a ensuite enlevé la Lunette, et l'on a établi dans le plan vertical, occupé antérieurement par l'un des petits points, un pendule formé par un fil d'araignée et une petite boule de cire : la situation de ce pendule a été déterminée par la condition que l'image du fil d'araignée se produisît dans le plan des fils du micromètre. Alors on a tourné le tube du microscope, de manière à amener le parallélisme de l'image du fil du pendule avec le fil micrométrique vertical; ce parallélisme pouvait d'ailleurs se traduire par une coïncidence, puisqu'on pouvait déplacer le fil micrométrique parallèlement à lui-même. La perpendicularité des deux fils micrométriques ayant été obtenue par construction avec toute la précision désirable, nous devons considérer le mode de réglage qui vient d'être décrit comme très-suffisant pour l'objet que nous avons en vue.

Valeurs des tours des vis micrométriques. — On s'est servi d'une petite plaque de verre divisée en dixièmes de millimètre, que l'on a substituée au pendule employé dans l'opération précédente; les traits étant dirigés parallèlement à l'un des fils du micromètre, on pointait ce fil sur 7, 8 ou 9 traits consécutifs. La valeur de 1 tour en dixièmes de millimètre a été déduite de ces observations, en suivant le procédé indiqué, Tome XII des *Observations de l'Observatoire impérial,* pour la détermination de la valeur des parties des niveaux.

Voici les résultats obtenus, que nous exprimerons en prenant pour unité la moyenne d des intervalles des divisions tracées sur la plaque de verre ou le $\frac{1}{10}$ de millimètre :

		Microscope.	Vis horizontale.	Vis verticale.	Observ.
1859.	Nov. 4.	Occidental...	$1^t = 0^d,4410$,	$1^t = 0^d,4403$,	YV
			$1^t = 0^d,4408$,		
		Oriental.....	$1^t = 0^d,4425$,	$1^t = 0^d,4412$,	YV
1860.	Mars 30.	Occidental...	$1^t = 0^d,4407$,		TH
			$1^t = 0^d,4395$,	$1^t = 0^d,4405$	FL
		Oriental.....	$1^t = 0^d,4421$,	$1^t = 0^d,4415$,	TH

On voit ainsi qu'à $\frac{1}{440}$ près les quatre vis donnent la même valeur des tours; on peut remplacer les valeurs individuelles par leur moyenne, ce qui sera très-suffisant, ainsi qu'on en jugera plus loin.

En prenant la moyenne des tours entre les valeurs relatives à un même microscope, on trouve :

		Microscope occidental.	Microscope oriental.
1859.	Nov. 4.	$1^t = 0^d,4406$,	$1^t = 0^d,4418$.
1860.	Mars 30.	$1^t = 0^d,4403$,	$1^t = 0^d,4418$.

La parfaite conformité des nombres obtenus à ces deux époques montre que l'on avait réussi à régler exactement la position des microscopes. La faible différence des diverses valeurs obtenues dans chaque série montre à la fois la parfaite conformité des vis micrométriques et l'égalité des distances focales : un tel résultat ne pouvait être obtenu que par un artiste d'une grande habileté.

En vertu de ce que nous avons dit plus haut, nous substituerons aux diverses valeurs précédentes la moyenne $0^d,441$. Or, on a trouvé, par une mesure directe de l'intervalle des petits points, $1^m,4725$, ou $R = 14725^d$; il s'ensuit que la valeur angulaire de 1 tour des vis est égal à $6'',174$ ou $0^s,4117$: c'est le facteur par lequel les quantités x et y devront être multipliées pour être transformées en secondes de temps.

Observations et réductions. — Les séries d'observations ont toujours embrassé une circonférence entière; elles ont été faites par deux observateurs, un à chaque microscope, qui ont travaillé sans discontinuité : dans les premières séries, on a fait varier la hauteur de la Lunette de 10° en 10°; dans les autres, on opérait de 5° en 5°. On a commencé par s'assurer que les valeurs de x et y, relatives à une même hauteur, redevenaient les mêmes après qu'on avait fait tourner la Lunette d'un ou plusieurs tours, et qu'on la ramenait à cette hauteur par des

mouvements dans un sens et dans le sens opposé. Cette épreuve a confirmé l'opinion que l'on avait de la parfaite stabilité de la Lunette sur ses coussinets.

En outre, dans chaque série commencée à la hauteur zéro, après avoir achevé chaque quart de circonférence, on revenait au zéro, et on y faisait une nouvelle mesure des x et y. La concordance des résultats montrait que l'on pouvait compter sur la stabilité du système. Il en a été ainsi lors des observations faites au commencement de novembre 1859, où la température variait très-peu; mais lors des observations de la fin de mars et du commencement d'avril 1860, les cinq valeurs des coordonnées obtenues pour la hauteur zéro, ont présenté une marche évidemment progressive : on en a alors déduit de petites corrections qui ont été appliquées aux mesures, afin de les ramener à la simultanéité.

Pour simplifier, nous ne donnerons pas le détail des valeurs observées ξ', ξ; η', η, ni même leurs sommes x et y, mais seulement ces mêmes sommes diminuées de leurs valeurs moyennes p et q, ou les quantités $x - p$, $y - q$ de la formule (17).

Pareillement, au lieu de présenter les valeurs de P déduites de cette formule (17), nous donnerons immédiatement les excès de P sur la valeur moyenne P_m, ou les valeurs de δc, équation (21).

A l'aide des quantités p, q et P_m que nous rapporterons, on reproduirait les quantités x, y et P elles-mêmes.

Voici d'abord les résultats obtenus en novembre 1859, la Lunette étant dans la position inverse :

Étude des tourillons de la Lunette méridienne.

Position inverse.

1859 ♀ NOV. 4 (nuit). — OBSERVATEURS : ISMAÏL ET THIRION.

$p = 13^t{,}216$; $q = 8^t{,}728$; $P_m = -0^s{,}056$.

	$x-p$	$y-q$	δc	h	$x-p$	$y-q$	δc	h	$x-p$	$y-q$	δc	h	$x-p$	$y-q$	δc
°	t	t	s	°	t	t	s	°	t	t	s	°	t	t	s
[illegible]	−0,136	+1,422	0,000	90	−1,386	−0,158	−0,009	180	+0,114	−1,388	+0,009	270	+1,404	+0,152	−0,007
[illegible]	−0,396	+1,382	−0,005	100	−1,346	−0,358	+0,007	190	+0,344	−1,368	+0,014	280	+1,364	+0,382	−0,001
[illegible]	−0,606	+1,272	+0,001	110	−1,236	−0,628	−0,013	200	+0,584	−1,278	+0,010	290	+1,254	+0,572	+0,012
[illegible]	−0,816	+1,162	+0,004	120	−1,096	−0,818	−0,009	210	+0,754	−1,158	+0,026	300	+1,144	+0,832	−0,004
[illegible]	−1,006	+1,002	+0,004	130	−0,926	−0,998	−0,014	220	+0,974	−0,988	+0,010	310	+0,984	+0,992	+0,004
[illegible]	−1,156	+0,772	−0,006	140	−0,756	−1,138	−0,007	230	+1,154	−0,818	+0,008	320	+0,784	+1,192	−0,003
[illegible]	−1,266	+0,562	−0,005	150	−0,536	−1,258	−0,012	240	+1,294	−0,558	−0,002	330	+0,554	+1,292	−0,013
[illegible]	−1,356	+0,352	+0,001	160	−0,366	−1,348	+0,008	250	+1,354	−0,388	+0,015	340	+0,324	+1,362	−0,010
[illegible]	−1,376	+0,082	−0,009	170	−0,126	−1,398	+0,007	260	+1,424	−0,128	+0,006	350	+0,084	+1,412	−0,011
[illegible]	−1,386	−0,158	−0,009	180	+0,114	−1,388	+0,009	270	+1,404	+0,152	−0,007	0	−0,136	+1,422	0,000

Étude des tourillons de la Lunette méridienne.

POSITION INVERSE. — *Première situation des points.*

1859. — OBSERV.	♄ NOV. 5 (jour). LÉPISSIER ET THIRION.			♂ NOV. 8 (jour). FOLAIN ET THIRION.			☿ NOV. 9 (jour) (²). FOLAIN ET THIRION.			♃ NOV. 10 (jour). FOLAIN ET THIRION.		
(¹)	13ᵗ,247	8ᵗ,765	−0ˢ,057	13ᵗ,209	8ᵗ,745	−0ˢ,058	13ᵗ,000	8ᵗ,583	−0ˢ,144	13ᵗ,040	8ᵗ,554	−0ˢ,139
h	$x-p$	$y-q$	δc	$x-p$	$y-q$	δc	$x-p$	$y-q$	δc	$x-p'$	$y-q$	δc
°	t	t	s	t	t	s	t	t	s	t	t	s
0				−0,159	+1,395	−0,007	−0,34	+0,427	+0,004	−0,33	+0,446	+0,003
5	−0,287	+1,365	−0,012	−0,288	+1,386	−0,010				−0,39	+0,416	−0,006
10				−0,409	+1,345	−0,011	−0,41	+0,357	+0,004	−0,42	+0,376	−0,005
15	−0,517	+1,315	−0,009	−0,518	+1,276	−0,012				−0,44	+0,346	+0,001
20				−0,639	+1,255	−0,012	−0,48	+0,276	−0,003	−0,46	+0,276	0,000
25	−0,697	+1,195	+0,004	−0,708	+1,176	−0,002				−0,50	+0,236	−0,007
30				−0,819	+1,115	−0,003	−0,51	+0,187	0,000	−0,51	+0,206	−0,001
35	−0,827	+1,045	+0,024	−0,898	+1,036	0,000				−0,51	+0,146	+0,001
40				−0,979	+0,955	+0,001	−0,55	+0,107	−0,002	−0,53	+0,116	+0,003
45	−0,977	+0,885	+0,030	−1,058	+0,866	+0,002				−0,54	+0,066	+0,001
50				−1,149	+0,785	+0,003	−0,56	+0,016	+0,001	−0,54	+0,016	+0,001
55	−1,157	+0,675	+0,012	−1,218	+0,686	+0,001				−0,53	−0,034	+0,002
60				−1,259	+0,565	+0,001	−0,55	−0,093	−0,002	−0,55	−0,094	−0,008
65	−1,297	+0,435	−0,006	−1,308	+0,446	−0,003				−0,53	−0,134	−0,003
70				−1,309	+0,305	−0,008	−0,53	−0,183	−0,002	−0,50	−0,184	−0,002
75	−1,317	+0,185	−0,009	−1,338	+0,186	−0,010				−0,49	−0,214	+0,002
80				−1,329	+0,075	−0,008	−0,48	−0,264	+0,003	−0,47	−0,264	−0,002
85	−1,337	−0,055	−0,014	−1,348	−0,054	−0,012				−0,45	−0,334	−0,014
90				−1,349	−0,195	−0,022	−0,42	−0,373	−0,010	−0,43	−0,374	−0,015
95	−1,287	−0,295	−0,018	−1,318	−0,274	−0,007				−0,39	−0,394	−0,009
100				−1,279	−0,405	−0,015	−0,36	−0,443	−0,010	−0,37	−0,424	−0,007
105	−1,257	−0,535	−0,022	−1,258	−0,504	−0,009				−0,33	−0,454	−0,007
110				−1,209	−0,615	−0,009	−0,29	−0,504	−0,010	−0,30	−0,474	−0,003
115	−1,167	−0,715	−0,007	−1,158	−0,694	+0,001				−0,25	−0,504	−0,006
120				−1,109	−0,795	−0,007	−0,21	−0,523	+0,001	−0,21	−0,544	−0,012
125	−1,027	−0,885	0,000	−1,028	−0,894	−0,001				−0,16	−0,554	−0,010
130				−0,959	−0,975	+0,003	−0,12	−0,543	+0,005	−0,11	−0,554	−0,007
135	−0,867	−1,045	+0,005	−0,878	−1,044	+0,009				−0,07	−0,544	+0,001
140				−0,779	−1,105	+0,013	−0,02	−0,544	+0,006	−0,03	−0,564	−0,001
145	−0,687	−1,195	+0,007	−0,688	−1,184	+0,010				+0,02	−0,574	−0,004
150				−0,569	−1,225	+0,008	+0,06	−0,553	+0,007	+0,08	−0,554	−0,004
155	−0,477	−1,275	+0,013	−0,478	−1,294	+0,011				+0,12	−0,564	−0,004
160				−0,359	−1,345	+0,007	+0,15	−0,533	+0,013	+0,14	−0,524	+0,011
165	−0,237	−1,355	+0,007	−0,248	−1,354	+0,013				+0,16	−0,514	+0,020
170				−0,129	−1,375	+0,012	+0,25	−0,494	+0,008	+0,20	−0,494	+0,023
175	−0,007	−1,395	+0,010	+0,002	−1,394	+0,007				+0,25	−0,484	+0,020
180				+0,121	−1,385	+0,008	+0,33	−0,463	+0,008	+0,29	−0,444	+0,019

(¹) Les nombres qui figurent au-dessous des noms des observateurs sont les valeurs respectives de p, q et P_m.

(²) On a déplacé les points, par rapport aux tourillons, d'environ un demi-tour, afin d'éliminer l'effet d'une inégalité, dans le pourtour des points, qui aurait pu, sous l'influence de l'éclairage, produire un transport apparent du centre des images.

Étude des tourillons de la Lunette méridienne.

POSITION INVERSE. — *Première situation des points.* (Suite.)

1859. — OBSERV.	♄ NOV. 5 (jour). LÉPISSIER ET THIRION.			♂ NOV. 8 (jour). FOLAIN ET THIRION.			☿ NOV. 9 (jour) (²). FOLAIN ET THIRION.			♃ NOV. 10 (jour). FOLAIN ET THIRION.		
(¹)	13,247	8,765	−0,057	13,209	8,745	−0,058	13,000	8,583	−0,144	13,040	8,554	−0,139
h	$x-p$	$y-q$	δc	$x-p$	$y-q$	δc	$x-p$	$y-q$	δc	$x-p$	$y-q$	δc
°	t	t	s	t	t	s	t	t	s	t	t	s
180				+0,121	−1,385	+0,008	+0,33	−0,463	+0,008	+0,29	−0,444	+0,019
185	+0,213	−1,355	+0,019	+0,252	−1,374	+0,004				+0,33	−0,414	+0,019
190				+0,361	−1,335	+0,008	+0,42	−0,373	+0,001	+0,37	−0,374	+0,015
195	+0,453	−1,285	+0,014	+0,482	−1,284	+0,003				+0,40	−0,344	+0,017
200				+0,591	−1,255	+0,006	+0,48	−0,314	+0,002	+0,44	−0,304	+0,012
205	+0,683	−1,185	+0,008	+0,692	−1,194	+0,008				+0,46	−0,264	+0,013
210				+0,791	−1,125	+0,007	+0,52	−0,213	+0,003	+0,48	−0,204	+0,010
215	+0,873	−1,055	+0,011	+0,892	−1,044	+0,004				+0,52	−0,174	+0,004
220				+0,981	−0,965	+0,003	+0,53	−0,113	+0,006	+0,53	−0,114	+0,002
225	+1,073	−0,875	0,000	+1,062	−0,884	+0,010				+0,53	−0,064	+0,004
230				+1,131	−0,775	+0,005	+0,56	−0,034	+0,007	+0,54	−0,004	−0,003
235	+1,213	−0,675	−0,001	+1,212	−0,684	+0,002				+0,54	+0,046	−0,004
240				+1,271	−0,565	−0,002	+0,55	+0,077	+0,004	+0,55	+0,086	−0,005
245	+1,283	−0,455	+0,004	+1,302	−0,464	+0,005				+0,55	+0,126	−0,004
250				+1,341	−0,355	+0,006	+0,53	+0,167	+0,004	+0,54	+0,156	+0,003
255	+1,383	−0,225	−0,002	+1,382	−0,244	+0,008				+0,51	+0,216	−0,001
260				+1,391	−0,125	+0,010	+0,49	+0,246	+0,010	+0,50	+0,256	−0,001
265	+1,383	+0,005	+0,004	+1,392	+0,006	+0,006				+0,48	+0,276	+0,009
270				+1,391	+0,115	+0,011	+0,45	+0,357	−0,003	+0,47	+0,306	+0,013
275	+1,333	+0,295	−0,016	+1,362	+0,256	+0,002				+0,43	+0,386	−0,004
280				+1,341	+0,355	+0,010	+0,40	+0,437	−0,004	+0,41	+0,416	−0,001
285	+1,263	+0,505	−0,010	+1,292	+0,476	+0,006				+0,37	+0,436	+0,004
290				+1,241	+0,595	+0,002	+0,30	+0,486	−0,002	+0,33	+0,456	+0,009
295	+1,143	+0,705	−0,007	+1,202	+0,726	−0,004				+0,27	+0,506	−0,003
300				+1,141	+0,835	−0,004	+0,22	+0,527	+0,001	+0,23	+0,526	−0,002
305	+1,023	+0,905	−0,007	+1,062	+0,926	−0,003				+0,19	+0,536	+0,003
310				+0,971	+0,995	+0,001	+0,10	+0,597	−0,019	+0,12	+0,556	−0,005
315	+0,853	+1,065	−0,005	+0,872	+1,086	−0,005				+0,09	+0,586	−0,006
320				+0,771	+1,155	−0,004	+0,01	+0,616	−0,016	+0,04	+0,606	−0,008
325	+0,663	+1,195	−0,002	+0,672	+1,226	−0,005				−0,02	+0,616	−0,013
330				+0,551	+1,275	−0,009	−0,10	+0,617	−0,018	−0,08	+0,606	−0,014
335	+0,423	+1,315	−0,013	+0,462	+1,326	−0,001				−0,13	+0,586	−0,011
340				+0,311	+1,375	−0,015	−0,17	+0,567	−0,002	−0,16	+0,556	−0,001
345	+0,203	+1,375	−0,008	+0,212	+1,396	−0,007				−0,21	+0,556	−0,004
350				+0,081	+1,415	−0,010	−0,26	+0,506	+0,002	−0,25	+0,526	−0,001
355	−0,067	+1,385	−0,020	−0,058	+1,396	−0,016				−0,30	+0,486	−0,001
0				−0,159	+1,395	−0,007	−0,34	+0,427	+0,004	−0,33	+0,446	+0,003

(¹) **Les nombres qui figurent au-dessous des noms des observateurs sont les valeurs respectives de p, q et P_m.**

(²) **On a déplacé les points, par rapport aux tourillons, d'environ un demi-tour, afin d'éliminer l'effet d'une inégalité, dans le pourtour des points, qui aurait pu, sous l'influence de l'éclairage, produire un transport apparent du centre des images.**

Les trois premières valeurs de P_m présentent un accord extrêmement remarquable, ce qui prouve que les petits points ont absolument conservé leurs positions. Les deux dernières ne présentent qu'une assez légère différence, $0^s,005$.

Les discordances que l'on remarque dans les valeurs de δc, fournies par chacune des séries d'observations, paraissent tenir au défaut d'uniformité du contour des petits points : l'aspect des images variait avec la hauteur de la Lunette, et ces variations d'aspect ont paru plus considérables sous l'influence d'un éclairage artificiel qu'à la simple lumière du jour.

Pour ces motifs, dans la combinaison que nous allons former, nous ferons abstraction de la série des observations du 4 novembre qui ont été faites pendant la nuit.

A l'effet d'éliminer l'influence du mode d'éclairage indiquée ci-dessus, nous combinerons les observations faites dans deux positions opposées des petits points. Ainsi nous prendrons les moyennes des valeurs de δc correspondantes aux séries complètes des 8 et 10 novembre : nous combinerions de la même manière les séries du 5 et du 9, si les hauteurs h des deux séries se correspondaient ; mais nous pouvons admettre que les valeurs vraies de δc doivent présenter une certaine continuité, et que si les observations ne la manifestent pas complétement, cela doit principalement tenir aux erreurs dont elles sont affectées. De cette manière, et aux erreurs près des observations, nous pourrons prendre, relativement à $h = 10^\circ$, série du 5 novembre, la moyenne des valeurs de δc correspondant à 5° et 15°. Dans la série du 9 nous procéderons d'une manière analogue. Ayant ainsi complété ces deux séries, nous les combinerons par voie de simples moyennes.

Les combinaisons des séries des 5 et 9 et des séries des 8 et 10 novembre nous fourniront deux nouvelles séries d'où l'influence de l'éclairage des points aura été éliminée ; il sera possible alors de discuter l'accord des résultats partiels et d'en déduire un résultat général. Dans cette déduction, eu égard à ce que la série moyenne des 5 et 9 novembre repose sur un nombre d'observations moitié moindre que celle des 8 et 10, nous prendrons la moyenne en attribuant au nombre de la première un poids moitié moindre qu'à ceux de l'autre série moyenne.

Ces différents résultats sont consignés dans le tableau suivant.

Étude des tourillons de la Lunette méridienne.

Position inverse ; 1859. — *Valeurs de* δc.

HAUTEUR de la Lunette.	MOYENNE des 5 et 9 novembre.	MOYENNE des 8 et 10 novembre.	MOYENNE générale eu égard aux poids.	HAUTEUR de la Lunette.	MOYENNE des 5 et 9 novembre.	MOYENNE des 8 et 10 novembre.	MOYENNE générale eu égard aux poids.
°	s	s	s	°	s	s	s
0	−0,006	−0,002	−0,003	180	+0,011	+0,013	+0,012
5	−0,004	−0,008	−0,007	185	+0,012	+0,012	+0,012
10	−0,003	−0,008	−0,006	190	+0,009	+0,011	+0,010
15	−0,004	−0,006	−0,005	195	+0,008	+0,010	+0,009
20	−0,004	−0,006	−0,005	200	+0,007	+0,009	+0,008
25	+0,001	−0,004	−0,002	205	+0,005	+0,010	+0,008
30	+0,014	−0,002	+0,003	210	+0,006	+0,008	+0,007
35	+0,011	0,000	+0,004	215	+0,008	+0,004	+0,005
40	+0,012	+0,002	+0,005	220	+0,006	+0,003	+0,004
45	+0,015	+0,002	+0,006	225	+0,003	+0,007	+0,006
50	+0,011	+0,002	+0,005	230	+0,003	+0,001	+0,002
55	+0,006	+0,002	+0,003	235	+0,002	−0,001	0,000
60	0,000	−0,003	−0,002	240	+0,003	−0,003	−0,001
65	−0,004	−0,003	−0,003	245	+0,004	0,000	+0,001
70	−0,005	−0,005	−0,005	250	+0,003	+0,004	+0,004
75	−0,004	−0,004	−0,004	255	+0,003	+0,004	+0,004
80	−0,004	−0,005	−0,005	260	+0,005	+0,004	+0,004
85	−0,009	−0,013	−0,012	265	+0,004	+0,007	+0,006
90	−0,013	−0,018	−0,016	270	−0,004	+0,012	+0,007
95	−0,014	−0,008	−0,010	275	−0,010	−0,001	−0,004
100	−0,015	−0,011	−0,012	280	−0,008	+0,004	0,000
105	−0,016	−0,008	−0,011	285	−0,006	+0,005	+0,001
110	−0,012	−0,006	−0,008	290	−0,005	+0,005	+0,002
115	−0,005	−0,003	−0,004	295	−0,004	−0,003	−0,003
120	−0,001	−0,009	−0,006	300	−0,003	−0,003	−0,003
125	+0,003	−0,005	−0,002	305	−0,008	0,000	−0,003
130	+0,004	−0,002	0,000	310	−0,012	−0,002	−0,005
135	+0,005	+0,005	+0,005	315	−0,011	−0,005	−0,007
140	+0,006	+0,006	+0,006	320	−0,009	−0,006	−0,007
145	+0,007	+0,003	+0,004	325	−0,010	−0,009	−0,009
150	+0,008	+0,002	+0,004	330	−0,012	−0,011	−0,011
155	+0,011	+0,003	+0,006	335	−0,011	−0,006	−0,008
160	+0,011	+0,009	+0,010	340	−0,006	−0,008	−0,007
165	+0,009	+0,016	+0,014	345	−0,004	−0,006	−0,005
170	+0,008	+0,017	+0,014	350	−0,006	−0,006	−0,006
175	+0,009	+0,014	+0,012	355	−0,008	−0,008	−0,008
180	+0,011	+0,013	+0,012	0	−0,006	−0,002	−0,003

En examinant les nombres de ce tableau, on constate que les valeurs de δc, comprises dans les deux premières colonnes, s'accordent généralement : ce n'est que dans les intervalles compris entre 30° et 50°, puis 270° et 290°, que l'on trouve des discordances dépassant $0^s,01$; ces intervalles ne comprennent que $\frac{1}{11}$ de la circonférence.

Malgré ces discordances, il paraît évident que les tourillons présentent des irrégularités sensibles dans les régions correspondantes aux hauteurs voisines de 95° et 180°; les δc atteignant dans le premier cas jusqu'à $-0^s,016$, et dans le deuxième $+0^s,014$.

Passons maintenant aux observations faites en 1860.

Ces observations ont été faites dans la position directe de l'instrument. Elles se composent de quatre séries complètes faites dans une première situation des points, du 28 au 30 mars, et de quatre autres séries, également complètes, faites du 2 au 5 avril, dans une deuxième situation des mêmes points; cette deuxième situation résultant d'une rotation de 180° par rapport à la première. Les tableaux suivants, dressés comme ceux relatifs aux observations de 1859, ne nécessitent aucune nouvelle explication.

Études des tourillons de la Lunette méridienne.

POSITION DIRECTE. — *Première situation des points.*

0.	☿ MARS 28.			☿ MARS 28.			♃ MARS 29.			♀ MARS 30.		
RV.	THIRION ET FOLAIN.			LÉPISSIER ET ISMAÏL.			THIRION ET FOLAIN.			THIRION ET FOLAIN.		
)	t 9,874	t 9,274	s +0,234	t 9,881	t 9,260	s +0,241	t 9,879	t 9,294	s +0,230	t 9,861	t 9,295	s +0,241
	$x-p$	$y-q$	δc	$x-p$	$y-q$	δc	$x-p$	$y-q$	δc	$x-p$	$y-q$	δc
o	t	t	s	t	t	s	t	t	s	t	t	s
0	+0,545	+1,465	−0,010	+0,536	+1,454	−0,020	+0,523	+1,448	−0,015	+0,551	+1,442	−0,014
5	+0,409	+1,476	−0,013	+0,392	+1,519	−0,026	+0,411	+1,496	−0,008	+0,429	+1,484	−0,012
0	+0,313	+1,526	+0,003	+0,308	+1,509	−0,008	+0,287	+1,503	−0,006	+0,296	+1,516	−0,012
5	+0,173	+1,546	+0,001	+0,169	+1,552	−0,009	+0,157	+1,522	−0,005	+0,179	+1,549	−0,004
0	+0,063	+1,566	+0,011	+0,055	+1,549	−0,002	+0,022	+1,535	−0,004	+0,036	+1,574	−0,006
5	−0,074	+1,576	+0,013	−0,090	+1,571	−0,001	−0,114	+1,515	−0,010	−0,078	+1,569	+0,003
0	−0,197	+1,573	+0,019	−0,207	+1,535	+0,001	−0,249	+1,505	−0,008	−0,214	+1,553	+0,002
5	−0,321	+1,543	+0,021	−0,343	+1,521	+0,001	−0,378	+1,488	−0,005	−0,351	+1,518	−0,001
0	−0,474	+1,499	+0,014	−0,465	+1,479	+0,003	−0,477	+1,468	+0,010	−0,468	+1,482	+0,004
5	−0,627	+1,426	0,000	−0,609	+1,426	−0,003	−0,624	+1,440	+0,008	−0,598	+1,440	+0,003
0	−0,744	+1,369	+0,001	−0,740	+1,362	−0,007	−0,757	+1,390	+0,007	−0,724	+1,397	+0,009
5	−0,827	+1,299	+0,009	−0,848	+1,290	−0,007	−0,837	+1,299	+0,010	−0,835	+1,331	+0,010
0	−0,941	+1,229	+0,010	−0,955	+1,232	+0,002	−0,949	+1,212	+0,005	−0,951	+1,232	+0,002
5	−1,041	+1,143	+0,010	−1,061	+1,110	−0,011	−1,041	+1,127	+0,010	−1,035	+1,121	−0,003
0	−1,137	+1,049	+0,011	−1,169	+1,044	−0,002	−1,153	+1,034	+0,008	−1,138	+1,068	+0,012
5	−1,237	+0,949	+0,011	−1,250	+0,951	+0,003	−1,229	+0,929	+0,008	−1,221	+0,971	+0,014
0	−1,294	+0,816	+0,005	−1,328	+0,851	+0,009	−1,291	+0,793	−0,003	−1,304	+0,832	+0,002
5	−1,381	+0,696	+0,003	−1,419	+0,719	+0,003	−1,360	+0,698	+0,008	−1,368	+0,716	+0,005
0	−1,444	+0,573	+0,001	−1,467	+0,599	+0,006	−1,394	+0,564	+0,001	−1,434	+0,585	0,000
5	−1,507	+0,429	−0,004	−1,484	+0,475	+0,007	−1,438	+0,446	+0,006	−1,481	+0,457	−0,001
0	−1,514	+0,296	−0,005	−1,529	+0,333	+0,003	−1,505	+0,319	+0,007	−1,511	+0,333	+0,003
5	−1,551	+0,166	−0,002	−1,541	+0,196	+0,003	−1,519	+0,158	−0,004	−1,524	+0,191	−0,002
0	−1,561	+0,026	−0,004	−1,585	+0,073	+0,010	−1,523	+0,034	−0,003	−1,531	+0,068	+0,001
5	−1,564	−0,101	−0,001	−1,600	−0,008	+0,035	−1,536	−0,084	+0,007	−1,524	−0,087	−0,009
0	−1,541	−0,237	−0,001	−1,558	−0,203	+0,009	−1,520	−0,217	+0,006	−1,524	−0,210	−0,002
5	−1,531	−0,374	+0,001	−1,527	−0,314	+0,014	−1,480	−0,345	+0,003	−1,511	−0,341	0,000
0	−1,501	−0,504	+0,004	−1,507	−0,463	+0,012	−1,458	−0,498	0,000	−1,474	−0,464	+0,003
5	−1,464	−0,631	+0,008	−1,446	−0,618	0,000	−1,424	−0,633	0,000	−1,425	−0,574	+0,008
0	−1,384	−0,748	+0,002	−1,384	−0,712	+0,008	−1,371	−0,743	+0,006	−1,365	−0,693	+0,006
5	−1,317	−0,864	+0,008	−1,312	−0,860	−0,002	−1,283	−0,861	−0,002	−1,308	−0,809	+0,009
0	−1,227	−0,994	0,000	−1,256	−0,937	+0,013	−1,205	−0,974	+0,003	−1,231	−0,914	+0,011
5	−1,144	−1,107	−0,002	−1,168	−1,041	+0,015	−1,113	−1,069	−0,001	−1,135	−1,023	+0,005
0	−1,031	−1,174	0,000	−1,078	−1,163	+0,012	−1,024	−1,172	+0,001	−1,028	−1,126	−0,002
5	−0,921	−1,264	−0,003	−0,946	−1,226	+0,004	−0,917	−1,237	+0,003	−0,921	−1,215	−0,006
0	−0,814	−1,321	−0,001	−0,832	−1,313	+0,002	−0,818	−1,299	+0,008	−0,818	−1,294	−0,003
5	−0,718	−1,384	+0,010	−0,713	−1,359	+0,002	−0,678	−1,374	0,000	−0,705	−1,339	0,000
0	−0,600	−1,457	+0,013	−0,601	−1,429	+0,006	−0,567	−1,444	+0,005	−0,574	−1,405	−0,005

Les nombres qui figurent au dessous des noms des observateurs sont les valeurs respectives de p, q et P_m.

Étude des tourillons de la Lunette méridienne.

POSITION DIRECTE. — *Première situation des points.* (Suite.)

1860. — OBSERV.	☿ MARS 28. THIRION ET FOLAIN.			☿ MARS 28. LÉPISSIER ET ISMAÏL.			♃ MARS 29. THIRION ET FOLAIN.			♀ MARS 30. THIRION ET FOLAIN.		
(¹)	t 9,874	t 9,274	s +0,234	t 9,881	t 9,260	s +0,241	t 9,879	t 9,294	s +0,230	t 9,861	t 9,295	s +0,241
h	$x-p$	$y-q$	δc	$x-p$	$y-q$	δc	$x-p$	$y-q$	δc	$x-p$	$y-q$	δc
°	t	t	s	t	t	s	t	t	s	t	t	s
180	−0,600	−1,457	+0,013	−0,601	−1,429	+0,006	−0,567	−1,444	+0,005	−0,574	−1,405	−0,005
185	−0,464	−1,494	+0,010	−0,448	−1,482	−0,004	−0,440	−1,485	+0,003	−0,455	−1,484	−0,001
190	−0,321	−1,544	+0,007	−0,320	−1,511	−0,004	−0,308	−1,515	+0,004	−0,324	−1,541	+0,001
195	−0,184	−1,574	+0,007	−0,176	−1,561	−0,005	−0,180	−1,530	+0,006	−0,191	−1,570	+0,003
200	−0,077	−1,574	+0,017	−0,046	−1,564	−0,003	−0,045	−1,547	+0,005	−0,054	−1,562	0,000
205	+0,073	−1,547	+0,009	+0,089	−1,543	−0,006	+0,098	−1,544	+0,001	+0,062	−1,574	+0,009
210	+0,223	−1,537	+0,008	+0,218	−1,548	0,000	+0,226	−1,544	+0,007	+0,202	−1,567	+0,010
215	+0,362	−1,507	0,000	+0,386	−1,533	−0,010	+0,368	−1,512	+0,002	+0,253	−1,542	+0,003
220	+0,516	−1,474	−0,008	+0,484	−1,479	−0,003	+0,487	−1,470	+0,007	+0,486	−1,485	−0,001
225	+0,639	−1,447	+0,002	+0,637	−1,429	−0,010	+0,617	−1,444	+0,009	+0,602	−1,454	+0,007
230	+0,739	−1,404	+0,011	+0,759	−1,391	−0,003	+0,743	−1,383	+0,009	+0,723	−1,384	+0,003
235	+0,869	−1,308	+0,003	+0,891	−1,308	−0,010	+0,859	−1,294	+0,002	+0,839	−1,315	+0,004
240	+0,986	−1,224	−0,004	+1,003	−1,214	−0,016	+0,998	−1,218	−0,002	+0,949	−1,237	+0,005
245	+1,116	−1,121	−0,011	+1,098	−1,138	−0,008	+1,099	−1,127	0,000	+1,072	−1,143	−0,001
250	+1,206	−1,027	−0,006	+1,214	−1,040	−0,010	+1,207	−1,036	−0,001	+1,162	−1,042	−0,003
255	+1,283	−0,924	−0,005	+1,279	−0,930	−0,007	+1,275	−0,932	+0,004	+1,266	−0,928	−0,007
260	+1,353	−0,804	−0,007	+1,358	−0,827	−0,003	+1,[illegible]33	−0,813	+0,002	+1,349	−0,820	−0,006
265	+1,426	−0,671	−0,010	+1,433	−0,729	+0,007	+1,416	−0,663	−0,010	+1,409	−0,706	−0,002
270	+1,486	−0,561	−0,003	+1,492	−0,613	+0,011	+1,477	−0,567	+0,004	+1,452	−0,589	+0,002
275	+1,539	−0,447	+0,004	+1,523	−0,476	+0,009	+1,495	−0,419	−0,004	+1,495	−0,471	+0,006
280	+1,572	−0,304	+0,002	+1,572	−0,358	+0,016	+1,523	−0,307	+0,003	+1,529	−0,344	+0,008
285	+1,576	−0,187	+0,009	+1,584	−0,215	+0,013	+1,554	−0,173	−0,002	+1,553	−0,206	+0,007
290	+1,583	−0,064	+0,014	+1,597	−0,077	+0,014	+1,578	−0,043	+0,010	+1,569	−0,069	+0,007
295	+1,566	+0,083	+0,008	+1,569	+0,043	+0,016	+1,559	+0,101	+0,003	+1,549	+0,072	+0,002
300	+1,539	+0,242	−0,003	+1,551	+0,199	+0,008	+1,520	+0,220	+0,005	+1,539	+0,182	+0,011
305	+1,509	+0,383	−0,007	+1,516	+0,336	+0,002	+1,491	+0,370	−0,003	+1,509	+0,330	+0,004
310	+1,460	+0,503	−0,005	+1,482	+0,477	0,000	+1,449	+0,492	−0,001	+1,463	+0,461	+0,001
315	+1,406	+0,640	−0,010	+1,432	+0,597	+0,002	+1,390	+0,618	−0,006	+1,412	+0,573	+0,003
320	+1,333	+0,766	−0,019	+1,362	+0,697	+0,004	+1,321	+0,741	−0,010	+1,339	+0,690	−0,002
325	+1,253	+0,876	−0,021	+1,280	+0,838	−0,008	+1,262	+0,868	−0,010	+1,279	+0,818	−0,003
330	+1,163	+0,960	−0,019	+1,204	+0,959	−0,009	+1,147	+0,971	−0,021	+1,175	+0,932	−0,013
335	+1,069	+1,080	−0,023	+1,117	+1,063	−0,010	+1,080	+1,071	−0,013	+1,092	+1,040	−0,015
340	+0,983	+1,179	−0,021	+1,023	+1,146	−0,005	+0,964	+1,169	−0,022	+1,013	+1,141	−0,011
345	+0,883	+1,253	−0,018	+0,900	+1,256	−0,017	+0,870	+1,260	−0,019	+0,899	+1,212	−0,014
350	+0,773	+1,332	−0,018	+0,795	+1,308	−0,012	+0,755	+1,324	−0,019	+0,806	+1,279	−0,007
355	+0,656	+1,380	−0,013	+0,685	+1,368	−0,009	+0,639	+1,382	−0,018	+0,689	+1,350	−0,006
0	+0,545	+1,465	−0,010	+0,536	+1,454	−0,020	+0,523	+1,448	−0,015	+0,551	+1,442	−0,014

(¹) Les nombres qui figurent au-dessous des noms des observateurs sont les valeurs respectives de p, q et P_m.

Étude des tourillons de la Lunette méridienne.

POSITION DIRECTE. — *Seconde situation des points.*

1860.	☾ AVRIL 2.			♂ AVRIL 3.			☿ AVRIL 4.			♃ AVRIL 5.		
— OBSERV.	LÉPISSIER ET THIRION.			Y. VILLARCEAU ET FOLAIN.			THIRION ET FOLAIN.			THIRION ET FOLAIN.		
(¹)	t 10,013	t 8,149	s +0,190	t 10,012	t 8,145	s +0,189	t 10,010	t 8,167	s +0,192	t 9,966	t 8,186	s +0,191
h	$x-p$	$y-q$	δc	$x-p$	$y-q$	δc	$x-p$	$y-q$	δc	$x-p$	$y-q$	δc
°	t	t	s	t	t	s	t	t	s	t	t	s
0	+0,426	+0,789	−0,015	+0,442	+0,765	−0,006	+0,429	+0,763	−0,015	+0,429	+0,761	−0,014
5	+0,357	+0,841	−0,014	+0,354	+0,845	−0,014	+0,390	+0,810	−0,003	+0,367	+0,808	−0,012
10	+0,280	+0,861	−0,016	+0,280	+0,864	−0,012	+0,348	+0,839	+0,009	+0,301	+0,841	−0,009
15	+0,213	+0,888	−0,010	+0,213	+0,875	−0,011	+0,246	+0,877	0,000	+0,224	+0,858	−0,010
20	+0,134	+0,894	−0,012	+0,146	+0,893	−0,006	+0,166	+0,904	−0,001	+0,141	+0,878	−0,012
25	+0,064	+0,908	−0,008	+0,070	+0,882	−0,009	+0,079	+0,910	−0,005	+0,071	+0,888	−0,010
30	−0,026	+0,911	−0,012	+0,002	+0,911	+0,001	−0,001	+0,917	−0,002	+0,007	+0,895	−0,004
35	−0,079	+0,918	0,000	−0,089	+0,901	−0,006	−0,087	+0,911	−0,005	−0,066	+0,899	−0,001
40	−0,153	+0,911	+0,003	−0,160	+0,910	+0,002	−0,152	+0,901	−0,002	−0,153	+0,912	+0,002
45	−0,193	+0,877	+0,010	−0,212	+0,892	+0,009	−0,218	+0,888	+0,004	−0,226	+0,882	−0,001
50	−0,279	+0,864	+0,007	−0,281	+0,853	+0,007	−0,279	+0,858	+0,005	−0,286	+0,852	+0,001
55	−0,356	+0,838	+0,009	−0,330	+0,833	+0,014	−0,342	+0,831	+0,007	−0,353	+0,823	+0,002
60	−0,399	+0,801	+0,013	−0,415	+0,789	+0,008	−0,418	+0,811	+0,010	−0,412	+0,807	+0,012
65	−0,476	+0,747	+0,007	−0,473	+0,752	+0,010	−0,479	+0,788	+0,020	−0,486	+0,767	+0,011
70	−0,520	+0,704	+0,008	−0,551	+0,708	+0,008	−0,539	+0,722	+0,011	−0,551	+0,707	+0,007
75	−0,580	+0,647	+0,007	−0,608	+0,648	+0,003	−0,586	+0,676	+0,015	−0,606	+0,670	+0,011
80	−0,637	+0,604	+0,008	−0,655	+0,605	+0,001	−0,643	+0,632	+0,017	−0,656	+0,613	+0,009
85	−0,676	+0,534	+0,003	−0,689	+0,534	+0,005	−0,679	+0,572	+0,018	−0,700	+0,571	+0,018
90	−0,723	+0,464	+0,001	−0,753	+0,475	+0,008	−0,720	+0,499	+0,014	−0,746	+0,484	+0,007
95	−0,760	+0,411	+0,006	−0,789	+0,413	+0,008	−0,774	+0,410	+0,004	−0,783	+0,421	+0,009
100	−0,800	+0,341	+0,005	−0,818	+0,322	+0,002	−0,814	+0,347	+0,007	−0,809	+0,334	+0,001
105	−0,827	+0,261	+0,003	−0,832	+0,245	−0,003	−0,847	+0,263	+0,004	−0,836	+0,267	+0,006
110	−0,873	+0,151	−0,009	−0,850	+0,171	−0,002	−0,851	+0,180	−0,002	−0,839	+0,191	+0,001
115	−0,877	+0,114	+0,006	−0,863	+0,092	−0,005	−0,857	+0,107	−0,002	−0,843	+0,111	−0,004
120	−0,890	+0,021	+0,001	−0,879	+0,030	+0,004	−0,860	+0,028	−0,005	−0,866	+0,039	+0,002
125	−0,880	−0,049	+0,002	−0,864	−0,040	+0,001	−0,868	−0,059	−0,007	−0,873	−0,048	−0,002
130	−0,900	−0,125	+0,009	−0,866	−0,117	+0,004	−0,875	−0,116	+0,002	−0,862	−0,138	−0,006
135	−0,873	−0,206	+0,003	−0,839	−0,199	−0,003	−0,864	−0,209	−0,003	−0,846	−0,198	−0,002
140	−0,849	−0,286	+0,002	−0,826	−0,268	+0,002	−0,841	−0,266	+0,003	−0,829	−0,261	+0,001
145	−0,837	−0,369	+0,006	−0,804	−0,348	0,000	−0,815	−0,349	+0,002	−0,816	−0,333	+0,007
150	−0,783	−0,436	−0,002	−0,773	−0,428	−0,001	−0,788	−0,409	+0,004	−0,779	−0,407	+0,003
155	−0,763	−0,486	+0,010	−0,739	−0,482	+0,002	−0,752	−0,475	+0,004	−0,739	−0,463	+0,005
160	−0,697	−0,569	+0,001	−0,678	−0,536	−0,001	−0,706	−0,535	+0,007	−0,692	−0,544	0,000
165	−0,646	−0,582	+0,007	−0,638	−0,597	0,000	−0,662	−0,601	+0,007	−0,639	−0,594	+0,001
170	−0,580	−0,652	−0,002	−0,571	−0,675	−0,005	−0,603	−0,678	+0,002	−0,590	−0,653	+0,001
175	−0,510	−0,726	−0,007	−0,536	−0,733	+0,005	−0,526	−0,718	−0,001	−0,526	−0,706	+0,001
180	−0,449	−0,776	−0,005	−0,455	−0,782	−0,001	−0,466	−0,770	0,000	−0,459	−0,770	−0,002

(¹) Les nombres qui figurent au-dessous des noms des observateurs sont les valeurs respectives de p, q et P_m.

Étude des tourillons de la Lunette méridienne.

POSITION DIRECTE. — *Seconde situation des points.* (Suite.)

1860. — OBSERV.	☾ AVRIL 2. LÉPISSIER ET THIRION.			♂ AVRIL 3. Y. VILLARCEAU ET FOLAIN.			☿ AVRIL 4. THIRION ET FOLAIN.			♃ AVRIL THIRION ET F	
(¹)	10,013 t	8,149 t	+0,190 s	10,012 t	8,145 t	+0,189 s	10,010 t	8,167 t	+0,192 s	9,966 t	8,186 t
h	$x-p$	$y-q$	δc	$x-p$	$y-q$	δc	$x-p$	$y-q$	δc	$x-p$	$y-q$
°	t	t	s	t	t	s	t	t	s	t	t
180	−0,449	−0,776	−0,005	−0,455	−0,782	−0,001	−0,466	−0,770	0,000	−0,459	−0,77
185	−0,373	−0,796	−0,008	−0,389	−0,826	+0,001	−0,394	−0,816	0,000	−0,372	−0,81
190	−0,313	−0,862	−0,001	−0,323	−0,850	+0,004	−0,321	−0,846	−0,001	−0,306	−0,84
195	−0,246	−0,869	+0,001	−0,247	−0,873	0,000	−0,257	−0,886	+0,005	−0,246	−0,87
200	−0,146	−0,905	−0,005	−0,170	−0,902	+0,005	−0,164	−0,909	−0,001	−0,166	−0,88
205	−0,073	−0,913	−0,005	−0,090	−0,911	+0,003	−0,081	−0,933	0,000	−0,089	−0,89
210	+0,014	−0,919	−0,005	−0,024	−0,909	+0,008	−0,009	−0,942	+0,005	−0,009	−0,91
215	+0,104	−0,906	−0,010	+0,066	−0,891	−0,001	+0,075	−0,915	0,000	+0,074	−0,91
220	+0,171	−0,935	+0,005	+0,140	−0,895	+0,005	+0,158	−0,912	−0,001	+0,154	−0,89
225	+0,244	−0,926	+0,010	+0,221	−0,883	+0,004	+0,241	−0,888	−0,003	+0,231	−0,90
230	+0,307	−0,899	+0,013	+0,307	−0,857	+0,003	+0,308	−0,862	−0,003	+0,301	−0,86
235	+0,364	−0,838	+0,007	+0,375	−0,829	+0,002	+0,392	−0,825	−0,005	+0,371	−0,84
240	+0,447	−0,792	0,000	+0,444	−0,783	−0,001	+0,450	−0,801	−0,001	+0,447	−0,80
245	+0,527	−0,756	+0,001	+0,509	−0,758	+0,004	+0,527	−0,761	−0,001	+0,524	−0,76
250	+0,547	−0,692	−0,001	+0,577	−0,697	+0,001	+0,587	−0,717	+0,004	+0,568	−0,70
255	+0,630	−0,636	−0,002	+0,636	−0,647	0,000	+0,643	−0,657	+0,002	+0,614	−0,66
260	+0,664	−0,592	+0,002	+0,702	−0,579	−0,003	+0,711	−0,597	0,000	+0,671	−0,60
265	+0,714	−0,532	+0,001	+0,734	−0,515	−0,003	+0,730	−0,537	+0,003	+0,720	−0,54
270	+0,760	−0,476	+0,006	+0,784	−0,465	+0,004	+0,763	−0,498	+0,013	+0,791	−0,48
275	+0,790	−0,392	−0,001	+0,828	−0,393	+0,002	+0,812	−0,395	−0,001	+0,818	−0,41
280	+0,820	−0,339	+0,006	+0,845	−0,340	+0,010	+0,823	−0,326	0,000	+0,837	−0,35
285	+0,857	−0,266	+0,008	+0,856	−0,253	+0,003	+0,849	−0,274	+0,008	+0,854	−0,27
290	+0,884	−0,182	+0,004	+0,867	−0,194	+0,008	+0,859	−0,210	+0,010	+0,878	−0,20
295	+0,877	−0,122	+0,009	+0,881	−0,098	+0,001	+0,875	−0,122	+0,007	+0,891	−0,12
300	+0,870	−0,025	−0,001	+0,884	−0,030	+0,005	+0,868	−0,042	+0,002	+0,887	−0,04
305	+0,867	+0,061	−0,006	+0,857	+0,031	+0,003	+0,858	+0,041	−0,003	+0,857	+0,03
310	+0,870	+0,138	−0,002	+0,863	+0,124	+0,001	+0,842	+0,118	−0,006	+0,841	+0,09
315	+0,864	+0,214	−0,002	+0,842	+0,218	−0,007	+0,824	+0,186	−0,007	+0,831	+0,18
320	+0,827	+0,261	+0,003	+0,817	+0,278	−0,005	+0,814	+0,282	−0,012	+0,794	+0,27
325	+0,793	+0,331	−0,002	+0,793	+0,343	−0,003	+0,781	+0,349	−0,011	+0,767	+0,33
330	+0,747	+0,428	−0,011	+0,752	+0,415	−0,006	+0,740	+0,412	−0,013	+0,734	+0,40
335	+0,720	+0,481	−0,005	+0,701	+0,483	−0,012	+0,704	+0,482	−0,015	+0,717	+0,58
340	+0,657	+0,547	−0,013	+0,653	+0,545	−0,012	+0,656	+0,550	−0,015	+0,664	+0,55
345	+0,601	+0,611	−0,016	+0,585	+0,587	−0,020	+0,607	+0,603	−0,014	+0,614	+0,60
350	+0,554	+0,695	−0,017	+0,550	+0,645	−0,011	+0,523	+0,654	−0,028	+0,554	+0,66
355	+0,497	+0,741	−0,013	+0,493	+0,708	−0,012	+0,463	+0,700	−0,027	+0,484	+0,73
0	+0,426	+0,789	−0,015	+0,442	+0,765	−0,006	+0,429	+0,763	−0,015	+0,429	+0,76

(¹) Les nombres qui figurent au-dessous des noms des observateurs sont les valeurs respectives de p, q et P_m.

On pourra remarquer que, dans les quatre premières séries, les valeurs de P_m n'ont varié que de $0^s,005$ à $0^s,006$ par rapport à leur valeur moyenne : dans les quatre autres séries, la quantité P_m a conservé une valeur presque absolument constante.

Nous formerons séparément les moyennes des valeurs de δc fournies par les séries dans lesquelles les points ont conservé les mêmes situations par rapport aux tourillons; et nous prendrons pour résultat général en 1860 la moyenne des valeurs obtenues relativement aux deux situations distinctes des points.

Le tableau suivant contient les trois systèmes de valeurs de δc ainsi déterminées.

Étude des tourillons de la Lunette méridienne.

Valeurs de δc. — Position directe. — Mars-Avril 1860.

HAUTEUR.	PREMIÈRE situation des points.	DEUXIÈME situation des points.	MOYENNE.	HAUTEUR.	PREMIÈRE situation des points.	DEUXIÈME situation des points.	MOYENNE.
°	s	s	s	°	s	s	s
0	−0,015	−0,012	−0,014	180	+0,005	−0,002	+0,002
5	−0,015	−0,011	−0,013	185	+0,002	−0,004	−0,001
10	−0,006	−0,007	−0,007	190	+0,002	−0,001	0,000
15	−0,004	−0,008	−0,006	195	+0,003	+0,002	+0,003
20	0,000	−0,008	−0,004	200	+0,005	−0,001	+0,002
25	0,000	−0,008	−0,004	205	+0,003	−0,001	+0,001
30	+0,004	−0,004	0,000	210	+0,006	+0,002	+0,004
35	+0,004	−0,003	0,000	215	−0,001	−0,002	−0,002
40	+0,008	+0,001	+0,005	220	−0,001	+0,002	0,000
45	+0,002	+0,005	+0,004	225	+0,002	+0,004	+0,003
50	+0,002	+0,005	+0,004	230	+0,005	+0,004	+0,005
55	+0,005	+0,008	+0,007	235	0,000	+0,003	+0,002
60	+0,005	+0,011	+0,008	240	−0,004	+0,001	−0,002
65	+0,002	+0,012	+0,007	245	−0,005	+0,002	−0,002
70	+0,007	+0,009	+0,008	250	−0,005	+0,002	−0,002
75	+0,009	+0,009	+0,009	255	−0,004	+0,002	−0,001
80	+0,003	+0,009	+0,006	260	−0,003	+0,002	0,000
85	+0,005	+0,011	+0,008	265	−0,004	+0,001	−0,002
90	+0,002	+0,008	+0,005	270	−0,003	+0,008	+0,002
95	+0,002	+0,007	+0,005	275	+0,004	+0,003	+0,004
100	+0,002	+0,004	+0,003	280	+0,007	+0,007	+0,007
105	−0,001	+0,002	0,000	285	+0,007	+0,006	+0,007
110	+0,001	−0,003	−0,001	290	+0,011	+0,006	+0,009
115	+0,008	−0,001	+0,004	295	+0,007	+0,005	+0,006
120	+0,003	0,000	+0,002	300	+0,005	+0,003	+0,004
125	+0,005	−0,001	+0,002	305	−0,001	−0,001	−0,001
130	+0,005	+0,002	+0,004	310	−0,001	−0,001	−0,001
135	+0,004	−0,001	+0,002	315	−0,003	−0,005	−0,004
140	+0,004	+0,002	+0,004	320	−0,007	−0,007	−0,007
145	+0,003	+0,004	+0,004	325	−0,010	−0,007	−0,009
150	+0,007	+0,001	+0,004	330	−0,015	−0,011	−0,013
155	+0,004	+0,005	+0,005	335	−0,015	−0,014	−0,015
160	+0,003	+0,002	+0,003	340	−0,015	−0,013	−0,014
165	0,000	+0,004	+0,002	345	−0,017	−0,015	−0,016
170	+0,001	−0,001	0,000	350	−0,014	−0,018	−0,016
175	+0,003	−0,001	+0,001	355	−0,011	−0,018	−0,015
180	+0,005	−0,002	+0,002	0	−0,015	−0,012	−0,014

Les deux séries obtenues dans les deux situations distinctes des points présentent, malgré cette circonstance, un accord vraiment satisfaisant, car une seule discordance s'élève à $0^s,01$; mais cela tient au nombre des séries qui monte ici à quatre pour chaque situation des points.

Les tourillons paraissent présenter des irrégularités sensibles dans les régions correspondantes aux hauteurs voisines de 75° et 345°, elles se traduisent par des valeurs de δc qui atteignent $+ 0^s,009$ dans le premier cas et $- 0^s,016$ dans le second.

Comparaison des résultats obtenus dans les deux positions, directe et inverse, de la Lunette méridienne. — En toute rigueur, la comparaison des résultats correspondant aux deux positions de l'instrument serait contraire à la théorie sur laquelle repose leur détermination; car on ne peut admettre que l'échange des supports des tourillons n'aura aucune influence sur la rotation. Cependant une circonstance physique permet évidemment cette comparaison. La faible irrégularité des tourillons et le peu de différence de leurs diamètres ont pour résultat, au bout de quelques jours de service dans l'une des positions, de produire un usé des coussinets qui les moule pour ainsi dire à la forme des tourillons; en sorte que chacun d'eux se trouve, relativement au coussinet sur lequel il vient d'être posé, à très-peu près dans les mêmes conditions que relativement au coussinet qui le portait avant le retournement de la Lunette.

Ceci admis, la figure des tourillons aura seule de l'influence sur la rotation. Or, en conservant la lettre h pour désigner les hauteurs de la Lunette, position directe; soit h' la hauteur, position inverse, pour laquelle les arêtes des tourillons en contact avec les coussinets seront les mêmes que pour la hauteur h, position directe : il est évident que l'on aura

$$h + h' = 180°;$$

car en faisant décrire à la Lunette autour de la verticale une demi-circonférence, on ne change pas les arêtes de contact des tourillons, si les coussinets sont convenablement travaillés, et les deux hauteurs de la Lunette sont supplémentaires.

D'un autre côté, on remarquera que, si l'irrégularité des tourillons dévie l'axe optique vers l'Est de la quantité δc, position directe, la même cause produira un mouvement égal vers l'Ouest dans la position inverse. Donc les valeurs de δc, relatives à une position de l'instrument, se déduiront du tableau construit pour l'autre position, en y prenant les valeurs de δc correspondant aux hauteurs supplémentaires de celles que l'on aura en vue, et changeant les signes.

Nous avons trouvé, par exemple, qu'en 1859, position inverse, les irrégularités

sensibles se manifestaient vers 95° et 180°, et montaient respectivement à $-0^s,016$ et $+0^s,014$; pour les comparer aux irrégularités observées en 1860, position directe, nous prendrons le supplément des hauteurs et nous changerons les signes des δc, ce qui nous donnera 85° et 360° pour les hauteurs, et $+0^s,016$ et $-0^s,014$ pour les amplitudes de δc, en 1859. Or nous avons trouvé en 1860, position directe, les hauteurs 75° et 345°, et les amplitudes respectives $+0^s,009$ et $-0^s,016$. Les hauteurs présentent des différences de 10° et 15°, et les différences des amplitudes s'élèvent à $-0^s,007$ et $-0^s,002$. Malgré ces différences, on est conduit à admettre que, dans les régions ci-dessus, l'irrégularité des tourillons est réelle, et que si les discordances ne doivent pas être entièrement imputées aux observations, le siége des irrégularités se sera déplacé dans le même sens et à peu près de la même quantité, pour les deux régions où ces irrégularités sont le plus sensibles.

Nous ramènerons les déterminations de 1859 à la position directe, en appliquant la règle précédente. Faisant ensuite abstraction des petites différences entre les valeurs de δc obtenues en 1859 et 1860, comme si elles provenaient uniquement des erreurs des observations, ou bien que l'on voulût obtenir les valeurs de δc relatives à une époque intermédiaire, nous prendrons les moyennes entre les deux séries; ce qui nous fournira le résultat définitif relativement à la position directe. Enfin nous tirerons de ce résultat celui qui convient à la position inverse, en prenant les nombres correspondant aux hauteurs supplémentaires et changeant leurs signes.

Le tableau suivant présente les divers systèmes de valeurs de δc ainsi obtenues.

Étude des tourillons de la Lunette méridienne.

Valeurs de δc.

HAUTEUR de la Lunette.	POSITION DIRECTE. 1860.	POSITION DIRECTE. 1859.	MOYENNES. POSITION directe.	MOYENNES. POSITION inverse.	HAUTEUR de la Lunette.	POSITION DIRECTE. 1860.	POSITION DIRECTE. 1859.	MOYENNES. POSITION directe.	MOYENNES. POSITION inverse.
°	s	s	s	s	°	s	s	s	s
0	−0,014	−0,012	−0,013	−0,003	180	+0,002	+0,003	+0,003	+0,013
5	−0,013	−0,012	−0,012	−0,004	185	−0,001	+0,008	+0,003	+0,013
10	−0,007	−0,014	−0,011	−0,003	190	0,000	+0,006	+0,003	+0,013
15	−0,006	−0,014	−0,010	−0,004	195	+0,003	+0,005	+0,004	+0,012
20	−0,004	−0,010	−0,007	−0,004	200	+0,002	+0,007	+0,004	+0,011
25	−0,004	−0,006	−0,005	−0,003	205	+0,001	+0,008	+0,005	+0,011
30	0,000	−0,004	−0,002	−0,001	210	+0,004	+0,011	+0,007	+0,010
35	0,000	−0,004	−0,002	0,000	215	−0,002	+0,009	+0,004	+0,007
40	+0,005	−0,006	−0,001	+0,001	220	0,000	+0,007	+0,004	+0,006
45	+0,004	−0,005	0,000	+0,002	225	+0,003	+0,007	+0,005	+0,005
50	+0,004	0,000	+0,002	+0,001	230	+0,005	+0,005	+0,005	+0,002
55	+0,007	+0,002	+0,004	0,000	235	+0,002	+0,003	+0,003	0,000
60	+0,008	+0,006	+0,007	−0,002	240	−0,002	+0,003	+0,001	−0,002
65	+0,007	+0,004	+0,006	−0,003	245	−0,002	+0,003	0,000	−0,003
70	+0,008	+0,008	+0,008	−0,002	250	−0,002	−0,002	−0,002	−0,003
75	+0,009	+0,011	+0,010	−0,002	255	−0,001	−0,001	−0,001	−0,002
80	+0,006	+0,012	+0,009	−0,004	260	0,000	0,000	0,000	−0,001
85	+0,008	+0,010	+0,009	−0,009	265	−0,002	+0,004	+0,001	+0,001
90	+0,005	+0,016	+0,010	−0,010	270	+0,002	−0,007	+0,002	+0,002
95	+0,005	+0,012	+0,009	−0,009	275	+0,004	−0,006	−0,001	−0,001
100	+0,003	+0,005	+0,004	−0,009	280	+0,007	−0,004	+0,001	0,000
105	0,000	+0,004	+0,002	−0,010	285	+0,007	−0,004	+0,002	+0,001
110	−0,001	+0,005	+0,002	−0,008	290	+0,009	−0,004	+0,003	+0,002
115	+0,004	+0,003	+0,003	−0,006	295	+0,006	−0,001	+0,003	0,000
120	+0,002	+0,002	+0,002	−0,007	300	+0,004	+0,001	+0,002	−0,001
125	+0,002	−0,003	0,000	−0,004	305	−0,001	0,000	0,000	−0,003
130	+0,004	−0,005	−0,001	−0,002	310	−0,001	−0,002	−0,002	−0,005
135	+0,002	−0,006	−0,002	0,000	315	−0,004	−0,006	−0,005	−0,005
140	+0,004	−0,005	−0,001	+0,001	320	−0,007	−0,004	−0,006	−0,004
145	+0,004	−0,004	0,000	+0,002	325	−0,009	−0,005	−0,007	−0,004
150	+0,004	−0,003	+0,001	+0,002	330	−0,013	−0,007	−0,010	−0,007
155	+0,005	+0,002	+0,003	+0,005	335	−0,015	−0,008	−0,011	−0,005
160	+0,003	+0,005	+0,004	+0,007	340	−0,014	−0,008	−0,011	−0,004
165	+0,002	+0,005	+0,004	+0,010	345	−0,016	−0,009	−0,012	−0,004
170	0,000	+0,006	+0,003	+0,011	350	−0,016	−0,010	−0,013	−0,003
175	+0,001	+0,007	+0,004	+0,012	355	−0,015	−0,012	−0,013	−0,003
180	+0,002	+0,003	+0,003	+0,013	0	−0,014	−0,012	−0,013	−0,003

Les nombres compris dans les deux colonnes intitulées *moyennes* sont les corrections à appliquer à la collimation moyenne c, pour réduire les passages observés de novembre 1859 à avril 1860. Il est clair que la première moitié seulement de ces nombres servira à cet usage.

A l'inspection des chiffres du tableau précédent, on reconnaît que les corrections δc, dans les deux positions de l'instrument, sont très-faibles, aux environs des régions correspondant aux hauteurs 45° et 130° : cette circonstance est très-remarquable, en ce sens que c'est autour de ces positions, que l'instrument est le plus employé, la seconde correspondant à la direction du pôle.

Divisant les valeurs de δc par le sinus de la distance polaire, et changeant les signes pour les passages inférieurs, nous obtiendrons les corrections δt et $\delta t'$ à appliquer aux passages observés dans les positions directe et inverse de l'instrument.

On trouvera ces corrections dans le tableau suivant, et en outre les valeurs de la quantité $\frac{1}{2}(\delta t - \delta t')$.

Étude des tourillons de la Lunette méridienne.

Correction à appliquer aux passages observés pour avoir égard à l'irrégularité des tourillons.

DISTANCE polaire.		POSITION directe. δt	POSITION inverse. $\delta t'$	$\frac{1}{2}(\delta t - \delta t')$	DISTANCE polaire.		POSITION directe. δt	POSITION inverse. $\delta t'$	$\frac{1}{2}(\delta t - \delta t')$
	° '	s	s	s		° '	s	s	s
Pass. sup.	131.10	− 0,017	− 0,004	− 0,006	Pass. sup.	41.10	+ 0,015	− 0,015	+ 0,015
	126.10	− 0,015	− 0,005	− 0,005		36.10	+ 0,015	− 0,015	+ 0,015
	121.10	− 0,013	− 0,004	− 0,004		31.10	+ 0,008	− 0,017	+ 0,013
	116.10	− 0,011	− 0,004	− 0,003		26.10	+ 0,005	− 0,023	+ 0,014
	111.10	− 0,007	− 0,004	− 0,002		21.10	+ 0,006	− 0,022	+ 0,014
	106.10	− 0,005	− 0,003	− 0,001		16.10	+ 0,011	− 0,022	+ 0,017
	101.10	− 0,002	− 0,001	− 0,001		11.10	+ 0,010	− 0,036	+ 0,023
	96.10	− 0,002	0,000	− 0,001		6.10	0,000	− 0,037	+ 0,019
	91.10	− 0,001	+ 0,001	− 0,001		1.10	− 0,049	− 0,098	+ 0,024
	86.10	0,000	+ 0,002	− 0,001	Pass. inf.	3.50	+ 0,030	0,000	+ 0,015
	81.10	+ 0,002	+ 0,001	+ 0,001		8.50	+ 0,007	− 0,007	+ 0,007
	76.10	+ 0,004	0,000	+ 0,002		13.50	0,000	− 0,008	+ 0,004
	71.10	+ 0,007	− 0,002	+ 0,004		18.50	− 0,003	− 0,006	+ 0,002
	66.10	+ 0,007	− 0,003	+ 0,005		23.50	− 0,007	− 0,012	+ 0,002
	61.10	+ 0,009	− 0,002	+ 0,006		28.50	− 0,008	− 0,015	+ 0,004
	56.10	+ 0,012	− 0,002	+ 0,007		33.50	− 0,007	− 0,018	+ 0,006
	51.10	+ 0,012	− 0,005	+ 0,009		38.50	− 0,005	− 0,018	+ 0,006
	46.10	+ 0,012	− 0,012	+ 0,012		43.50	− 0,006	− 0,017	+ 0,006
	41.10	+ 0,015	− 0,015	+ 0,015		48.50	− 0,004	− 0,017	+ 0,006

Détermination de la collimation par voie de retournement de la Lunette méridienne. — Nous serons obligés d'admettre ici, comme plus haut, que les coussinets sont sans influence pour modifier la rotation de la Lunette, ou que cette rotation ne dépend que de la figure des tourillons.

Dans le cas où cette hypothèse sera admissible, soit ν_0 la position du fil mobile du micromètre pour lequel la collimation moyenne c est nulle, on aura, suivant l'équation (24), la mire étant supposée au Sud,

$$\text{A} = \alpha + k(\nu_0 - m) + \delta c_0. \tag{32}$$

Nous supposerons que cette équation se rapporte à la position directe.

Lorsqu'on retournera la Lunette, la position ν_0 ne changera pas; mais le sens de la vis étant renversé, il faudra, pour appliquer la formule précédente, changer le signe k. Désignons par l'accent $'$ les quantités relatives à la position inverse, nous aurons

$$\text{A} = \alpha - k(\nu_0 - m') + \delta c'_0.$$

De la combinaison de cette équation avec la précédente on tire

$$\nu_0 = \frac{1}{2}(m + m') + \frac{1}{2}\frac{\delta c'_0 - \delta c_0}{k}. \tag{33}$$

On voit ainsi que la valeur de ν_0, déterminée sans avoir égard à l'irrégularité des tourillons, doit recevoir la correction

$$\delta\nu_0 = \frac{1}{2}\frac{\delta c'_0 - \delta c_0}{k}. \tag{34}$$

En appliquant cette formule à la Lunette méridienne de l'Observatoire impérial, on aura, si l'on se rappelle que δc_0 est la valeur de δc quand $h = 0$,

$$\delta c'_0 = -0^s,003 \quad \text{et} \quad \delta c_0 = -0^s,013;$$

la valeur de k étant d'ailleurs $2^s,87\ldots$, il s'ensuit

$$k\,\delta\nu_0 = +0^s,005, \qquad \delta\nu_0 = +0^t,0017.$$

La valeur de la constante c est, comme on le sait,

$$c = \pm k(\nu_0 - \nu). \tag{35}$$

Les collimations employées devraient recevoir la correction $\pm k\delta v_0$, ou

$$\pm 0^s{,}005 \qquad \text{Pos.} \begin{cases} \text{dir.} \\ \text{inv.} \end{cases}$$

indépendamment des corrections δc.

Ces corrections doivent réagir sur les autres constantes instrumentales.

Les valeurs de δc étant de l'ordre de grandeur de la constante de l'aberration diurne, il serait convenable d'y avoir égard dans la réduction des observations. Pour cela, il serait nécessaire de déterminer tous les ans, par exemple, les valeurs de δc, en employant, s'il est possible, des points de figure bien définie. Mais il est à craindre que ces corrections ne soient qu'une faible fraction de celles que réclamerait la considération des flexions dites *latérales*, sur lesquelles nous reviendrons dans un autre Mémoire.

DÉTERMINATION

DE

L'ORBITE DE LA PLANÈTE EUGÉNIE;

PAR M. M. LOEVY.

La planète Eugénie a été découverte par M. Goldschmidt dans la nuit du 26 juin de l'année 1857. Elle est la quarante-cinquième du groupe d'astéroïdes et compte déjà au nombre des faibles. Son éclat dans l'opposition moyenne, c'est-à-dire si elle se trouvait à sa distance moyenne a du Soleil et $a - 1$ de la Terre, serait celui d'une étoile de grandeur 10,8. La position australe de la planète d'une part, cette circonstance qu'elle n'a été trouvée qu'après l'opposition, et enfin les découvertes de Hestia, Aglaïa, Doris et Palès, qui se succédèrent coup sur coup, ont fait que les observations, même dans la première apparition, sont peu nombreuses.

Les conditions normales pour la détermination d'un système d'éléments exacts n'étaient pas fournies par les deux premières oppositions. Les observations n'embrassant qu'un court espace de temps autour des oppositions respectives ne conduisaient, pour ainsi dire, qu'à la connaissance de deux points de l'orbite; il en résultait nécessairement une grande incertitude dans les valeurs des éléments. La réunion des observations des trois apparitions offrait bien les conditions fondamentales pour une solution favorable en fixant la position des trois points suffisamment espacés, mais il y avait encore d'autres raisons qui s'opposaient à une détermination plus exacte de l'orbite.

La recherche suivante est fondée sur toutes les observations de quatre apparitions, à l'exception de l'observation de Berlin du 15 septembre 1857. Étant trop

isolée, elle ne pouvait pas être combinée avec les autres; son emploi comme position normale aurait donné, à cause d'une unique observation, trop de prépondérance à l'opposition de 1857. On aurait pu éviter cet inconvénient en appliquant, aux équations qui servent pour trouver les corrections des éléments, les poids correspondants au nombre des observations des lieux normaux; mais cette observation aurait perdu alors, par cela même, une partie de son importance.

L'arc héliocentrique ayant augmenté considérablement par la quatrième opposition, en croissant de 187° à 292°, a permis de déterminer avec précision le mouvement diurne; l'incertitude sur le périhélie occasionnée par la faible excentricité fut également éliminée par les conditions que la quatrième opposition apportait; de sorte que les éléments déduits finalement peuvent être regardés comme bien approchés. Les apparitions futures de l'astre ne leur feront subir que de très-petites corrections.

Les travaux sur le mouvement de cette planète pour les deux premières oppositions ont été publiés dans les *Comptes rendus* de l'Académie des Sciences de Vienne; un extrait du travail déterminant l'orbite d'après les observations des trois oppositions se trouve dans le Bulletin de l'Observatoire impérial de Paris. La nature du problème ne permettait pas de déduire une orbite exacte; toutefois, on avait mis le plus grand soin à trouver dans chaque cas avec les données les éléments les plus probables, afin d'obtenir, pour l'éphéméride de l'apparition future, les limites les plus étroites entre lesquelles l'astre devrait se trouver nécessairement. Les erreurs de ces éphémérides sont aussi, en réalité, restées toujours inférieures aux limites données par la théorie.

Le présent travail est en grande partie indépendant des recherches antérieures. Il aurait été peu avantageux pour la simplicité, et même nuisible pour la précision, d'utiliser les anciens éléments du calcul. Les éphémérides, d'une part, construites toujours d'avance pour les oppositions prochaines, ont donné encore des écarts qui ne restaient proportionnels au temps que durant un court intervalle, de sorte que la discussion des observations peu nombreuses était rendue difficile; il fallait en outre former beaucoup de lieux normaux, circonstance qui ne pouvait plus rester compatible avec la simplicité du calcul, à cause du nombre croissant des oppositions. Il y avait d'autre part cet inconvénient, que la distance de l'astre à la Terre, adoptée pour la réduction des observations des premières oppositions, n'était pas bien connue. On aurait pu, dans des circonstances plus normales, se permettre de négliger les petites inexactitudes dont ces observations se trouvaient par suite nécessairement entachées, mais, d'un autre côté, les observations peu nombreuses et les conditions géométriques défavorables réclamèrent la plus grande

rigueur dans la détermination de l'orbite. Il n'était plus permis alors de laisser subsister des erreurs qui, provenant des corrections de parallaxe et d'aberration, affectaient les observations d'une manière systématique. En dernier lieu, les perturbations conclues avec des coordonnées d'une exactitude insuffisante pouvaient faire naître également des erreurs de même nature. D'après toutes ces considérations, on était conduit à n'utiliser des travaux antérieurs qu'une partie des perturbations et que ceux des éléments du calcul qui ne dépendent pas de l'orbite. Tout le travail a été recommencé en prenant pour points de repère les éléments fournis par les trois dernières oppositions, publiés dans le Bulletin de l'Observatoire impérial de Paris. Les éphémérides auxquelles les observations ont été comparées sont donc calculées d'après ce système d'éléments. Cette mesure offrait encore l'avantage de tenir compte de quelques observations publiées tardivement d'après les oppositions respectives.

Eléments tirés de l'ensemble de trois oppositions.

Anomalie moyenne.........	64°.51'.21",2	1858,0 Janv. t. m. de Berlin.
Périhélie..................	229.42. 3,6	Équin. 1857,0 Janv.
Nœud....................	148. 5. 2,8	Équin. 1857,0 Janv.
Inclinaison................	6.34.55,8	
Mouvement diurne.........	13.10,95527	
Excentricité...............	4.43.26,5	

Le mouvement elliptique de l'astre se trouvant considérablement troublé par les actions de Jupiter et de Saturne, on a déterminé les perturbations que ces deux planètes produisent sur les coordonnées rectangulaires en appliquant aux formules, pour le mouvement de trois corps, la méthode de la quadrature mécanique donnée par Encke. L'effet des autres planètes a été omis comme quantité négligeable. Cette hypothèse était d'ailleurs pleinement justifiée, car le tableau des erreurs inévitables que l'orbite résultante présente, ne montrant aucune déviation systématique, prouve que les valeurs négligées sont d'un ordre inférieur et se confondent avec les erreurs des observations. La masse de Jupiter a été adoptée égale à $\frac{1}{1053,924}$; celle de Saturne égale à $\frac{1}{3501,6}$. On n'a pas employé de déterminations plus modernes pour ne pas interrompre l'homogénéité du calcul. Les perturbations antérieures se fondant sur ces masses, il n'était plus à propos d'introduire de nouvelles valeurs. En agissant ainsi, il était plus facile, dans le cas d'une anomalie constante, de porter un jugement sur sa nature et de voir si la discordance dispa-

raîtrait en adoptant une autre masse. Le résultat, du reste, prouve que ces valeurs choisies ont été satisfaisantes pour le but proposé.

Les perturbations ont été calculées de 30 en 30 jours, intervalle pour lequel la marche des différences a déjà une régularité qui permet d'apercevoir et d'éliminer même les petites erreurs; précaution qui est ici, comme on verra, indispensable pour la précision. Elles se rapportent, jusqu'au 2 janvier 1860, à des coordonnées de l'astre tirées du système précédent d'éléments A; la suite se base sur celles du système d'éléments B (*voir* ci-après), conclu préalablement de toutes les quatre oppositions. Toutefois les éphémérides, pour cet espace de temps, ont été nécessairement construites avec des perturbations résultant de l'emploi du système A et suffisamment exactes pour cet objet. La reprise des perturbations depuis 1860, 2 janvier était réclamée par une raison sérieuse. Les actions ξ, η et ζ de Jupiter et de Saturne sur les coordonnées rectangulaires s'obtiennent en soumettant, d'après la méthode de quadrature mécanique, les valeurs numériques de $\frac{d^2\xi}{dt^2}$, $\frac{d^2\eta}{dt^2}$ et $\frac{d^2\zeta}{dt^2}$ à une double intégration. Il s'ensuit qu'une inexactitude commise dans la détermination d'un de ces coefficients différentiels produirait, par le procédé d'intégration, une déviation systématique sur toutes les valeurs consécutives de ξ, η et ζ, et cette influence est directement proportionnelle au nombre d'intervalles écoulés entre l'époque de l'erreur et celle à laquelle ξ, η et ζ se rapportent. Aussi, d'après cette considération, bien qu'il ait été permis, lorsqu'il s'agissait des éphémérides, de ne pas tenir compte de petites erreurs portant sur la septième décimale, on ne pouvait en aucune façon laisser subsister ici, dans le cas des perturbations, une accumulation d'erreurs du même genre provenant des coordonnées inexactes de l'astre. De même, afin d'éviter des erreurs accidentelles portant sur la septième décimale, on se trouvait obligé de faire le calcul à neuf décimales.

Perturbations de Jupiter et Saturne fondées sur les éléments osculateurs de 1857, 1 *juillet.*

		ξ	η	ζ
1857	Juin 16	− 6	− 2	− 1
	Juill. 16	− 6	− 2	− 1
	Août 15	− 56	− 16	− 8
	Sept. 14	− 154	− 45	− 22
	Oct. 14	− 298	− 88	− 44
	Nov. 13	− 484	− 144	− 71
	Déc. 13	− 712	− 209	− 104
1858	Janv. 12	− 980	− 278	− 139
	Févr. 11	− 1289	− 344	− 174
	Mars 13	− 1646	− 398	− 204
	Avril 12	− 2057	− 432	− 226
	Mai 12	− 2538	− 439	− 236
	Juin 11	− 3104	− 413	− 229
	Juill. 11	− 3777	− 354	− 203
	Août 10	− 4581	− 263	− 155
	Sept. 9	− 5542	− 150	− 87
	Oct. 9	− 6686	− 27	+ 1
	Nov. 8	− 8040	+ 85	+ 106
	Déc. 8	− 9626	+ 159	+ 221
1859	Janv. 7	− 11463	+ 164	+ 339
	Févr. 6	− 13569	+ 62	+ 451
	Mars 8	− 15949	− 190	+ 545
	Avril 7	− 18603	− 636	+ 607
	Mai 7	− 21520	− 1325	+ 625
	Juin 6	− 24679	− 2303	+ 583
	Juill. 6	− 28047	− 3613	+ 468
	Août 5	− 31578	− 5295	+ 266
	Sept. 4	− 35212	− 7377	− 33
	Oct. 4	− 38879	− 9876	− 438
	Nov. 3	− 42497	− 12794	− 952
	Déc. 3	− 45971	− 16109	− 1571
1860	Janv. 2	− 49202	− 19776	− 2287
	Févr. 1	− 52088	− 23720	− 3079
	Mars 2	− 54532	− 27835	− 3922
	Avril 1	− 56445	− 31984	− 4777
	Mai 1	− 57756	− 35998	− 5598
	Mai 31	− 58428	− 39681	− 6332
	Juin 30	− 58462	− 42822	− 6918
	Juill. 30	− 57917	− 45203	− 7293
	Août 29	− 56918	− 46617	− 7394
	Sept. 28	− 55660	− 46887	− 7165
	Oct. 28	− 54412	− 45887	− 6562
	Nov. 27	− 53507	− 43564	− 5558
	Déc. 27	− 53324	− 39959	− 4153
1861	Janv. 26	− 54264	− 35223	− 2380
	Févr. 25	− 56713	− 29625	− 311
	Mars 27	− 60998	− 23556	+ 1945
	Avril 26	− 67354	− 17504	+ 4240
	Mai 26	− 75867	− 12041	+ 6394
	Juin 25	− 86474	− 7769	+ 8209
	Juill. 25	− 98914	− 5280	+ 9480
	Août 24	− 112756	− 5091	+ 10017
	Sept. 23	− 127408	− 7604	+ 9659
	Oct. 23	− 142168	− 13053	+ 8259
	Nov. 22	− 156269	− 21483	+ 5871
	Déc. 22	− 168948	− 32739	+ 2397
1862	Janv. 21	− 179503	− 46480	− 2048
	Févr. 20	− 187346	− 62204	− 7329
	Mars 22	− 192043	− 79295	− 13263
	Avril 21	− 193337	− 97067	− 19632
	Mai 21	− 191153	− 114815	− 26205
	Juin 20	− 185587	− 131861	− 32744
	Juill. 20	− 176890	− 147593	− 39027
	Août 19	− 165435	− 161492	− 44854
	Sept. 18	− 151674	− 173138	− 50048

ξ, ζ et η sont les perturbations correspondantes à x, y et z, exprimées en unités de la septième décimale.

Construction des éphémérides.

L'obliquité moyenne de l'écliptique, pour l'année 1857,0 janvier, était prise égale à 23° 27′ 28″, 75, d'après les *Tabulæ Regiomontanæ* de Bessel. On obtient les coordonnées équatoriales rectangulaires perturbées x, y et z de l'astre pour l'équinoxe moyen de 1857,0, au moyen des expressions suivantes, v et r désignant

l'anomalie vraie et le rayon vecteur :

$$x = r(\bar{1},9992011)\sin(v + 319^\circ.52'.14'',85) + \xi,$$
$$y = r(\bar{1},9786232)\sin(v + 230.59.22,91) + \eta,$$
$$z = r(\bar{1},4943416)\sin(v + 219.13.18,95) + \zeta.$$

Il est presque superflu d'ajouter qu'on a mis, au lieu du premier facteur nui rique, son logarithme. ξ, η et ζ sont donnés par le tableau précédent des pertur tions. En combinant x, y et z avec les coordonnées solaires, on arrive à l'asc sion droite et à la déclinaison moyenne pour 1857,0. On conclura ensı facilement la position apparente de l'astre.

Il est bon de présenter ici les deux systèmes de formules qui ont servi pou calcul des constantes dans les termes ci-dessus. En effet, cette double déterminat est très-importante, pour éviter une erreur constante dans les éphémérides, (serait difficile à découvrir.

Soient :

i L'inclinaison de l'orbite avec l'écliptique ;
i_0 L'inclinaison de l'orbite avec l'équateur ;
e L'obliquité de l'écliptique ;
Ω Le nœud scendant sur l'écliptique ;
Ω_0 Le nœud ascendant sur l'équateur ;
Δ_0 L'arc de l'orbite compris entre l'écliptique et l'équateur ;
ϖ La longitude du périhélie.

Alors on trouvera, par une méthode analytique, en transformant les coor nées rectangulaires dans le plan de l'orbite en coordonnées équatoriales, le mier système :

$$\tang \mathfrak{A} = -\frac{\cot \Omega}{\cos i}, \qquad \sin a = \frac{\cos \Omega}{\sin \mathfrak{A}}, \qquad \tang \psi = \frac{\tang i}{\cos \Omega},$$

$$\tang \mathfrak{B} = \frac{\sin \Omega \cos e \sin \psi}{\sin i \cos(\psi + e)}, \qquad \sin b = \frac{\cos e \sin \Omega}{\sin \mathfrak{B}},$$

$$\tang \mathfrak{C} = \frac{\sin \Omega \sin e \sin \psi}{\sin i \sin(\psi + e)}, \qquad \sin c = \frac{\sin e \sin \Omega}{\sin \mathfrak{C}}.$$

Posant

$$\mathfrak{A}' = \mathfrak{A} + \varpi - \Omega,$$
$$\mathfrak{B}' = \mathfrak{B} + \varpi - \Omega,$$
$$\mathfrak{C}' = \mathfrak{C} + \varpi - \Omega,$$

0^h de Berlin.		Asc. droite.	Déclinaison.	log Δ.	log *r*.
		h m s	° ′ ″		
1857 Juill.	5	16.20.48,72	−11.59. 0,5	0,216 9322	0,401 6950
	6	16.20.27,06	−12. 1.47,6		
	7	16.20. 6,96	−12. 4.40,7		
	8	16.19.48,41	−12. 7.39,6		
	9	16.19.31,43	−12.10.44,1	0,225 5398	0,401 9966
	10	16.19.16,03	−12.13.54,2		
	11	16.19. 2,21	−12.17. 9,7		
	12	16.18.49,99	−12.20.30,5		
	13	16.18.39,37	−12.23.56,6	0,234 6632	0,402 3068
	14	16.18.30,37	−12.27.27,7		
	15	16.18.22,97	−12.31. 3,9		
	16	16.18.17,18	−12.34.45,0		
	17	16.18.13,00	−12.38.30,9	0,244 2164	0,402 6256
	18	16.18.10,43	−12.42.21,4		
	19	16.18. 9,49	−12.46.16,4		
	20	16.18.10,17	−12.50.15,9		
	21	16.18.12,47	−12.54.19,5	0,254 1150	0,402 9530
	22	16.18.16,38	−12.58.27,2		
	23	16.18.21,90	−13. 2.39,0		
	24	16.18.29,03	−13. 6.54,6		
	25	16.18.37,75	−13.11.13,9	0,264 2783	0,403 2890
	26	16.18.48,05	−13.15.36,8		
	27	16.18.59,94	−13.20. 3,0		
	28	16.19.13,39	−13.24.32,5		
	29	16.19.28,40	−13.29. 5,0	0,274 6280	0,403 6330
	30	16.19.44,94	−13.33.40,5		
	31	16.20. 3,01	−13.38.18,8		
Août	1	16.20.22,59	−13.42.59,7		
	2	16.20.43,67	−13.47.43,3	0,285 0972	0,403 9852
	3	16.21. 6,23	−13.52.29,3		
	4	16.21.30,26	−13.57.17,5		
	5	16.21.55,74	−14. 2. 7,8		
	6	16.22.22,66	−14. 7. 0,0	0,295 6284	0,404 3456
	7	16.22.51,01	−14.11.54,0		
	8	16.23.20,76	−14.16.49,9		
	9	16.23.51,90	−14.21.47,4		
	10	16.24.24,43	−14.26.46,5	0,306 1740	0,404 7136
	11	16.24.58,33	−14.31.47,0		
	12	16.25.33,58	−14.36.48,7		
	13	16.26.10,17	−14.41.51,6		
	14	16.26.48,09	−14.46.55,5	0,316 6940	0,405 0894
	15	16.27.27,32	−14.52. 0,3		
	16	16.28. 7,86	−14.57. 5,9		
	17	16.28.49,69	−15. 2.12,2		
	18	16.29.32,81	−15. 7.19,1	0,327 1526	0,405 4732
	19	16.30.17,19	−15.12.26,5		

0h de Berlin.		Asc. droite.	Déclinaison.	log Δ.	log r.
		h m s	° ′ ″		
1857 Août	20	16.31. 2,82	−15.17.34,1		
	21	16.31.49,68	−15.22.41,9		
	22	16.32.37,76	−15.27.49,8	0,337 5123	0.405 8638
	23	16.33.27,04	−15.32.57,7		
	24	16.34.17,51	−15.38. 5,4		
	25	16.35. 9,15	−15.43.12,8		
	26	16.36. 1,94	−15.48.19,8	0,347 7427	0,406 2620
1858 Août	8	0.33.12,39	− 0.13. 3,8	0,318 8676	0,450 7160
	9	0.33. 8,67	− 0.16.29,5		
	10	0.33. 3,57	− 0.20. 4,7		
	11	0.32.57,09	− 0.23.49,1		
	12	0.32.49,23	− 0.27.42,9	0,310 9503	0,451 1660
	13	0.32.40,01	− 0.31.45,8		
	14	0.32.29,41	− 0.35.57,8		
	15	0.32.17,46	− 0.40.18,7		
	16	0.32. 4,15	− 0.44.48,4	0,303 4456	0,451 6116
	17	0.31.49,51	− 0.49.26,8		
	18	0.31.33,52	− 0.54.13,8		
	19	0.31.16,20	− 0.59. 9,2		
	20	0.30.57,57	− 1. 4.12,8	0,296 4363	0,452 0524
	21	0.30.37,64	− 1. 9.24,6		
	22	0.30.16,40	− 1.14.44,3		
	23	0.29.53,88	− 1.20.11,8		
	24	0.29.30,09	− 1.25.46,9	0,290 0084	0,452 4890
	25	0.29. 5,06	− 1.31.29,4		
	26	0.28.38,80	− 1.37.19,1		
	27	0.28.11,32	− 1.43.15,8		
	28	0.27.42,65	− 1.49.19,3	0,284 2417	0,452 9208
Sept.	13	0.17.44,94	− 3.37.34,0	0,269 4651	0,454 5996
	14	0.17. 0,83	− 3.44.44,1		
	15	0.16.16,20	− 3.51.54,5		
	16	0.15.31,10	− 3.59. 5,0		
	17	0.14.45,58	− 4. 6.15,0	0,268 1904	0,455 0070
	18	0.13.59,70	− 4.13.24,2		
	19	0.13.13,49	− 4.20.32,2		
	20	0.12.27,02	− 4.27.38,6		
	21	0.11.40,33	− 4.34.42,9	0,267 9666	0,455 4096
	22	0.10.53,48	− 4.41.44,8		
	23	0.10. 6,52	− 4.48.43,9		
	24	0. 9.19,50	− 4.55.39,7		
	25	0. 8.32,48	− 5. 2.31,9	0,268 8058	0,455 8070
	26	0. 7.45,50	− 5. 9.20,2		
	27	0. 6.58,62	− 5.16. 4,0		
	28	0. 6.11,88	− 5.22.43,0		
	29	0. 5.25,35	− 5.29.16,9	0,270 7029	0,456 1992

0ʰ de Berlin.		Asc. droite.	Déclinaison.	log Δ.	log r.
		h m s	° ′ ″		
1858 Sept.	30	0. 4.39,07	− 5.35.45,3		
Oct.	1	0. 3.53,10	− 5.42. 7,9		
	2	0. 3. 7,48	− 5.48.24,2		
	3	0. 2.22,27	− 5.54.33,9	0,273 6410	0,456 5862
1859 Déc.	18	5.46.31,36	+14.39. 0,4	0,282 1595	0,461 3668
	19	5.45.34,03	+14.39.35,7		
	20	5.44.36,67	+14.40.15,0		
	21	5.43.39,34	+14.40.58,3		
	22	5.42.42,13	+14.41.45,5	0,282 1331	0,461 0562
	23	5.41.45,10	+14.42.36,6		
	24	5.40.48,31	+14.43.31,8		
	25	5.39.51,83	+14.44.31,0		
	26	5.38.55,73	+14.45.34,1	0,283 1871	0,460 7398
	27	5.38. 0,08	+14.46.41,2		
	28	5.37. 4,93	+14.47.52,1		
	29	5.36.10,34	+14.49. 6,9		
	30	5.35.16,38	+14.50.25,5	0,285 2985	0,460 4176
	31	5.34.23,10	+14.51.47,9		
1860 Janv.	1	5.33.30,57	+14.53.14,1		
	2	5.32.38,83	+14.54.44,0		
	3	5.31.47,95	+14.56.17,7	0,288 4221	0,460 0896
	4	5.30.57,97	+14.57.55,0		
	5	5.30. 8,93	+14.59.36,0		
	6	5.29.20,88	+15. 1.20,6		
	7	5.28.33,87	+15. 3. 8,7	0,292 4958	0,459 7558
	8	5.27.47,93	+15. 5. 0,3		
	9	5.27. 3,15	+15. 6.55,4		
	10	5.26.19,51	+15. 8.54,0		
	11	5.25.37,07	+15.10.55,9	0,297 4476	0,459 4166
	12	5.24.55,88	+15.13. 1,3		
	13	5.24.15,95	+15.15. 9,9		
	14	5.23.37,32	+15.17.21,8		
	15	5.23. 0,03	+15.19.36,9	0,303 1993	0,459 0718
	16	5.22.24,10	+15.21.55,1		
	17	5.21.49,58	+15.24.16,5		
	18	5.21.16,50	+15.26.40,9		
	19	5.20.44,86	+15.29. 8,4	0,309 6660	0,458 7212
	20	5.20.14,69	+15.31.38,8		
	21	5.19.46,04	+15.34.12,1		
	22	5.19.18,92	+15.36.48,3		
	23	5.18.53,34	+15.39.27,2	0,316 7592	0,458 3652
	24	5.18.29,32	+15.42. 8,7		
	25	5.18. 6,86	+15.44.52,9		
	26	5.17.45,99	+15.47.39,5		
	27	5.17.26,72	+15.50.28,6	0,324 3838	0,458 0036

0h de Berlin.		Asc. droite.	Déclinaison.	log Δ.	log r.
		h m s	° ′ ″		
1861 Mars	17	12.51.43,98	+ 1.31.59,3	0,199 7088	0,406 5798
	18	12.51. 3,37	+ 1.39.37,6		
	19	12.50.21,94	+ 1.47.17,5		
	20	12.49.39,78	+ 1.54.58,4		
	21	12.48.56,86	+ 2. 2.39,9	0,195 8849	0,406 1764
	22	12.48.13,34	+ 2.10.21,4		
	23	12.47.29,23	+ 2.18. 2,6		
	24	12.46.44,59	+ 2.25.42,9		
	25	12.45.59,46	+ 2.33.21,9	0,193 2253	0,405 7798
	26	12.45.13,95	+ 2.40.58,8		
	27	12.44.28,17	+ 2.48.33,6		
	28	12.43.41,88	+ 2.56. 5,5		
	29	12.42.55,44	+ 3. 3.34,1	0,191 7644	0,405 3906
	30	12.42. 8,82	+ 3.10.59,0		
	31	12.41.22,09	+ 3.18.19,6		
Avril	1	12.40.35,31	+ 3.25.35,3		
	2	12.39.48,52	+ 3.32.45,7	0,191 5181	0,405 0090
	3	12.39. 1,83	+ 3.39.50,3		
	4	12.38.15,25	+ 3.46.48,9		
	5	12.37.28,88	+ 3.53.40,8		
	6	12.36.42,74	+ 4. 0.25,7	0,192 4826	0,404 6346
	7	12.35.56,92	+ 4. 7. 2,9		
	8	12.35.11,51	+ 4.13.32,1		
	9	12.34.26,54	+ 4.19.52,8		
	10	12.33.42,11	+ 4.26. 4,8	0,194 6314	0,404 2682
	11	12.32.58,20	+ 4.32. 7,6		
	12	12.32.14,94	+ 4.38. 0,8		
	13	12.31.32,40	+ 4.43.44,0		
	14	12.30.50,58	+ 4.49.17,2	0,197 9130	0,403 9094
	15	12.30. 9,56	+ 4.54.39,8		
	16	12.29.29,39	+ 4.59.51,6		
	17	12.28.50,14	+ 5. 4.52,3		
	18	12.28.11,78	+ 5. 9.41,6	0,202 2536	0,403 5590
	19	12.27.34,44	+ 5.14.19,4		
	20	12.26.58,13	+ 5.18.45,8		
	21	12.26.22,87	+ 5.23. 0,5		
	22	12.25.48,71	+ 5.27. 3,6	0,207 5607	0,403 2166
	23	12.25.15,70	+ 5.30.54,2		
	24	12.24.43,86	+ 5.34.32,8		
	25	12.24.13,22	+ 5.37.59,0		
	26	12.23.43,80	+ 5.41.13,0	0,213 7374	0,402 8824
	27	12.23.15,63	+ 5.44.14,5		
	28	12.22.48,75	+ 5.47. 3,5		
	29	12.22.23,18	+ 5.49.40,1		
	30	12.21.58,92	+ 5.52. 4,2	0,220 6860	0,402 5568

La comparaison des observations exposée ci-après se rapporte aux éphémérides précédentes. On reconnaît par ce tableau que l'orbite représente bien, pour les circonstances données, les observations de trois premières oppositions. La marche constante que présentent les erreurs pendant un certain intervalle de temps n'est en réalité qu'apparente, et cela se déduit des considérations suivantes. Par cela même que les éléments *doivent* satisfaire partout également aux observations, l'orbite *doit* passer au milieu de toutes les positions normales. La partie la plus essentielle de cette différence, qui reste encore entre l'orbite et le lieu normal, se compose des erreurs inévitables des observations. Dans la comparaison directe des éléments avec les observations isolées, il faut nécessairement que cette erreur du lieu normal se reproduise, c'est-à-dire que la série d'observations, au moyen de laquelle cette position a été conclue, montrera un écart constant égal à la différence entre l'orbite et la position normale. On ne peut pas toutefois regarder l'erreur que les éléments conclus laissent pour une opposition, comme un écart purement accidentel d'une série d'observations dans un certain sens. Il y a deux sortes de causes capables de faire naître de petites erreurs systématiques, qu'on ne peut jamais éliminer tout à fait, les unes provenant des positions des étoiles auxquelles l'astre a été comparé, les autres des légères inexactitudes que la théorie laisse encore subsister. Il arrive, dans le premier cas, en raison de l'espace très-limité du ciel parcouru par l'astre pendant chaque apparition, que toutes les positions des étoiles de comparaison, de quelque façon qu'on les détermine, se rapporteront toujours à peu près aux mêmes fondamentales; elles seront donc nécessairement entachées de l'erreur moyenne de ces fondamentales. Une source d'erreurs plus graves vient de ce que les étoiles de la même région du ciel sont généralement puisées dans les mêmes catalogues et que ces catalogues se rapportent ordinairement à une époque assez éloignée. Ces positions ainsi conclues, l'exactitude de l'observation de l'astre sera altérée, et par l'erreur constante du catalogue, et par celle qui dérive des éléments de réductions à l'aide desquels on passe d'un équinoxe reculé à celui de l'époque des observations. Les erreurs du second genre se produisent parce qu'on emploie souvent des constantes et d'autres données qui ne sont pas tout à fait rigoureuses, comme par exemple les masses et les coordonnées des planètes perturbatrices et les coordonnées solaires. Bien qu'on puisse supposer que ces erreurs, appartenant du reste à un ordre inférieur, se détruiront en grande partie, il y a des cas où elles peuvent par hasard s'ajouter et produire un effet sensible.

Le cas actuel donne lieu à une cause exceptionnelle d'une légère déviation systématique, provenant de ce que le mouvement diurne, comme on le verra plus tard, ne pouvait pas être déterminé avec précision, au moyen des observations des

trois premières oppositions. L'analyse indique cette indétermination : on peut en effet choisir pour cette inconnue, entre de larges limites, des valeurs arbitraires, sans que les résidus des équations en soient changés essentiellement. Si donc on représente par $\alpha + \beta\, d\mu$, $\alpha' + \beta' d\mu, \ldots$ le résultat obtenu par une élimination successive des autres inconnues entre les équations servant à corriger les éléments, on verra, dans le cas d'une indétermination, que le coefficient β de $d\mu$ est très-petit ; de telle sorte qu'une grande valeur de la correction $d\mu$ pourrait seule entraîner une modification des quantités α, $\alpha', \ldots$, lesquelles forment les résidus des équations et présentent également les erreurs que les éléments conclus laissent pour les observations. D'un autre côté, il est essentiel, pour arriver tout à fait au minimum des erreurs, de déterminer simultanément les six éléments. En se bornant à la correction de quelques-uns au moyen de la différence *Observation — Calcul*, on parviendrait à faire évanouir seulement une partie de cette différence. Il faudrait donc aussi, dans le cas où le mouvement diurne ne pourrait pas s'obtenir avec précision, déduire sa valeur la plus probable, afin d'éviter une légère inexactitude dans les résidus des équations ; mais on ne peut atteindre ce but, d'après ce qui est dit plus haut, qu'en adoptant une forte correction pour $d\mu$. L'introduction d'une semblable hypothèse dans le calcul amène un grand inconvénient. En effet, si on ajoute aux éléments des valeurs considérables, les équations différentielles du premier degré ne suffiront plus pour donner entièrement les changements relatifs des lieux géocentriques : donc on serait aussi obligé de tenir compte des termes du second ordre, travail qui ne serait nullement en rapport avec le résultat à obtenir. Un procédé plus avantageux dans ces conditions consiste à essayer des approximations successives : on corrige d'abord les éléments en négligeant les seconds termes. La comparaison directe alors ne présentera plus, il est vrai, le même tableau d'erreurs restantes que les équations, mais on peut répéter le procédé et l'appliquer de nouveau aux éléments ayant déjà subi une première correction. En opérant ainsi plusieurs fois, on arrivera à représenter les observations d'une manière très-satisfaisante. Il sera toutefois difficile, à moins de répéter l'expérience indéfiniment, de faire disparaître du tableau d'erreurs une trace légère d'un écart systématique ; car les déterminations récentes de $d\mu$, obtenues par plusieurs essais, seront encore assez considérables pour que la comparaison directe ne soit pas tout à fait identique aux résidus des équations. Les éléments des trois premières oppositions ont été adoptés d'après trois approximations semblables.

Observations et comparaisons aux éphémérides.

Première opposition.

Lieux.	Temps moyen des lieux.		Asc. droite.	$\frac{o-c}{d\alpha}$	Déclinaison.	$\frac{o-c}{d\delta}$
		h m s	h m s	s	° ′ ″	″
Berlin......	1857 Juill. 2.	11.36.24	16.21.49,75	− 0,32	−11.52.31,8	− 1,6
Berlin......	8.	12. 0.22	16.19.39,48	− 0,26	−12. 9.15,3	− 1,5
Berlin......	13.	12.18. 4	16.18.34,33	− 0,14	−12.25.45,7	+ 0,6
Bilk........	14.	11. 5.37	16.18.26,60	+ 0,04	−12.29. 5,6	+ 7,7
Berlin......	14.	11.43. 9	16.18.26,18	− 0,31	−12.29.11,6	+ 3,2
Bonn.......	14.	11.36. 0	16.18.26,58	+ 0,21	−12.29. 6,5	+11,6
Vienne.....	15.	11.16. 6	16.18.19,78	− 0,19	−12.32.47,0	+ 2,0
Bonn.......	18.	11. 3.52	16.18. 9,77	+ 0,11	−12.44.11,3	+ 3,8
Berlin......	20.	11.37.59	16.18.10,56	− 0,35	−12.52.15,6	− 0,6
Berlin......	25.	10.43.13	16.18.42,26	+ 0,33	−13.13. 9,1	+ 3,1
Bonn.......	26.	10.19. 9	16.18.52,80	− 0,14	−13.17.37,2	− 0,5
Berlin......	26.	11.13. 8	16.18.53,25	+ 0,07	−13.17.38,9	+ 3,1
Bonn.......	27.	11. 0.34	16.19. 6,66	+ 0,78	−13.22. 4,4	+ 7,5
Vienne.....	1857 Août 11.	9.24.48	16.25.11,17	− 0,01		
Berlin......	11.	10.19.42	16.25.12,46	− 0,33	−14.33.56,1	+ 0,7
Vienne.....	12.	9.34.40	16.25.47,09	− 0,06	−14.38.34,0	+13,4
Vienne.....	12.	9.49.52	16.25.46,82	− 0,73	−14.38.44,4	+ 5,7
Leiden.....	12.	9.45. 5	16.25.47,93	− 0,71	−14.38.59,7	− 0,4
Berlin......	12.	10.14.20	16.25.48,02	− 0,46	−14.38.54,3	+ 3,6
Leiden.....	22.	9.34. 5	16.32.57,03	− 0,72	−15.29.47,4	+12,4
Berlin......	25.	9.45.47	16.35.29,04	− 0,65	−15.45.11,9	+ 5,1
Leiden.....	26.	9.29.50	16.36.22,80	− 0,87	−15.50.23,8	+ 4,3

La marche des erreurs du 2 juillet jusqu'au 27 juillet semble être la même; elle est un peu différente pour les observations entre le 11 août et le 26 août. L'intervalle du temps qui sépare ces deux séries offre en outre une raison naturelle pour en former deux positions normales.

On n'a employé que la moyenne de deux observations du même jour faites à Vienne le 12 août, afin de ne pas donner trop de prépondérance aux observations du même observatoire.

L'observation du 27 juillet de Bonn a été exclue, ainsi que l'observation de la déclinaison du 14 juillet. On obtient ensuite :

Lieu I....	1857 Juillet 16,7	$d\alpha \cos\delta - 0^s,078$	Juillet 16,9	$d\delta = +1'',75$
Lieu II...	Août 16,8	$d\alpha \cos\delta - 0,500$	Août 17,5	$d\delta = +5,03$

Observations et comparaisons aux éphémérides.

Deuxième opposition.

Lieux.	Temps moyen des lieux.		Asc. droite.	$\frac{o-c}{d\mathcal{A}}$	Déclinaison.	$\frac{o-c}{d\mathcal{D}}$
		h m s	h m s	s	° ′ ″	″
Berlin......	1858 Août 11.	13.11.18	0.32.52,90	+ 0,11	− 0.25.56,2	+ 0,8
Berlin......	17.	14.52.56	0.31.39,68	+ 0,05	− 0.52.27,4	− 3,3
Berlin......	19.	14.48.17	0.31. 5,08	+ 0,32	− 1. 2.16,6	− 0,9
Berlin......	22.	13.11.43	0.30. 4,53	+ 0,36	− 1.17.45,5	− 2,2
Bilk........	Sept. 13.	13.31.10	0.17.20,02	+ 0,81	− 3.41.37,4	+ 0,4
Vienne.....	14.	9.47.59	0.16.43,88	+ 0,36		
Vienne.....	14.	10.29.54	0.16.42,46	+ 0,69	− 3.47.39,2	+ 3,0
Berlin......	21.	10. 2. 3	0.11.21,44	+ 0,09	− 4.37.34,2	+ 4,8
Berlin......	22.	13.43.18	0.10.27,50	+ 0,45	− 4.45.44,8	− 0,4
Vienne.....	30.	9.21.59	0. 4.21,46	− 0,61	− 5.38. 8,0	+ 3,8

On n'a tiré de tout le groupe de ces observations qu'un lieu unique. Le petit changement dans la marche des erreurs a pu être considéré comme proportionnel au temps.

L'observation du 30 septembre a été rejetée. On arrivera aux nombres donnés dans le tableau, pour les observations de Bilk et de Vienne des 13 et 14 septembre, en ajoutant au résultat de la comparaison $d\mathcal{A} = +0^s,55$, $d\mathcal{D} = -5'',7$. On a adopté pour l'étoile commune de comparaison la position méridienne $\mathcal{A} = 0^h\,13^m\,48^s,07$, $\mathcal{D} = -3^\circ\,42'\,53'',6$, au lieu de $0^h\,13^m\,47^s,52$ et $-3^\circ\,42'\,47'',9$.

Lieu III.... 1858 Sept. 3,7 $d\mathcal{A}\cos\mathcal{D} = +0^s,360$ Sept. 2,4 $d\mathcal{D} = +0'',27$

Observations et comparaisons aux éphémérides.

Troisième opposition.

Lieux.	Temps moyen des lieux.		Asc. droite.	$\frac{o-c}{d\mathcal{A}}$	Déclinaison.	$\frac{o-c}{d\mathcal{D}}$
		h m s	h m s	s	° ′ ″	″
Vienne.....	1859 Déc. 21.	7.38.18	5.43.22,18	− 0,23	+14.41.13,1	+ 4,1
Kœnigsberg.	21.	10.30.17	5.43.15,67	− 0,44	+14.41.19,1	+ 5.0
Vienne.....	28.	7.15.49	5.36.49,11	− 0,47	+14.48.10,8	+ 0,7
Kœnigsberg.	1860 Janv. 11.	7.18. 4	5.25.26,36	− 0,08	+15.11.31,7	+ 5,4
Greenwich..	12.	9.58. 9	5.24.38,00	− 0,11	+15.13.57,4	− 0,1
Kœnigsberg.	16.	7.34.56	5.22.14,19	− 0,35	+15.22.40,1	+ 5,5
Kœnigsberg.	24.	7.33. 8	5.18.22,87	+ 0,01	+15.42.59,7	+ 7,3

L'étoile de comparaison des observations du 11 et du 16 janvier de Kœnigsberg est la même. L'observation méridienne donnée pour elle se montre, par la com-

paraison avec l'éphéméride, comme inexacte. On a pris pour elle les deux positions de Bessel, 330 et 338, qui s'accordent : Æ = $5^h 22^m 25^s,32$, ☉ = $15° 12' 53'',9$. Il y a encore une faute dans la réduction du lieu moyen au lieu apparent dans l'observation du 11. Elle doit être $2^s,22$ et $6'',4$. Les observations de la planète corrigées et adoptées ensuite sont celles-ci :

Janv. 11	Æ = $5^h.25^m.25^s,73$	☉ = $15°.11'.32'',5$
16	Æ = 5.22.13,78	☉ = 15.22.37,7

Cette opposition contient le plus petit nombre d'observations, elle ne fournit également qu'une position normale :

Lieu IV...	1860 Janv. 6	dÆ cos ☉ = $-0^s,231$	Janv. 6	d☉ = $+4'',00$

Observations et comparaisons aux éphémérides.

Quatrième opposition.

Lieux.	Temps moyen des lieux.		Asc. droite.	$\frac{o-c}{d\text{Æ}}$	Déclinaison.	$\frac{o-c}{d☉}$
		h m s	h m s	s	° ′ ″	′ ″
Berlin......	1861 Mars 17.	10. 3. 9	12.50.56,60	−30,80	+ 1.37.45,8	−2.39,0
Berlin......	Avril 4.	10.21.51	12.37.25,84	−29,70	+ 3.52. 0,1	−2.16,1
Greenwich..	5.	11.39.30	12.36.55,39	−29,68	+ 3.59.27,7	−2.17,8
Paris.......	9.	13. 2.50	12.33.31,71	−29,55	+ 4.25.36,6	−2.12,2
Paris.......	10.	9.36.52	12.32.54,48	−28,92	+ 4.30.53,7	−2.14,3
Paris.......	10.	10.13.57	12.32.53,11	−29,15	+ 4.31. 3,8	−2.15,3
Paris.......	11.	9. 5.31	12.32.11,60	−29,12	+ 4.36.44,2	−2.14,1
Paris.......	11.	9.36.22	12.32.10,61	−29,18	+ 4.36.52,4	−2.14,5
Berlin......	11.	11.28.30	12.32. 8,42	−29,31	+ 4.37. 8,9	−2.14,3
Paris.......	13.	9.20.51	12.30.45,94	−29,08	+ 4.48.14,3	−2.12,0
Berlin......	13.	11.39.19	12.30.43,49	−28,77	+ 4.48.38,0	−2.14,0
Berlin......	15.	10.55.40	12.29.22,49	−28,91	+ 4.59. 7,4	−2. 7,2
Paris.......	16.	11.21.26	12.28.41,13	−28,63	+ 5. 4.29,2	−2. 7,4
Paris.......	16.	11.49.31	12.28.40,33	−28,65	+ 5. 4.35,6	−2. 7,8
Berlin......	19.	10.31.55	12.26.50,04	−28,56	+ 5.18.20,2	−2. 4,9
Paris.......	19.	10.28,54	12.26.48,91	−28,64	+ 5.18.28,6	−2. 5,6
Greenwich..	25.	10. 7.57	12.23.31,91	−27,79	+ 5.41.22,5	−1.54,7
Greenwich..	27.	9.59. 9	12.22.35,74	−27,66	+ 5.47.27,2	−1.56,1
Paris.......	28.	9.56. 9	12.22. 9,70	−27,61		
Paris.......	28.	10.14.42			+ 5.50.13,5	−1.57,9
Paris.......	30.	9.41.16	12.21.21,47	−27,41	+ 5.54.56,6	−1.58,0

L'observation isolée du 17 mars pouvait être combinée encore avec les autres. La variation des erreurs restant uniforme depuis cette époque jusqu'au 13 avril,

on en a pris la moyenne. Le groupe du 15 au 30 avril donne le second lieu :

Lieu V....	1861 Avril 10,2	$d\text{Æ} \cos \text{D} = -29{,}246$	Avril 10,2	$d\text{D} = -2'.14''.46$
Lieu VI...	22,1	$d\text{Æ} \cos \text{D} = -28{,}209$	22,1	$d\text{D} = -2.\ 1.73$

La grande déviation qui apparaît encore dans la quatrième apparition était à prévoir. En effet, si on regarde le tableau ci-après des éléments et des erreurs restantes, tel qu'il résulte de l'ensemble des trois oppositions antérieures, on reconnaît facilement que le mouvement moyen était encore indéterminable. On pouvait adopter entre les limites + 0",05 et — 0",25 une valeur arbitraire de la différentielle du mouvement diurne, sans que l'une de ces hypothèses eût diminué sensiblement les erreurs inévitables, tandis que chacune d'elles en particulier et suivant le hasard du choix aurait produit pour l'opposition future un écart plus ou moins considérable entre l'éphéméride et l'observation.

Éléments résultant des trois oppositions passées.

Anomalie moyenne......	64°.51'.21",2 + 2107,9 $d\mu$	1858,0 Janv. T. m. de Berlin.
Périhélie.............	229.42. 3,6 — 2330,6 $d\mu$	Équin. 1857,0 Janv.
Nœud.................	148. 5. 2,8 — 23,4 $d\mu$	Équin. 1857,0 Janv.
Inclinaison............	6.34.55,8 — 6,3 $d\mu$	
Mouvement diurne......	13.10,95527	
Excentricité...........	4.43.26,5 + 129,2 $d\mu$	

Erreurs.

	Longitude.	Latitude.
1857 Juill. 14..........	+ 1",5 — 13,7 $d\mu$	+ 1",9 + 2,0 $d\mu$
Juill. 26..........	— 5,6 — 1,5 $d\mu$	— 2,6 — 2,3 $d\mu$
Août 12..........	+ 4,4 + 18,3 $d\mu$	— 3,6 — 6,8 $d\mu$
1858 Août 18..........	+ 3,9 + 20,8 $d\mu$	+ 1,6 — 1,6 $d\mu$
Sept. 19..........	— 4,2 — 20,0 $d\mu$	— 1,9 + 2,7 $d\mu$
1859 Déc. 24..........	+ 3,8 + 8,2 $d\mu$	— 3,7 — 4,8 $d\mu$
1860 Janv. 16..........	— 4,6 — 6,7 $d\mu$	— 3,5 — 1,3 $d\mu$

L'interpolation de toutes les différences des quatre oppositions, au commencement des jours relatifs, fournit les valeurs finales qui serviront pour la correction des éléments :

Lieux normaux.		Observation — Calcul $d\mathcal{A}$	$d\mathbb{D}$
1	1857 Juill. 17.	− 1″,23	+ 1″,75
2	1857 Août 17.	− 7,77	+ 5,03
3	1858 Sept. 3.	+ 5,40	+ 0,27
4	1860 Janv. 6.	− 3,58	+ 4,00
5	1861 Avril 10.	−440,05	+134,46
6	1861 Avril 22.	−425,10	+121,73

Si on additionne ces quantités avec les données de l'éphéméride pour les époques relatives, on aura les coordonnées équatoriales, et on passe de là par transformation aux coordonnées écliptiques :

	Longitudes.	Latitudes.	Observation — Calcul $d\mathcal{L}$	$d\lambda$
1857 Juill. 17.	244°.54′. 6″,74	+ 8°.37′.41″,21	− 1″,53	+ 1″,58
1857 Août 17.	247.51.33,15	+ 6.41.22,20	− 8,26	+ 3,86
1858 Sept. 3.	4.36.23,52	− 4.41.23,23	+ 4,94	− 1,81
1860 Janv. 6.	82.20.18,53	− 8.14.36,15	− 3,43	+ 4,21
1861 Avril 10.	185.44.31,9	+ 7.23.36,40	−459,80	− 50,80
1861 Avril 22.	183.31.21,6	+ 7.32.39,50	−440,50	− 56,50

La base d'une détermination rigoureuse étant une fois établie, on peut procéder à la recherche du système d'éléments le plus probable. Le désir de conserver pour toutes les parties du calcul une égale précision, et de fonder avec ce travail une base définitive pour toutes les applications futures, nous a engagé à soumettre à une correction préalable le système d'éléments $\mathcal{A}$ des trois oppositions passées. Cette méthode présente un double avantage : d'une part, on parvient à déterminer avec exactitude les coefficients des équations qui servent à donner pour des changements arbitraires des éléments les variations correspondantes des lieux géocentriques; d'autre part, en corrigeant une orbite déjà très-approchée, on n'a rien à craindre de l'influence des termes d'ordre supérieur. Comme la partie essentielle du grand écart de la quatrième opposition est due à la mauvaise détermination du mouvement diurne, il est évident qu'on réussira à faire évanouir une partie importante de cette différence en corrigeant cet élément, à la condition toutefois de faire varier en même temps aussi les autres éléments, afin de conserver entre eux ce rapport intime qui permet de satisfaire aux mêmes observations par le nouveau système d'éléments.

En variant d'après le tableau, page 357 :

L'anomalie moyenne, de la quantité..	+	2107,9 $d\mu$,
Le périhélie, de la quantité.........	—	2330,6 $d\mu$,
Le nœud, de la quantité............	—	23,4 $d\mu$,
L'inclinaison, de la quantité.........	—	6,3 $d\mu$,
L'excentricité, de la quantité........	+	129,2 $d\mu$,

on atteindra toujours entre observation et calcul le plus grand accord possible qu'une hypothèse arbitraire de $d\mu$ est capable d'établir. La possibilité d'obtenir facilement une meilleure valeur du mouvement diurne nous a engagé à suivre cette voie pour arriver à une orbite plus approchée. En effet, on n'a nullement à avoir égard aux oppositions antérieures, par la raison exposée qu'elles sont entre de larges limites indépendantes de $d\mu$; il suffit de trouver une valeur de cette différentielle qui fasse disparaître les grandes erreurs de la dernière opposition. On parviendra à ce résultat en faisant varier d'abord $d\mu$ de la quantité arbitraire $-0'',3$. Les éléments correspondants à cette valeur font subir aux lieux géocentriques des changements que l'on verra ci-dessous. Il ne sera pas superflu de remarquer que les éléments répondant à $d\mu = 0$ sont ceux qu'on avait adoptés pour les oppositions passées :

Éléments $\mathcal{A}$ pour $d\mu = 0$.	Éléments $\mathcal{A}_1$ pour $d\mu = -0'',3$.	$\mathcal{A} - \mathcal{A}_1$
64°.51'.21",2	64°.40'.48",9	+ 10'.32",3
229.42. 3,6	229.53.42,7	— 11.39,1
148. 5. 2,8	148. 5. 9,8	— 7,0
6.34.55,8	6.34.57,7	— 1,9
13.10,95527	13.10,65527	+ 0,3
4.43.26,5	4.42.47,7	+ 38,8

Lieux géocent. corresp. à $\mathcal{A}$.		Lieux géocent. corresp. à $\mathcal{A}_1$.		Variations.	
Longitude.	Latitude.	Longitude.	Latitude.	$d\mathcal{L}$	$d\mathcal{L}$
185°.52'.11",7	7°.24'.27",2	185°.42'. 6",5	7°.23'.16",9	+10'. 5",2	+1'.10",3
183.38.42,1	7.33.36,0	183.29. 3,4	7.32.22,0	+ 9.38,7	+1.14.0

On reconnaît que les variations sont inférieures aux erreurs, et que les écarts des lieux pour $d\mu = -0'',3$ marchent dans le même sens que les différences entre le calcul et l'observation de la dernière opposition. On est donc autorisé à conclure que la valeur à obtenir pour $d\mu$, en sortant du système d'éléments $\mathcal{A}$, n'atteindra pas $-0'',3$ et que son signe sera négatif. Comme le résultat reste le même, qu'on

utilise l'orbite $\mathcal{A}$ ou $\mathcal{A}_1$, il sera plus avantageux de corriger le système d'éléments $\mathcal{A}_1$ qui accidentellement, par l'hypothèse favorable $d\mu = -0'',3$, concorde mieux avec les observations; mais le signe de $d\mu$ sera à présent naturellement positif.

Si donc on suppose que pour des valeurs quelconques de $d\mu$ entre $0'',0$ et $-0'',3$ les variations des longitudes et latitudes restent encore proportionnelles à ces valeurs mêmes, il sera facile, maintenant que l'on connaît les changements des lieux pour une hypothèse sur $d\mu$, d'obtenir la correction pour $d\mu$ qui fera disparaître les erreurs de la quatrième opposition. En désignant par χ le nombre abstrait qui fournira par son produit avec $-0'',3$ cette correction, on aura

Lieu V.......	Longitude........	$605,2 \cos\lambda\ \chi - 145,4 = 0$
Lieu VI......	»	$578,7 \cos\lambda'\ \chi - 138,2 = 0$
Lieu V.......	Latitude.........	$70,3\ \chi - 19,5 = 0$
Lieu VI......	»	$74,0\ \chi - 17,5 = 0$

Les termes indépendants de χ sont les différences entre les lieux d'après l'orbite $\mathcal{A}$ et les observations, λ et λ' les latitudes des lieux V et VI.

La résolution de ces équations conduit au résultat $\chi = 0,23948$; la rectification du mouvement diurne de l'orbite $\mathcal{A}_1$ est en conséquence égale à $+0'',3 \times 0,23948 = 0,07184$, et celui de l'orbite $\mathcal{A} = -0,22816$. On peut à présent obtenir les autres éléments de la nouvelle orbite d'une manière double, selon qu'on corrige le système $\mathcal{A}$ ou $\mathcal{A}_1$. Dans le premier cas, on ajoute à chaque élément de l'orbite fondamentale le produit formé de χ et de la différence de deux éléments respectifs $\mathcal{A} - \mathcal{A}_1$; dans l'autre cas, on introduit $\delta\mu = -0,22816$ dans le tableau page 357, et l'on additionne les valeurs résultantes avec les éléments de l'orbite $\mathcal{A}$:

Orbite $\mathcal{A}_1$.	$\chi(\mathcal{A} - \mathcal{A}_1)$.	Orbite $\mathcal{B}$.
64°.40'.48",9	+ 2'.31",4	64°.43'.20",3
229.53.42,7	− 2.47,4	229.50.55,3
148. 5. 9,8	− 1,7	148. 5. 8,1
6.34.57,7	− 0,4	6.34.57,3
13.10,65527	+ 0,07184	13.10,72711
4.42.47,7	+ 9,2	4.42.56,9

Les nouveaux éléments laissent encore subsister les erreurs suivantes entre l'observation et le calcul, trouvées par une comparaison directe :

Lieux.		Observation — Calcul. $d\mathfrak{L}$	$d\lambda$
I.	1857 Juill. 17.....	$-3'',54$	$+1'',93$
II.	1857 Août 17.....	$-2,54$	$+2,22$
III.	1858 Sept. 3.....	$+10,35$	$-1,80$
IV.	1860 Janv. 6.....	$-3,47$	$+3,65$
V.	1861 Avril 10.....	$+0,50$	$+2,60$
VI.	1861 Avril 22.....	$+0,70$	$-0,20$

La situation de cette orbite, comme le fait voir la petitesse des erreurs, ne saurait différer que très-peu de celle que l'orbite la plus probable occupe dans l'espace. Le but proposé se trouve donc complétement atteint. C'est d'après ce système d'éléments que le calcul des perturbations a été repris depuis le 2 janvier 1860 et poursuivi jusqu'à l'époque de la cinquième opposition. Avant de soumettre ce système à un dernier travail de rectification, nous allons exposer les formules différentielles, conclues d'après Gauss, qui seront utilisées dans l'application numérique.

Soient :

l_0 la longitude moyenne de l'époque;
ϖ la longitude du périhélie;
Ω la longitude du nœud;
i l'inclinaison de l'orbite;
e l'excentricité et $\sin\varphi = e$;
a le grand axe;
μ le mouvement diurne;
$\mathfrak{L}$ et λ la longitude et la latitude géocentrique de l'astre;
r et Δ la distance au Soleil et à la Terre, $\Delta' = \Delta\cos\lambda$;
L la longitude héliocentrique de la Terre;
$\mathfrak{R}$ la distance de la Terre au Soleil;
v et $\mathcal{E}$ l'anomalie moyenne et excentrique;
u l'argument de la latitude;
t le nombre de jours écoulés depuis l'époque;

alors on aura

Longitude.

$$\frac{d\mathfrak{L}}{dl_0} = \frac{a}{\Delta'\cos\varphi}\,\frac{\sin(\mathfrak{L}-\Omega)}{\sin\mathfrak{M}}\cos(\mathfrak{M}-u) + \frac{a\tang\varphi}{\Delta'}\sin(\mathfrak{L}-\Omega)\cos(\mathfrak{M}+\Omega-\varpi),$$

$$\frac{d\mathfrak{L}}{d\varpi} = -\frac{a\sin\varphi}{\Delta'}\left(\frac{4\sin^2\frac{\varphi}{2}}{\sin 2\varphi} + \cos\mathcal{E}\right)\frac{\sin(\mathfrak{L}-\Omega)}{\sin\mathfrak{M}}\cos(\mathfrak{M}-u)$$
$$-\frac{a\,\mathrm{tang}\,\varphi}{\Delta'}\,\frac{\sin(\mathfrak{L}-\Omega)}{\sin\mathfrak{M}}\cos(\mathfrak{M}+\Omega-\varpi),$$

$$\frac{d\mathfrak{L}}{d\Omega} = 1 + \frac{\mathfrak{R}}{\Delta'}\cos(L-\mathfrak{L}) - \frac{r}{\Delta'}\,\frac{\sin(\mathfrak{L}-\Omega)\cos(\mathfrak{M}-u)}{\sin\mathfrak{M}},$$

$$\frac{d\mathfrak{L}}{di} = -\frac{r}{\Delta'}\cos(\mathfrak{L}-\Omega)\sin u\sin i,$$

$$\frac{d\mathfrak{L}}{d\mu} = t\,\frac{d\mathfrak{L}}{dl_0} + 206\,265\,\frac{2}{3\mu}\,\frac{r}{\Delta'}\,\frac{\sin(\mathfrak{L}-\Omega)}{\sin\mathfrak{M}}\sin(\mathfrak{M}-u),$$

$$\frac{d\mathfrak{L}}{d\varphi} = \frac{r\sin v\sin(\mathfrak{L}-\Omega)}{\Delta'\cos\varphi\sin\mathfrak{M}}\cos(\mathfrak{M}-u) + \frac{a\cos\varphi}{\Delta'}\,\frac{\sin(\mathfrak{L}-\Omega)}{\sin\mathfrak{M}}\sin(\mathfrak{M}+\Omega-\varpi);$$

en mettant

$$\mathrm{tang}\,\mathfrak{M} = \frac{\mathrm{tang}(\mathfrak{L}-\Omega)}{\cos i} \quad \text{et} \quad \mathrm{tang}\,\mathfrak{N} = \sin(\mathfrak{L}-\Omega)\,\mathrm{tang}\,i,$$

les conditions que $\frac{\cos\mathfrak{M}}{\cos\mathfrak{N}} = +\cos(\mathfrak{L}-\Omega)$ et $\frac{\sin\mathfrak{M}}{\sin\mathfrak{N}} = +\sin i$ ne laissent subsister aucun doute sur le signe de $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$.

Latitude.

$$\frac{d\lambda}{dl_0} = \frac{a}{\Delta\cos\varphi}\,\frac{\sin(\mathfrak{N}-\lambda)}{\sin Q}\cos(\mathfrak{M}-u-Q) + \frac{a\,\mathrm{tang}\,\varphi}{\Delta}\,\frac{\sin(\mathfrak{N}-\lambda)}{\sin Q}\cos(\mathfrak{M}-Q+\Omega-\varpi),$$

$$\frac{d\lambda}{d\varpi} = -\frac{a\sin\varphi}{\Delta}\left(\frac{4\sin^2\frac{\varphi}{2}}{\sin 2\varphi} + \cos\mathcal{E}\right)\frac{\sin(\mathfrak{N}-\lambda)}{\sin Q}\cos(\mathfrak{M}-u-Q)$$
$$-\frac{a\,\mathrm{tang}\,\varphi}{\Delta}\,\frac{\sin(\mathfrak{N}-\lambda)}{\sin Q}\cos(\mathfrak{M}-Q+\Omega-\varpi),$$

$$\frac{d\lambda}{d\Omega} = \frac{\mathfrak{R}}{\Delta}\sin\lambda\sin(L-\mathfrak{L}) - \frac{r}{\Delta}\,\frac{\sin(\mathfrak{N}-\lambda)}{\sin Q}\cos(\mathfrak{M}-u-Q),$$

$$\frac{d\lambda}{di} = \frac{r}{\Delta}\,\frac{\sin u\cos i\cos(\mathfrak{N}-\lambda)}{\cos\mathfrak{N}},$$

$$\frac{d\lambda}{d\mu} = t\,\frac{d\lambda}{dl_0} + 206\,265\,\frac{2}{3\mu}\,\frac{r}{\Delta}\,\frac{\sin(\mathfrak{N}-\lambda)}{\sin Q}\sin(\mathfrak{M}-u-Q),$$

$$\frac{d\lambda}{d\varphi} = \frac{r\sin v}{\Delta\cos\varphi}\,\frac{\sin(\mathfrak{N}-\lambda)}{\sin Q}\cos(\mathfrak{M}-u-Q) + \frac{a\cos\varphi}{\Delta}\,\frac{\sin(\mathfrak{N}-\lambda)}{\sin Q}\sin(\mathfrak{M}-Q+\Omega-\varpi),$$

en posant $\operatorname{tang} Q = \dfrac{\operatorname{tang}(\mathfrak{M} - \lambda)}{\cos(\mathcal{L} - \Omega)\sin i}$.

$$d\mathcal{L} = \left(\frac{d\mathcal{L}}{dl_0}\right) dl_0 + \left(\frac{d\mathcal{L}}{d\omega}\right) d\varpi + \left(\frac{d\mathcal{L}}{d\Omega}\right) d\Omega + \left(\frac{d\mathcal{L}}{di}\right) di + \left(\frac{d\mathcal{L}}{d\mu}\right) d\mu + \left(\frac{d\mathcal{L}}{d\varphi}\right) d\varphi,$$

$$d\lambda = \left(\frac{d\lambda}{dl_0}\right) dl_0 + \left(\frac{d\lambda}{d\omega}\right) d\varpi + \left(\frac{d\lambda}{d\Omega}\right) d\Omega + \left(\frac{d\lambda}{di}\right) di + \left(\frac{d\lambda}{d\mu}\right) d\mu + \left(\frac{d\lambda}{d\varphi}\right) d\varphi.$$

Les valeurs numériques des coefficients des équations différentielles sont donc déterminées au moyen de ce système de formules; les données nécessaires correspondent à l'orbite ♑. L'introduction de $\frac{d\varpi}{10}$, $d\frac{\Omega}{10}$ et $100 d\mu$ à la place de $d\varpi$, $d\Omega$ et $100 d\mu$ offrait l'avantage d'avoir pour tous les coefficients des nombres à peu près de même ordre. Les équations sont établies sans qu'on ait eu égard à la mesure des poids. Il importait, dans les conditions actuelles, de ne pas trop atténuer l'influence des oppositions intermédiaires, à cause du nombre plus restreint des observations. Les oppositions de 1857 et de 1861, qui ont fourni les séries d'observations les plus nombreuses, sont représentées chacune par deux positions normales, de sorte qu'une prépondérance suffisante leur reste assurée. En tenant compte des poids, une opposition intermédiaire n'aurait pas même atteint l'importance d'une unique position normale des oppositions extrêmes.

Équations différentielles.

Longitude.

$$0 = +1{,}6216\, dl_0 - 2{,}3570 \frac{d\varpi}{10} - 0{,}0820 \frac{d\Omega}{10} + 0{,}01801\, di - 3{,}4863\; 100\, d\mu + 1{,}1600\, d\varphi + 3'',54$$

$$0 = +1{,}3016\, dl_0 - 1{,}8358 \frac{d\varpi}{10} - 0{,}0590 \frac{d\Omega}{10} + 0{,}01991\, di - 2{,}5863\; 100\, d\mu + 1{,}1300\, d\varphi + 2{,}54$$

$$0 = +1{,}3420\, dl_0 + 1{,}4198 \frac{d\varpi}{10} + 0{,}0420 \frac{d\Omega}{10} - 0{,}06593\, di + 3{,}6794\; 100\, d\mu + 2{,}2085\, d\varphi - 10{,}35$$

$$0 = +1{,}2959\, dl_0 + 1{,}7622 \frac{d\varpi}{10} - 0{,}0550 \frac{d\Omega}{10} + 0{,}05952\, di + 9{,}1925\; 100\, d\mu - 1{,}6972\, d\varphi + 3{,}47$$

$$0 = +1{,}8516\, dl_0 - 2{,}2678 \frac{d\varpi}{10} + 0{,}0166 \frac{d\Omega}{10} - 0{,}10272\, di + 21{,}8582\; 100\, d\mu - 2{,}2170\, d\varphi - 0{,}50$$

$$0 = +1{,}7706\, dl_0 - 2{,}1846 \frac{d\varpi}{10} + 0{,}0143 \frac{d\Omega}{10} - 0{,}10791\, di + 20{,}8265\; 100\, d\mu - 2{,}1167\, d\varphi - 0{,}70$$

Latitude.

$$0 = -0,0056\, dl_0 + 0,0309\, \frac{d\varpi}{10} + 0,6886\, \frac{d\Omega}{10} + 1,3076\, di + 0,1067\ 100\, d\mu + 0,0476\, d\varphi - 1'',93$$

$$0 = -0,0235\, dl_0 + 0,0354\, \frac{d\varpi}{10} + 0,7426\, \frac{d\Omega}{10} + 1,0159\, di + 0,0545\ 100\, d\mu - 0,0165\, d\varphi - 2,22$$

$$0 = -0,1198\, dl_0 - 0,1409\, \frac{d\varpi}{10} + 1,5166\, \frac{d\Omega}{10} - 0,7100\, di - 0,3640\ 100\, d\mu - 0,1879\, d\varphi + 1,80$$

$$0 = +0,0507\, dl_0 + 0,1020\, \frac{d\varpi}{10} - 0,8911\, \frac{d\Omega}{10} - 1,2486\, di + 0,2584\ 100\, d\mu - 0,0285\, d\varphi - 3,65$$

$$0 = +0,1833\, dl_0 - 0,2704\, \frac{d\varpi}{10} - 1,3517\, \frac{d\Omega}{10} + 1,1159\, di + 2,3270\ 100\, d\mu - 0,1326\, d\varphi - 2,60$$

$$0 = +0,1919\, dl_0 - 0,2833\, \frac{d\varpi}{10} - 1,2416\, \frac{d\Omega}{10} + 1,1380\, di + 2,4401\ 100\, d\mu - 0,1320\, d\varphi + 0,20$$

La vérification des équations différentielles peut s'opérer à l'aide d'une méthode tout à fait indépendante des données qui entrent dans le calcul des coefficients. En attribuant, en effet, aux éléments fondamentaux des variations arbitraires, on peut obtenir de deux manières les modifications des lieux géocentriques : d'une part, en introduisant dans les équations les différentielles des éléments; d'autre part, en comparant les lieux géocentriques calculés pour les mêmes époques d'après les deux systèmes d'éléments. Relativement au choix des variations des éléments, il y a une double précaution à observer : elles ne doivent être ni trop petites, afin que la vérification puisse porter sur tous les chiffres des coefficients des équations, ni trop grandes, pour qu'on n'ait pas à redouter l'influence des termes d'ordre supérieur.

L'examen attentif de la structure de ces équations permettra de porter un jugement à priori sur la nature d'une partie des résultats à obtenir. Les trois oppositions antérieures sont représentées par les quatre premières équations. On y remarque que non-seulement les coefficients de $d\varpi$ et $d\mu$ sont affectés du même signe, mais encore que leurs valeurs numériques forment un rapport à peu près constant, quoiqu'il se présente une légère divergence lorsqu'on considère la quatrième équation. On pourrait donc approximativement remplacer les différentielles de $d\varpi$ et de $d\mu$ par une seule inconnue se composant de l'une d'elles et d'un multiple de l'autre, ce qui prouve que le groupe de ces équations ne peut servir à déterminer ces corrections indépendamment l'une de l'autre. L'impossibilité dans laquelle on se trouvait de conclure une valeur sûre du mouvement diurne est donc clairement expliquée. Cet inconvénient disparaît avec la quatrième opposition, représentée par les cinquième et sixième équations. Les coefficients de $d\varpi$ et de $d\mu$ y sont affectés de signes différents; la valeur numérique du dernier devient relativement très-considérable. Ces deux causes réunies détruisent complétement le

rapport nuisible qui existait dans les premières équations, de sorte qu'on pouvait s'attendre, en ajoutant les conditions de la dernière opposition, à une détermination précise de six corrections des éléments.

La combinaison de l'ensemble des équations conduit aux six équations finales :

$$14,4555\, dl_0 - 10,1722\frac{d\varpi}{10} - 0,90248\frac{d\Omega}{10} + 0,07561\, di + 86,128\ 100\, d\mu - 3,7649\ d\varphi - 0,8983 = 0$$

$$+16,985\frac{d\varpi}{10} + 0,02192\frac{d\Omega}{10} - 0,12077\, di - 1,308\ 100\, d\mu + 2,4363\ d\varphi - 22,616 = 0$$

$$+7,4480\frac{d\Omega}{10} - 1,2378\, di - 0,7322\ 100\, d\mu - 0,17615\, d\varphi + 5,1880 = 0$$

$$+7,1687\, di + 0,6205\ 100\, d\mu + 0,17397\, d\varphi - 2,4937 = 0$$

$$+526,57\ 100\, d\mu - 84,963\ d\varphi - 24,648 = 0$$

$$+4,801\ d\varphi - 22,822 = 0$$

On en tire les corrections des éléments :

Éléments primitifs. Époque 1858,0 Janv. t. m. de Berlin.		Corrections.	Éléments conclus de l'ensemble des observations des quatre oppositions.
$\mathfrak{M} = 64°43'20'',3$		$d\mathfrak{M} = -10'',22$	$64°43'10'',08$
$\varpi = 229.50.55,3$	1857,0 Janv.	$d\varpi = +7,14$	$229.51.\ 2,44$
$\Omega = 148.\ 5.\ 8,1$	1857,0 Janv.	$d\Omega = -4,77$	$148.\ 5.\ 3,33$
$i = 6.34.57,3$		$di = +0,16$	$6.34.57,46$
$\mu = 13.10,72711$		$d\mu = +0,00814$	$+\ 13.10,73525$
$\varphi = 4.42.56,9$		$d\varphi = +4,75$	$4.43.\ 1,65$

Différences entre l'orbite adoptée et les observations.

Lieux normaux.	Date.	Observation — Calcul. $d\mathfrak{L}$	Observation — Calcul. $d\lambda$
1	1857 Juill. 17	$+0'',4$	$+1'',7$
2	1857 Août 17	$-0,3$	$+2,4$
3	1858 Sept. 3	$+0,0$	$-0,0$
4	1860 Janv. 6	$-0,2$	$+3,4$
5	1861 Avril 10	$+0,6$	$+1,3$
6	1861 Avril 22	$-0,5$	$-1,6$

Les erreurs sont minimes, leur signe change d'une position à l'autre, elles sont parfaitement réparties et ne trahissent aucune tendance vers un écart systématique. Le but proposé est donc atteint : le plus grand accord possible pour l'époque donnée des observations est établi entre l'orbite conclue et celle que parcourt réelle-

ment l'astre dans l'espace. Nous pouvons espérer que le résultat obtenu satisfera pleinement aux exigences les plus rigoureuses.

Il ne reste plus qu'à faire voir avec quel degré d'exactitude les six éléments de l'orbite se déduisent de l'ensemble des observations. On peut en juger par l'examen du tableau ci-après, où les éléments et les erreurs relatives sont présentés en fonction de la différentielle du mouvement diurne. On remarque que $d\mu$ ne peut varier que de deux ou trois millièmes de seconde d'arc autour de sa valeur la plus probable, qui est égale à 0,00814. En comparant ce dernier tableau avec celui des oppositions antérieures, on constatera la grande différence des deux séries des coefficients de $d\mu$; ces termes sont actuellement beaucoup plus considérables, de sorte que $d\mu$ en résulte environ avec cent fois plus de précision.

Éléments.	Observation — Calcul. $d\mathfrak{L}$	$d\lambda$
64°.43′. 9″,54 + 66,9 $d\mu$	− 3″,81 + 517,4 $d\mu$	+ 1″,86 − 19,6 $d\mu$
229.51. 7,19 − 583,0 $d\mu$	− 3,01 + 306,1 $d\mu$	+ 2,36 − 0,8 $d\mu$
148. 5. 1,91 + 173,97 $d\mu$	+ 4,95 − 608,2 $d\mu$	− 0,14 + 12,1 $d\mu$
6.34.57,62 − 19,97 $d\mu$	− 5,28 + 633,4 $d\mu$	+ 3,35 + 10,2 $d\mu$
13.10,72711 + $d\mu$	+ 3,42 − 347,1 $d\mu$	+ 1,65 − 47,5 $d\mu$
6.42.57,92 + 459,0 $d\mu$	+ 2,11 − 326,9 $d\mu$	− 1,09 − 56,8 $d\mu$

L'éphéméride de la cinquième opposition est construite au moyen du dernier système d'éléments d'une manière analogue à celles des oppositions passées; x, y et z sont les coordonnées rectangulaires équatoriales pour l'équinoxe de janvier 1857 janv. 0; ξ, η et ζ, les perturbations respectives tirées du tableau page 345; v et r, anomalie vraie et rayon vecteur.

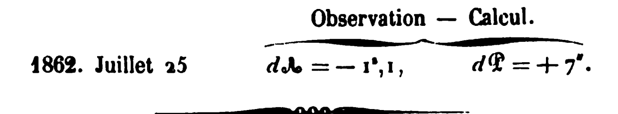
$$x = r\,9{,}999\,2010 \sin(v + 320°.\ 1.13{,}76) + \xi,$$
$$y = r\,9{,}978\,6237 \sin(v + 231.\ 8.22{,}06) + \eta,$$
$$z = r\,9{,}494\,3335 \sin(v + 219.22.14{,}56) + \zeta.$$

Éphéméride pour l'opposition en 1862.

0ʰ de Berlin.	Asc. droite.	Déclinaison.	log Δ.	log r.
	h m s	° ′ ″		
1862 Juill. 23	21. 3.52,97	− 13.12. 2,2	0,212 2322	0,425 2980
24	21. 3. 6,32	− 13.17.34,5		
25	21. 2.19,04	− 13.23.11,0		
26	21. 1.31,20	− 13.28.51,5		
27	21. 0.42,85	− 13.34.35,7	0,220 3846	0,425 8506
28	20.59.54,05	− 13.40.23,2		
29	20.59. 4,87	− 13.46.13,7		

0ʰ de Berlin.	Asc. droite.	Déclinaison.	log Δ.	log *r*.
	h m s	° ′ ″		
1862 Juill. 30	20.58.15,38	— 13.52. 6,8		
31	20.57.25,63	— 13.58. 2,3	0,219 6474	0,426 4042
Août 1	20.56.35,67	— 14. 3.59,8		
2	20.55.45,58	— 14. 9.58,9		
3	20.54.55,42	— 14.15.59,2		
4	20.54. 5,24	— 14.22. 0,4	0,220 0431	0,426 9582
5	20.53.15,10	— 14.28. 2,2		
6	20.52.25,08	— 14.34. 4,3		
7	20.51.35,23	— 14.40. 6,3		
8	20.50.45,61	— 14.46. 8,0	0,221 5703	0,427 5126
9	20.49.56,27	— 14.52. 9,1		
10	20.49. 7,28	— 14.58. 9,1		
11	20.48.18,69	— 15. 4. 7,8		
12	20.47.30,57	— 15.10. 4,9	0,224 2102	0,428 0674
13	20.46.42,97	— 15.16. 0,1		
14	20.45.55,93	— 15.21.53,2		
15	20.45. 9,49	— 15.27.43,9		
16	20.44.23,73	— 15.33.31,9	0,227 9280	0,428 6224
17	20.43.38,69	— 15.39.17,0		
18	20.42.54,44	— 15.44.58,8		
19	20.42.11,02	— 15.50.37,6		
20	20.41.28,49	— 15.56.11,6	0,232 6765	0,429 1776
21	20.40.46,91	— 16. 1.42,2		
22	20.40. 6,30	— 16. 7. 8,5		
23	20.39.26,71	— 16.12.30,2		
24	20.38.48,21	— 16.17.47,4	0,238 3918	0,429 7328
25	20.38.10,83	— 16.22.59,7		
26	20.37.34,61	— 16.28. 6,8		
27	20.36.59,59	— 16.33. 8,7		
28	20.36.25,82	— 16.38. 5,1	0,244 9949	0,430 2872
29	20.35.53,32	— 16.42.55,9		
30	20.35.22,13	— 16.47.41,1		
31	20.34.52,29	— 16.52.20,4		
Sept. 1	20.34.23,81	— 16.86.53,8	0,252 3957	0,430 8418
2	20.33.56,72	— 17. 1.21,1		
3	20.33.31,04	— 17. 5.42,1		
4	20.33. 6,79	— 17. 9.56,7		
5	20.32.43,98	— 17.14. 5,2	0,260 4941	0,431 3958

Il a été possible, avant que l'impression ait été terminée, de comparer une position de l'astre avec l'éphéméride. L'accord est très-grand. L'observation équatoriale faite à Paris le 25 juillet 1862 donne ce résultat :



	Observation — Calcul.	
1862. Juillet 25	$d\mathcal{A} = -1^s,1,$	$d\mathfrak{D} = +7''.$

MÉMOIRE

SUR

L'APPLICATION DE PHÉNOMÈNES CAPILLAIRES

A LA

CONSTRUCTION DE DIVERS THERMOMÉTROGRAPHES,

PAR M. E. BARBIER.

Introduction d'une bulle d'air dans un thermomètre Doulcet.

Le thermomètre de Rutherford à minimum contient un index d'émail que l'alcool entraîne en se contractant, mais qu'il ne pousse pas en se dilatant.

M. Doulcet vit des index de Rutherford mal construits rester stationnaires, alors qu'ils devaient reculer; il remarqua en outre qu'ils tombaient jusqu'au ménisque du liquide sous l'action de la pesanteur : cette observation lui inspira l'idée de son thermomètre à maximum. Si dans un thermomètre à alcool, placé la boule en haut, on met un index en forme d'épingle émoussée, imaginé par M. Baudin, de manière que cet index tombe la pointe en avant, l'épingle s'arrêtera au ménisque de l'alcool. L'index étant ainsi placé ne suit pas tous les mouvements de la colonne liquide. S'il y a échauffement, il avance avec elle; mais s'il y a refroidissement, il reste stationnaire. Tel est le principe ingénieux du thermomètre de M. Doulcet. L'index qui a ainsi noté un maximum par sa pointe a une fixité telle, que le thermomètre peut être remué vivement sans que l'indication soit faussée.

Le thermomètre Doulcet donne aussi bien les maxima que les minima, et il donne les minima à la manière d'un bon thermomètre de Rutherford. Cependant, la position renversée du thermomètre permet à une portion du liquide de couler peu à peu le long des parois du tube; c'est peut-être l'inconvénient principal du thermomètre Doulcet.

Une circonstance accidentelle a fourni à M. Doulcet l'idée d'un thermomètre à

importantes de la bulle d'air, des index et du tube, qui permettent d'employer *un même instrument* en diverses circonstances où ses indications sont utiles.

Quelque ennuyeuse que soit l'exposition de phénomènes dont on ne voit pas immédiatement l'application, j'exposerai d'abord les modifications que le jeu des index permet de produire dans la colonne d'alcool, puis l'application de ces modifications à des combinaisons qui peuvent être utiles pour la connaissance des mouvements de la température en l'absence de l'observateur ou dans des lieux inaccessibles à l'observateur.

Phénomènes produits par le jeu d'un index dans le thermomètre à alcool.

1° Un index placé dans la boule du thermomètre tombe naturellement la tête la première, si l'on met l'instrument sans trop de lenteur dans une position renversée; l'index, comme une flèche, tend à tomber toujours par le même bout. La tête s'appuie sur le ménisque si le thermomètre reste renversé, retombe si le thermomètre est redressé, et joue le rôle d'index à minimum si le thermomètre est horizontal. Cet index se déplace facilement dans le tube, soit sous l'influence de petites secousses, soit sous l'action de la pesanteur agissant si l'on incline suffisamment le tube.

2° Un index s'introduit de la boule du thermomètre dans le tube la pointe en avant si, faisant tourner lentement le tube horizontal entre les doigts, on l'incline peu à peu jusqu'à le renverser complétement. On arrive bien vite à produire ce phénomène sans suivre des yeux l'index; mais si on le suit, on verra que sa tête reste toujours au point le plus bas de la boule du thermomètre, jusqu'à ce que le mouvement de rotation engage la pointe dans l'espèce d'entonnoir qui se trouve à l'entrée du tube. Le thermomètre étant complétement renversé, l'index descend sous l'action de la pesanteur, jusqu'à ce que sa pointe rencontre le ménisque et s'y arrête. Si la température s'élève alors, l'index continue à reposer sur le ménisque; mais si la température s'abaisse, l'index reste en place, déforme et perce le ménisque, et il s'attache alors au tube à la manière des pailles qui se collent aux vitres humides. Cette adhérence est assez forte pour que le tube puisse être remué dans toutes les positions possibles sans qu'il en résulte de déplacement pour l'index.

Remis dans la position verticale ordinaire et chauffé, le thermomètre indique par la chute de l'index l'instant précis où le ménisque du liquide en atteint la pointe.

Dans une position horizontale, l'index est immobile dans le tube; bien que le

ménisque le sollicite, il ne l'entraîne pas. L'index lui présente la tête lorsque la partie qui est hors de l'alcool le maintient fixé au tube; dans tous les autres cas, l'index présente sa pointe au ménisque auquel elle n'offre pas une prise suffisante pour que l'index soit déplacé. On comprend donc assez facilement cette immobilité de l'index dans un tube horizontal lorsque l'index a été introduit de la boule dans le tube du thermomètre, la pointe en avant.

On peut laisser l'index dans la partie du tube que l'on voudra, et même au point précis que l'on aurait déterminé; il suffit de renverser le thermomètre et de le chauffer jusqu'à ce qu'il atteigne le point demandé, l'index y arrive et n'en revient pas lors du refroidissement.

De cette manière, on peut se débarrasser d'un index en le mettant assez loin dans le tube pour que le ménisque ne l'atteigne pas, jusqu'au moment où l'on voudrait le reprendre pour s'en servir après l'avoir ramené dans la partie utile du tube thermométrique. Pour reprendre l'index, il suffit de chauffer jusqu'à ce que le ménisque dépasse l'index, et de laisser tomber celui-ci par son propre poids. On l'arrête au point convenable en mettant le tube horizontalement.

3° On peut laisser un index la tête en avant en tel point qu'on voudra de la partie du tube occupée par le liquide, en l'y amenant par l'inclinaison du tube ou un refroidissement suffisant. Le tube doit être horizontal pour que l'index reste en place jusqu'au moment où le ménisque le ferait reculer vers le réservoir du thermomètre.

Voyons dès maintenant comment on peut mettre l'index tête en avant en un point du tube donné en dehors du liquide.

On échauffe le liquide jusqu'à ce qu'il atteigne le point demandé; une inclinaison donnée au tube y amène aussi l'index; cela fait, une secousse donnée au thermomètre sur la paume de la main fait sortir la tête de l'index hors du liquide; le refroidissement peut continuer, l'index reste immobile dans toutes les positions, jusqu'à ce que le liquide vienne le dépasser. On pourrait, au moyen de petites secousses auxiliaires, amener l'index à un point déterminé d'une manière précise en dehors du liquide.

Remarquons que l'index crève un ménisque par la tête comme par la pointe, si on laisse tomber le thermomètre dans le creux de la main, dans le sens même où l'index doit se mouvoir un peu pour crever le ménisque. On peut laisser tomber le thermomètre sur la couverture d'un livre, et alors on imite la méthode employée par les ouvriers pour emmancher leurs outils.

4° N'oublions pas qu'un index est comme fixé au tube lorsqu'une de ses parties (vers la tête, la pointe ou le milieu, peu importe) n'est pas plongée dans l'alcool; cette fixité est assez grande pour que l'index perce, dans ces conditions, par la

tête aussi bien que par la pointe, les ménisques liquides qui se présenteraient à lui par suite des variations de la température.

5° Je suppose l'index en tout ou en partie hors de l'alcool, et par suite immobile dans le tube. Lorsque, par une *lente* variation de la température, un ménisque est amené dans ces conditions contre la pointe de l'index, la partie liquide touchée par la pointe passe peu à peu vers la tête de l'index, de telle sorte que le ménisque soit immobile à la pointe de l'index. Pour que ce phénomène se produise, il suffit que la pesanteur favorise le mouvement du liquide ; la force centrifuge ménagée permet à ce phénomène de se produire un peu moins lentement.

Dans le cas où l'index est tout entier hors de l'alcool, on voit le liquide se rassembler à la tête de l'index. Il passe de la pointe à la tête de l'index d'une manière presque invisible et pour ainsi dire latente; le canal capillaire compris entre l'index et la paroi du tube à laquelle il est comme collé sert de passage au liquide. Ce canal, bien que très-petit, suffit au mouvement du liquide produit par les variations de la température de l'air qui entoure le thermomètre, telles que celles qui se produisent quand on transporte l'instrument d'une pièce chauffée à l'air froid.

Au moment où une partie du liquide appuie son ménisque sur la pointe d'un index tout entier hors de l'alcool, si par des secousses on empêche le liquide de se rassembler à la tête de l'index, il coule le long des parois et ne se rassemble que plus bas dans le tube.

6° On peut produire une bulle au moyen d'un index introduit dans le tube la pointe en avant. Pour cela, on laisse la température s'abaisser de manière que la tête de l'index reste seule dans le liquide. Tenant alors le thermomètre la boule en haut, ayant le bras allongé, on le fait aller deux ou trois fois à la manière d'un pendule et on redresse l'instrument. Le peu de liquide que la force centrifuge a fait couler le long des parois redescend pour se rassembler à la tête de l'index sortie du liquide ; de là une bulle qu'on fait, avec un peu d'habitude, de la longueur que l'on veut. Il suffit de faire varier légèrement la température du thermomètre avant que le liquide se soit rassemblé à la tête de l'index, pour régler cette longueur.

On agrandit la partie liquide séparée en élevant lentement la température du thermomètre tenu la boule en haut. Par un refroidissement, l'index se logera ensuite de lui-même dans la partie séparée ; la bulle d'air ne pourra plus dès lors que le pousser en avant.

Quelques secousses un peu fortes font repasser l'index à travers la bulle d'air sans la faire disparaître. L'index descend dans la boule du thermomètre ; il y a une bulle dans la colonne liquide, et l'index peut se présenter à elle par la tête

ou par la pointe et la traverser, moyennant des secousses sur la paume de la main. On peut faire faire plusieurs fois la navette à l'index sans détruire la bulle d'air.

7° Une bulle peut être produite d'une manière bien plus commode, au moyen d'un seul index ayant la tête en avant. On lui fait crever le ménisque de manière qu'une partie de l'index, égale en longueur à la bulle qu'on veut produire, sorte du liquide; il suffit d'une secousse. On fait aller le bras en pendule moins vivement que dans le cas précédent; il ne faut pas retourner le thermomètre qui a la boule en haut. S'il est nécessaire, en chauffant un peu le thermomètre, on allonge la partie séparée de manière que l'index puisse s'y loger par un refroidissement.

Le même procédé peut servir à couper une bulle un peu longue en deux parties; pour cela, on amène la tête d'un index au point où l'on veut couper la bulle; le mouvement qu'on a déjà employé produit la séparation, et la bulle qui est traversée par l'index monte au plus haut de l'index qui la traverse.

L'index se trouve alors entre les deux bulles, et on le fait passer à travers l'une ou l'autre par des secousses données au thermomètre, ainsi qu'on l'a vu précédemment.

8° Une bulle traversée par un index se comporte le long de l'index comme la bulle d'air d'un niveau très-peu sensible. De petites trépidations la rendent moins paresseuse.

Il est remarquable qu'une bulle non sphérique, isolant complétement l'une de l'autre les deux parties liquides qu'elle sépare, se déplace sous l'influence des inclinaisons diverses données au tube, une fois qu'elle a été traversée par le fil qui fait le corps de l'index.

Le passage du liquide est lent, puisqu'il se fait par un très-petit canal.

Les constructeurs ont pu remarquer qu'une bulle qui ne se meut pas dans un tube capillaire monte le long d'un fil qui le transperce, puisque très-souvent ils font disparaître les bulles qui divisent une colonne liquide capillaire en y introduisant un fil.

Peut-être ces bulles, rendues sensibles aux différences de niveau par l'introduction d'un fil, pourraient-elles servir dans un liquide très-fluide à donner des niveaux de très-petites dimensions, utiles, malgré leur peu de sensibilité, à cause de leur petitesse même.

9° Une bulle se meut facilement à la pointe d'un index, de manière à être traversée complétement par l'index, ou à s'en dégager complétement, par suite des variations de la température et des positions données au thermomètre. Mais une bulle ne se comporte de même à la tête d'un index que si l'on a recours aux fortes secousses, qu'on obtient en laissant tomber l'instrument guidé par une main dans le creux de l'autre main ou sur la couverture d'un livre.

Principaux phénomènes produits par le jeu d'un index. (Suite.)

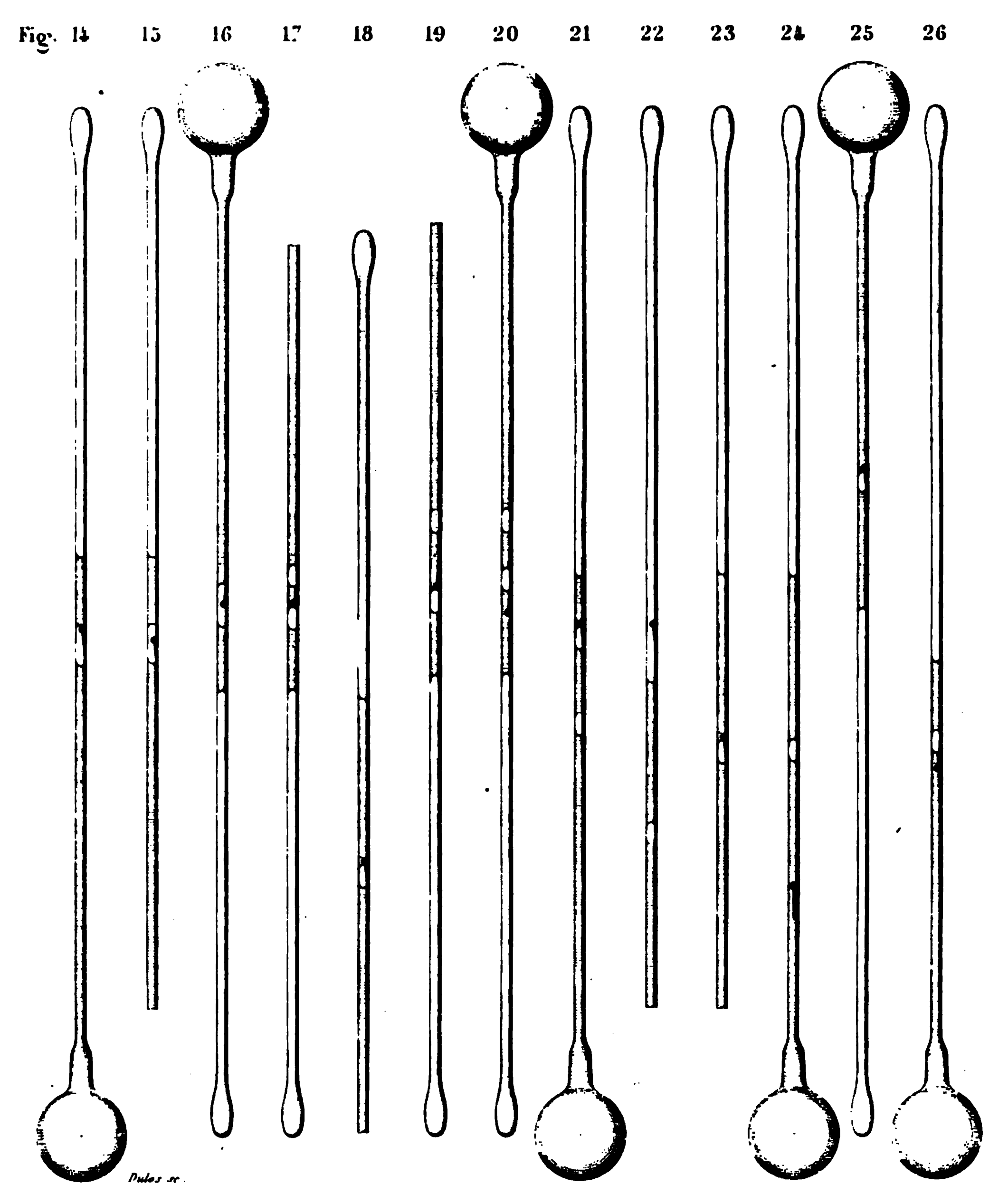


Fig. 14. Le thermomètre a été remis la boule en bas.
15. On lui a fait subir un choc sur la paume de la main.
16 et 17. On l'a retourné et on l'a fait mouvoir comme l'extrémité d'un pendule.
18. Effet d'un échauffement.
19. Un refroidissement logé l'index entre les deux bulles.
20. Une secousse sur la paume de la main a été subie par l'instrument.
21 et 22. Le thermomètre remis dans la position ordinaire se refroidit et l'une des bulles disparait.
23. On a chauffé l'instrument jusqu'à replonger l'index dans l'alcool.

Fig. 24. Une secousse fait passer l'index à travers la bulle et il descend dans la boule.
25. L'index est rentré la pointe en avant et le thermomètre s'est refroidi.
26. Le thermomètre continue à se refroidir dans la position ordinaire.

Remarque. Les Fig. 25 et 26 montrent comment on peut réduire la longueur de la partie liquide séparée à une longueur déterminée d'une manière précise.

Introduire un index par la tête ou par la pointe, l'amener en un point déterminé, même à travers plusieurs bulles, faire passer du liquide vers la tête de l'index, produire une bulle, la déplacer dans la colonne liquide en la rendant sensible aux inclinaisons du tube ou en faisant passer du liquide d'une extrémité à l'autre d'un index traversant la bulle, couper une bulle en deux (par refroidissement ou échauffement lent) et réunir deux bulles en une seule, sont des problèmes que les mouvements qui viennent d'être décrits résolvent ou donnent le moyen de résoudre.

Ces problèmes se rencontrent lorsqu'on veut diminuer une bulle d'air trop longue, allonger ou raccourcir une partie de la colonne liquide, rassembler le liquide en une seule colonne continue.

On peut, par la combinaison de ces problèmes, faire descendre sans une multitude de secousses un index même placé trop haut dans le tube pour que la chaleur des mains, la seule dont on veuille disposer, puisse y faire monter la colonne thermométrique.

A cet effet on produit, par des secousses ou la force centrifuge, une partie liquide séparée du reste du liquide par une très-longue bulle qui ajoute à la longueur de la colonne. Si on élève la température, cette partie séparée peut saisir l'index qui, sous l'action de la pesanteur, descendra avec lui lors du refroidissement. Cette partie séparée pourra être immédiatement détruite, et l'index saisi par la colonne liquide continue.

Le problème dont nous venons d'indiquer la solution ne se présentera que si le thermomètre a été soumis à des secousses extrêmement fortes, ou à une température élevée. En montrant comment on répare un tel accident sans autre source de chaleur que les mains, j'ai voulu faire voir qu'on peut toujours éviter de faire agir sur le thermomètre des sources de chaleur énergiques qui déplaceraient au moins momentanément son zéro.

Production spontanée des bulles par le jeu des deux index.

Lorsque les deux index sont dans la boule, il faut les introduire successivement dans le tube. Pour cela, on les introduit tous les deux par la pointe; l'un prend un peu d'avance sur l'autre : on les ramène vers la boule jusqu'à ce que l'un culbute, l'autre reste dans le tube. Pour faire glisser ainsi les deux index vers la boule, on tient le tube incliné et on le fait tourner lentement entre les doigts. On ne tâtonne pas pour produire cette séparation des deux index, pourvu qu'on emploie le procédé qui vient d'être indiqué. Quand l'un des index est tombé dans la boule, on met vivement le thermomètre dans la position renversée : un index tombe, la pointe en avant, et suivi de l'autre index tourné en sens contraire.

Le système des deux index s'arrête quand la pointe du premier atteint le ménisque du liquide, un refroidissement amène le ménisque de l'alcool au point de contact des index; si le thermomètre, ayant la boule en haut, continue à se refroidir, il se produit comme une hernie de l'air dans l'alcool, et cette hernie en se détachant forme une bulle qui monte le long de l'index supérieur à la pointe duquel elle s'arrête. Elle est suivie d'une seconde bulle, celle-ci d'une troisième; la production de bulles élémentaires, qui se soudent en une seule, dure aussi longtemps que le refroidissement. Supposons qu'il se soit formé une longue bulle; en retournant le thermomètre et l'échauffant par le contact de la main, on produit le phénomène en sens inverse, on détache successivement de petites bulles de la bulle formée; lorsque la bulle réduite n'a plus que la longueur d'un index, on ne prolonge ce phénomène que si l'on emploie des secousses convenables.

Une ou deux bulles élémentaires suffiront pour les bulles utiles.

Lorsqu'une bulle utile s'est formée, on arrête la formation des bulles élémentaires en arrêtant le refroidissement; si l'on chauffe le thermomètre en lui laissant la boule en haut, on augmente la longueur de la partie séparée, et un refroidissement logera l'un des index dans cette partie du liquide.

Le thermomètre, refroidi la boule en bas, contiendra bientôt un index collé au tube, et un index reposant par sa pointe sur la bulle d'air; il sera facile, par les mouvements de chacun des index, de les mettre successivement dans toutes les situations possibles, par rapport à la bulle d'air et au liquide. D'ailleurs, au moyen d'un index, la bulle pourra être déplacée dans la colonne liquide autant qu'on le voudra.

Cette production spontanée des bulles élémentaires est constante, toutes les fois que la tête du premier index introduit est assez grosse pour protéger l'autre contre le mouvement que le ménisque tend à lui imprimer; dans tous les cas, une petite secousse ou le mouvement de pendule produit une bulle élémentaire, même quand il n'y a pas entre les têtes des deux index l'inégalité de grosseur convenable pour que la production des bulles soit spontanée. Souvent, pour empêcher l'entraînement de l'index supérieur par le ménisque, il suffit de ne pas tenir le thermomètre tout à fait verticalement, et de l'incliner de telle sorte que la bulle, qui tend au plus haut, passe au-dessus des deux têtes en les effleurant sur le côté.

Lorsque cette production de bulles se fait d'elle-même, ce qui arrive toutes les fois qu'un index à grosse tête est suivi d'un index à moins grosse tête, on peut, par de simples variations de température, mettre une série de bulles égales et équidistantes dans la colonne d'alcool. Le même problème est résolu, moins élégamment, lorsque la production des bulles n'est pas complétement spontanée.

J'ai voulu, en indiquant les principaux changements qu'on peut, par le jeu des index, produire régulièrement et sûrement dans l'intérieur du thermomètre, montrer qu'on devient maître de produire toutes les dispositions possibles de bulles d'air et de parties liquides. Les index se placent aussi dans une colonne ainsi coupée par des bulles aux points que l'on veut.

Tous ces changements peuvent avoir leur utilité; mais quelques-uns seulement seront indispensables pour construire les divers indicateurs thermométriques que fournit le thermomètre à alcool contenant deux index.

Dimensions qu'il convient de donner aux diverses parties de l'instrument.

Le tube thermométrique a un diamètre intérieur de 1 demi-millimètre, les degrés occupent sur la tige environ 4 à 5 millimètres.

Un index a une longueur de 6 millimètres environ et une tête dont le diamètre est les 6 ou les 7 dixièmes de celui du tube dans lequel il doit se mouvoir. L'instrument contient deux index dont les pointes sont seulement émoussées de manière à ne pas présenter d'arêtes vives. Les bulles n'auront pas plus de 2 à 3 millimètres de longueur; la partie liquide, séparée quand elle sera destinée à loger un index, pourra n'avoir que 1 à 2 millimètres de longueur de plus que l'index.

On fait jouer dans le tube un seul index en mettant l'autre assez loin hors du liquide, jusqu'à ce qu'on ait besoin des deux index à la fois.

Il convient de fermer le thermomètre à une basse température.

Un thermomètre suffisant pour les observations météorologiques a de 30 à 35 centimètres de long; avec sa gaîne de coton et son étui en fer-blanc, il ne pèse pas 100 grammes.

THERMOMÈTRES A BULLE D'AIR.

Thermomètres horizontaux qui ne doivent pas être remués pendant les expériences.

1. *Thermomètre à minimum de Rutherford.* — Il suffit d'introduire l'index la tête en avant (1°) dans le thermomètre à colonne liquide continue, pour avoir un thermomètre de Rutherford horizontal. Ce thermomètre et tous les thermomètres horizontaux qui suivent doivent être inclinés de la tige vers la boule.

2. *Thermomètre donnant le minimum qui suit une élévation de température suffisante.* — L'index étant mis en dehors du liquide (3°), lorsque le ménisque aura dépassé la tête de l'index, celui-ci jouera le rôle de l'index à minimum du thermomètre de Rutherford.

3. *Thermomètre qui donne le minimum et en même temps la plus grande oscilla-*

tion ascendante. — L'intervalle entre un minimum de la température et le premier maximum qui le suit est une oscillation ascendante de la température.

Lorsque la température minimum précède la température maximum, la plus grande oscillation ascendante est la différence même de ces deux températures extrêmes; dans ce cas le thermomètre donnerait à la fois le maximum et le minimum par un seul index, puisqu'il donne le minimum et la distance du minimum au maximum.

Pour obtenir cet instrument, produire une petite bulle avec un index ayant la tête en avant, donner à la colonne liquide séparée une longueur un peu plus grande que l'index (7°) et mettre le thermomètre horizontalement. Le minimum sera donné par la tête de l'index. La longueur de la colonne liquide séparée différera d'une quantité facile à déterminer de la longueur de l'oscillation ascendante.

Si on le désire, on peut, en faisant sortir l'index du liquide en un point déterminé, n'avoir les indications précédentes que pour les températures postérieures à une certaine élévation de température. Lorsque le ménisque dépasse l'index, il faut considérer comme oscillation ascendante la quantité dont il le dépasse.

4. *Thermomètre donnant le maximum dans la position horizontale.* — Produire une bulle et loger l'index pointe en avant dans la partie liquide séparée, convenablement allongée (6°). Placé horizontalement, le thermomètre donnera le maximum de la température.

Le point indiqué par la tête de l'index est distant du point que le ménisque aurait atteint, si la colonne liquide avait été continue, de la différence des longueurs de la partie séparée et de la bulle. De là une correction qui peut être regardée comme constante à la lecture du point correspondant à la tête de l'index. Si le liquide séparé a une longueur égale à la somme des longueurs de la bulle d'air et de l'index, la lecture correspondant à la pointe de l'index donnerait la température maximum sans correction; je me suis quelquefois astreint à cette condition, en mettant en état un thermomètre à maximum de ce genre.

Dans tous les cas, il suffirait de noter une fois pour toutes la différence des lectures faites au même instant à la tête de l'index et au ménisque d'un thermomètre étalon, pour avoir, dans une série d'expériences, la différence sensiblement constante entre la lecture correspondant à la tête de l'index et le maximum.

Cette comparaison, avec un thermomètre étalon, donne de la manière la plus précise la correction constante à apporter aux lectures; mais elle n'est pas indispensable; la détermination de la différence des longueurs de la partie liquide séparée et de la bulle se fait directement avec la précision nécessaire.

5. Supposons qu'une bulle sépare une colonne d'alcool assez longue de la co-

lonne liquide continue, et qu'entre cette bulle et le réservoir du thermomètre soit un index ayant la pointe en avant.

L'index ne se déplacera pas, quels que soient les changements de la température (2°); mais la colonne séparée aura une longueur décroissante, si la température s'abaisse graduellement, et restera invariable si la température s'élève ensuite; sa longueur et la position connue de l'index détermineront le *minimum de la température*.

Il importe de remarquer que, le minimum ayant eu lieu, on peut redresser le thermomètre et le déplacer, sans changer la longueur de la colonne liquide séparée. De sorte que l'on peut connaître le minimum malgré ces déplacements, pourvu que la position de l'index soit connue; *il suffirait que l'index fût soudé au tube par sa tête pour avoir un thermomètre à minimum qu'on puisse déplacer sans en altérer les indications*. On ferait les observations en laissant le thermomètre *dans la position ordinaire, et l'instrument donnerait les minima des lieux inaccessibles à l'observateur*.

6. On aurait d'une manière toute semblable un thermomètre donnant les maxima par une colonne liquide variable; l'index, tête en avant, serait au delà de la bulle. Le thermomètre ainsi disposé donnerait les maxima dans une position horizontale; avec un index soudé, il donnerait les maxima dans une position renversée.

7. *Thermomètre donnant à la fois le maximum et le minimum.* — Ce thermomètre étant le plus important de tous ceux auxquels donne lieu le thermomètre à bulle d'air, je vais entrer dans quelques détails sur sa construction et son usage.

Construction. — 1° *Si l'un des index est hors de l'alcool, la pointe en avant*, et l'autre dans la boule du thermomètre, il faudra produire une bulle et remettre ce dernier index dans la boule du thermomètre pour avoir un instrument donnant à la fois le maximum et le minimum. Pour produire la bulle, on introduit le second index la tête en avant jusqu'au ménisque du liquide; une secousse, obtenue en laissant tomber l'instrument guidé par une main dans le creux de l'autre main ou sur la couverture d'un livre, fait sortir la tête et une partie de l'index hors de l'alcool. On donne à cette partie émergée la longueur de la bulle qu'on veut obtenir par de légères variations de température.

On prend alors l'instrument par le milieu de la tige, et, tenant la boule en haut, le bras étendu, on fait osciller le bras en pendule; il n'y a pas besoin d'une grande vivacité : une ou deux oscillations du bras suffisent, une bulle est faite.

Par une lente élévation de température, on donne à la partie liquide séparée une longueur de 2 à 3 millimètres plus grande que celle d'un index, et, par quelques secousses obtenues comme on l'a vu, on fait repasser l'index dans la boule du thermomètre.

2° *Si les deux index sont dans la boule du thermomètre*, on commencera par les introduire l'un et l'autre (2°) la pointe en avant dans la tige; l'un prend l'avance, et, inclinant la tige, on fait rentrer dans la boule celui qui est en retard : quelques trépidations imprimées au tube qu'on fait tourner entre les doigts dans cette position inclinée amènent bientôt un index à culbuter dans la boule du thermomètre. Cela fait, on renverse tout à fait le thermomètre; le retardataire tombe la tête en avant à la suite de l'index qui l'a devancé, les deux index arrêtés par le ménisque de l'alcool ont leurs têtes qui se touchent. On chauffe à la main le thermomètre, puis on le pose horizontalement pour le laisser refroidir, et quand un des index est sorti de l'alcool, on se trouve dans les conditions où l'on a vu la manière de construire l'instrument.

Pour éviter d'avoir à mettre les index dans une direction convenable, on fait souder un arrêt à l'entrée du tube.

Mise en expérience. — Lorsqu'un des index est dans la boule et l'autre au delà de la bulle d'air vers laquelle il tourne la tête, pour mettre l'instrument en expérience on le chauffe dans la position ordinaire jusqu'à ce que l'index se loge dans la partie liquide séparée; on laisse alors l'instrument se refroidir dans cette position verticale, enfin l'on renverse l'instrument pour faire tomber, la tête en avant, l'index qui était dans la boule. L'instrument placé horizontalement est prêt à donner un maximum et un minimum.

Mode d'observation. — On note le point indiqué par la tête de l'index à minimum, puis le point indiqué par la tête de l'index à maximum; on peut alors remettre l'instrument en expérience, ainsi qu'on vient de le voir.

Correction. — Nous savons déjà (4) qu'il faut élever la température indiquée par la tête de l'index à maximum d'une quantité constante qu'on peut déterminer facilement, une fois pour toutes, ainsi que nous l'avons dit.

Il faut élever la température de l'index à minimum d'une quantité égale au nombre de degrés correspondant à la partie liquide séparée. Cette quantité peut être regardée comme constante.

Cette correction se fait comme la correction relative au déplacement du zéro.

On peut aussi la faire de la manière suivante : couper deux bandelettes de papier fort à la longueur de la partie séparée, raccourcir l'une d'une quantité égale à la longueur de la bulle d'air. Pour avoir le *maximum*, on porte à partir de la tête de l'index du maximum la longueur de la *bandelette courte*. L'extrémité de cette bandelette indique sur la graduation le maximum.

On fait de même pour avoir le *minimum;* à partir de la tête de l'index, on porte la *bandelette longue* et on lit le minimum à l'extrémité de la bandelette.

Un curseur de papier tient lieu des deux bandelettes si on le découpe convenablement.

J'ai pu transporter plusieurs instruments réunis sur un même support, sans autres précautions que celles qu'il fallait pour ne pas les briser, monter et descendre plusieurs escaliers sans que les bulles fussent déplacées d'une manière appréciable.

J'ai vu une bulle d'air persister plus d'un mois sans altération dans un thermomètre vertical protégé seulement contre les chocs violents, et rien n'annonçait que cette bulle dût finir. Je me suis assuré qu'une bulle persistait dans un thermomètre envoyé de Paris à Nice par les messageries, et qu'un thermomètre à colonne continue ne perdait pas cette continuité dans un voyage pareil. Je n'avais pris aucune précaution particulière, les thermomètres faisaient partie d'un colis plus considérable qui les garantissait des chocs violents.

J'ai reconnu que le peu de masse de ces instruments leur laisse une assez grande sensibilité malgré le peu de conductibilité de l'alcool. Quatre instruments subissaient simultanément des oscillations dont la durée n'était que de quelques minutes, et l'étendue d'une fraction très-minime de degré.

Avec des thermomètres à index à deux têtes inégales, comme les index des thermomètres Doulcet, on ne peut incliner les thermomètres de quelques degrés de la tige vers la boule sans nuire à la précision de leurs indications. Mais j'ai fait construire pour les thermomètres horizontaux à bulle d'air des index n'ayant qu'une tête, l'autre extrémité est simplement émoussée au contact instantané d'une flamme. Ces index fonctionneraient mal comme index Doulcet, et fonctionnent parfaitement dans un thermomètre à bulle d'air incliné de 10° de la tige vers la boule.

Un index qui ne tomberait que par saccades jusqu'au ménisque du liquide dans le thermomètre Doulcet ne peut manquer d'être entraîné par la bulle d'air. La force d'entraînement des ménisques concaves est supérieure au poids des index à tel point, qu'il n'y aurait pas d'inconvénient à colorer le liquide employé dans les instruments à bulle d'air, tandis que le moindre dépôt de substance colorante dans le tube d'un thermomètre Doulcet pourrait nuire à la marche de l'index.

Il est nécessaire d'incliner légèrement les thermomètres à alcool fonctionnant horizontalement, pour que l'alcool qui se condense dans les périodes de refroidissement revienne vers la colonne liquide du thermomètre. Plus la température est élevée, plus il faut incliner le tube. Ainsi un thermomètre placé dans une étuve maintenue à une température de 27° environ ne fonctionne bien qu'autant que le thermomètre a une inclinaison de 8° environ, sinon, au bout d'un certain temps, on trouve en dehors de la colonne liquide et de la partie liquide séparée une petite quantité de liquide déplacée par une véritable distillation. Avec une telle inclinaison, les index fonctionnent régulièrement et la bulle d'air pousse l'index du maximum et celui du minimum. Si les limites entre lesquelles varie la température viennent à s'écarter, les index s'écartent l'un de l'autre d'une manière correspon-

dante. Le thermomètre, à la fois à maximum et à minimum, serait, je crois, spécialement utile pour l'étude du chauffage et de la ventilation des salles; la distance des têtes des index marque immédiatement la grandeur des variations de température de l'air introduit ou expulsé.

8. On peut, grâce à la bulle d'air, combiner le thermomètre qui donne le minimum et celui qui donne le maximum qui suit une certaine élévation de température. Il suffit que la bulle d'air détache du liquide une assez longue colonne d'alcool. L'un des index sera poussé par une des extrémités de la bulle d'air; l'autre, placé d'abord en dehors du liquide, pourra être saisi par lui et donner, à partir de ce moment, le minimum. Si l'on trouve, à la fin d'une expérience, que la distance des deux ménisques est moindre que la distance des têtes des index, on en conclut *qu'avant l'élévation de température qui a permis au second index de fonctionner, la température avait subi un minimum qui n'a plus été atteint postérieurement.* On peut avoir en degrés le minimum absolu atteint d'abord et un minimum qui l'a suivi.

9. Supposons deux bulles d'air entre lesquelles soit placé un index la pointe en avant. Lorsqu'après un maximum la température éprouve une oscillation descendante, la colonne liquide comprise entre les deux bulles grandit aux dépens de la partie liquide séparée; si celle-ci est assez longue, la longueur acquise par la partie entre les deux bulles mesurera *la plus grande oscillation descendante* de la température et pourra servir à la déterminer en degrés d'une manière assez exacte. Pour produire deux bulles séparées par un index, il suffit de couper en deux une bulle un peu longue par un index ayant la pointe en avant.

Un second index, placé entre la première bulle et le réservoir, donnerait le minimum, et, avec ce seul instrument, on aurait le minimum, le maximum et la plus grande oscillation descendante. Mis en expérience le soir, ce seul thermomètre donnerait *le maximum et le minimum* du jour suivant, et peut-être, *en outre, un minimum nouveau,* au moyen de l'oscillation descendante.

THERMOMÈTRES VERTICAUX POUR LES LIEUX INACCESSIBLES.

I. — *Thermomètres renversés.*

1. *Thermomètre à maximum de Doulcet.* — Il suffit d'introduire un index la pointe en avant et de tenir le thermomètre dans une position renversée.

Ce thermomètre est fort simple; il n'a qu'un inconvénient : c'est de laisser s'écouler hors de la colonne continue une petite quantité de liquide qui va nécessairement en augmentant pendant tout le temps que dure une expérience.

2. Si l'on suppose une bulle d'air traversée par un index tournant sa pointe vers la boule du thermomètre, on aura un instrument dont la température peut s'élever lentement ou rester stationnaire, sans que l'index tombe jusqu'au ménisque du liquide; mais l'index tombe si la température s'abaisse un peu. Ce thermomètre donne le *premier maximum par la longueur de la partie liquide séparée et la position première de l'index*. Ainsi disposé, il indique une *oscillation descendante* de la température. Si la bulle est très-petite, il est sensible aux très-petites élévations de température. *Le moindre réchauffement fait tomber l'index.*

On peut recommencer une nouvelle expérience en retournant un instant l'instrument et lui faisant subir une secousse dans le creux de la main ou sur la couverture d'un livre. L'index traverse la bulle d'air; alors le thermomètre, remis dans la position renversée, indiquera de nouveau une petite oscillation ascendante de la température par la chute de l'index.

3. Dans le thermomètre à bulle d'air renversé, si un index tombe à partir du réservoir, la pointe en avant, il s'arrête à la bulle d'air, et il est prêt à marquer le premier maximum de la température. Cette indication prise, l'index reste immobile, malgré les variations lentes de la température. Ce thermomètre donne *le premier maximum par la position de l'index et la longueur première de la partie séparée*. Cette partie séparée doit être assez longue pour qu'elle ne disparaisse pas après le premier maximum (**4**).

Cette propriété de conserver une température au moyen d'un index fixe peut être utile dans les circonstances où l'on ne peut faire la lecture de la température au moment où il est utile de la connaître. Si la température s'élève, il suffit, par un moyen quelconque, de refroidir un peu le thermomètre pour que la bulle se fasse traverser par l'index, qu'elle maintient ensuite immobile, malgré les variations lentes de la température.

4. Le thermomètre, qui donne ainsi le premier maximum, n'indiquerait pourtant que le maximum qui suivrait un abaissement de la température si un refroidissement considérable réunissait la colonne séparée tout entière au reste du liquide. En effet, à partir de ce moment, le thermomètre est devenu un thermomètre à maximum de Doulcet.

On conçoit, d'après cela, un index donnant le *maximum qui suit un abaissement déterminé de la température*.

5. On peut combiner les thermomètres verticaux renversés 1 et 3, et l'on a dans un même thermomètre un index donnant le *premier maximum de la température*, et l'autre donnant le *maximum absolu de la température*. Si les deux maxima notés par les index ne sont pas les mêmes, la distance des index a augmenté, et de ce fait on conclura que la température a subi au moins *deux maxima successifs*,

et que le maximum noté par le premier index est antérieur au maximum absolu noté par le second index.

Pour remettre l'instrument en expérience, on le chauffe la boule en bas; l'un des index tombe, l'autre est saisi par le liquide séparé. On laisse l'instrument reprendre la température ambiante, puis on le renverse de telle sorte que l'index revienne de la boule vers la bulle d'air, la pointe en avant (2°).

S'il est nécessaire, avant de remettre ainsi l'instrument en expérience, on donne à la colonne liquide séparée une longueur suffisante; pour cela, on introduit l'index de la boule la tête en avant, on lui fait traverser la bulle, sans toutefois le faire passer outre, et on élève la température du thermomètre, ce qui allonge la partie séparée; on fait passer l'index à travers la bulle et on le remet en place, comme on vient de le voir plus haut.

II. — *Thermomètres dans la position ordinaire.*

1. Un index placé hors de l'alcool la pointe en avant tombe si la température fait remonter l'alcool jusqu'à mouiller tout l'index. Une fois tombé, l'index suit le mouvement de la bulle d'air. On le remettra facilement en place, si l'on veut recommencer une expérience. Pour cela, après avoir chauffé l'instrument à la température qu'il ne doit pas laisser dépasser sans retomber, on le retourne et on le laisse refroidir pour que le liquide abandonne l'extrémité de l'index; cela fait, on le met en place. Ce thermomètre *accuse les élévations de la température qui dépassent un point déterminé à l'avance.* Construit avec des liquides peu volatils qui mouillent le verre, il serait un indicateur utile pour *la surveillance du chauffage des machines à vapeur.*

2. Je suppose que l'on fasse tomber un index la pointe en avant et qu'on lui fasse transpercer une bulle : le thermomètre, placé dans la position verticale ordinaire, indiquera une oscillation montante; la température s'abaissera sans déplacer l'index, mais ne s'élèvera pas sans le faire tomber jusque dans la boule en quelques instants.

C'est donc un thermomètre donnant le *premier minimum.* Nous allons en décrire un autre.

3. *Autre thermomètre donnant le premier minimum.* — Je donnerai quelques détails relatifs à la construction de cet instrument et à ses applications.

Construction. Introduire, de la boule du thermomètre dans la colonne liquide continue, un index la tête en avant; pour cela, renverser le thermomètre.

Par une secousse, faire sortir la tête de l'index hors de l'alcool et produire une bulle par le mouvement du bras en pendule, ainsi que nous l'avons indiqué pour

le thermomètre à la fois à maximum et à minimum; donner à la partie liquide séparée une assez grande longueur en chauffant l'instrument, puis le mettre dans la position verticale ordinaire. Dans ces conditions, on verra l'index noter le premier minimum et devenir dès lors insensible aux lentes variations de la température. La bulle se fait transpercer par l'index et monte alors lentement jusqu'à la tête de l'index. Celui-ci ne se déplace plus à partir du moment où il a commencé à traverser la bulle.

Applications. Ce thermomètre pourrait servir à l'étude des couches d'eau profondes; il descend un peu échauffé dans des couches qui le refroidissent, et il prend la température de la couche où il s'arrête. Qu'il se produise alors un premier minimum, et à partir de ce moment l'index restera *immobile, dans la supposition même qu'avant qu'on en relève l'indication le thermomètre passe par des températures supérieures et inférieures à celle qu'il a notée.*

On produit un premier minimum dans une couche donnée, en faisant un peu changer le niveau de la couche où l'instrument séjourne avant de le remonter, et par suite sa température; quelques oscillations dans le sens vertical ne sauraient manquer de produire un premier minimum, et l'indication de ce premier minimum reviendra avec le thermomètre à l'observateur.

Une expérience étant faite, on allonge ou on raccourcit la partie liquide séparée au moyen d'une variation convenable de la température, après quoi on renverse l'instrument et on dégage la bulle de l'index par un faible refroidissement. Quand on aura remis le thermomètre dans la position ordinaire, il donnera de nouveau le premier minimum.

En météorologie, le thermomètre donnant le premier minimum, comparé au thermomètre donnant le minimum absolu, indiquerait que celui-ci a été le minimum minimorum venant après un minimum relatif au moins.

De même que le thermomètre à premier maximum, le thermomètre à premier minimum peut noter, parmi une suite de températures décroissantes, une température qu'on ne peut lire immédiatement.

On chauffe un peu le thermomètre au moment où l'on veut avoir la température.

Ce thermomètre saisit une température dans une suite de températures *décroissantes,* de même que le thermomètre à premier maximum saisit une température dans une suite de températures *croissantes.*

4. L'index fixé après un premier minimum se trouve dans des conditions telles, qu'un abaissement suffisant de la température fait disparaître la bulle; après quoi, si la température s'élève de nouveau, l'index descend dans la boule du thermomètre.

On voit que cet index *accuse un abaissement de température déterminé* par la dis-

parition de la bulle et la chute de l'index. On obtient un instrument qui paraît tout à fait pratique et qui rendrait des services aux sériciculteurs en soudant l'index au point convenable. On abaisse suffisamment la température, la tête de l'index sort du liquide, on fait une bulle par une oscillation du bras, et l'instrument est en état. Rien n'est plus facile que l'emploi de cet instrument, qui accuse les abaissements de la température qui franchissent une limite réglée une fois pour toutes.

5. On peut avoir un thermomètre qui indique si la température, *après avoir dépassé un certain point, s'est abaissée au-dessous* d'un point à peu près déterminé.

Pour cela, un index la tête en avant est mis hors du liquide dans le thermomètre à bulle d'air. L'index tombe si la température s'élève suffisamment, et tombe jusqu'à la bulle qui se fait bientôt traverser par lui; l'index ainsi fixé accusera un abaissement de température, comme on vient de le voir dans le paragraphe précédent.

Ce point au-dessous duquel la température ne peut s'abaisser sans que la disposition de la bulle accuse cet abaissement de la température n'est pas déterminé d'une manière précise, car il faut un certain temps pour que l'index arrive à la bulle qui pendant ce temps a pu monter d'une petite quantité variable, suivant que la température s'élève plus ou moins rapidement.

6. *Thermomètre à deux index dont l'un accuse une trop grande élévation, et l'autre un trop grand abaissement de la température.* — Un pareil instrument trouverait son emploi dans les étuves qu'un aide ou un ouvrier est chargé de maintenir à une température comprise entre deux limites assignées.

Il paraît convenable d'avoir *deux thermomètres séparés*, cependant la combinaison des deux index accusateurs est assez curieuse pour que je l'explique avec quelques détails.

On laisse dans le tube, hors du liquide, un des index introduit la pointe en avant, et on fait tomber l'autre la tête en avant jusqu'au ménisque du liquide; une secousse et une oscillation du bras produisent une bulle.

On allonge la partie liquide séparée en chauffant, de manière qu'elle ait au moins deux fois la longueur d'un index; un léger refroidissement y loge l'index qui a produit la bulle. Si l'on élève alors la température en continuant de tenir le thermomètre renversé jusqu'à la température qui donne la limite supérieure, et si l'on refroidit ensuite, l'index qui a la pointe en avant restera pour surveiller cette limite supérieure. On met la boule du thermomètre en bas, et on abaisse la température jusqu'à ce que la tête de l'index soit au-dessus du point de la graduation qui donne la limite inférieure d'une longueur égale à celle de la bulle d'air; cela

fait, on chauffe la bulle du thermomètre, la bulle se fait traverser par l'index, et l'instrument, mis verticalement la boule en bas, accusera les écarts de la température qui la feraient sortir des limites adoptées.

Si les deux index se touchent par la tête, la limite supérieure a été dépassée; si la bulle a disparu, la limite inférieure a été franchie.

Les deux index sont dans la boule du thermomètre si les deux limites ont été successivement franchies.

RÉSUMÉ.

Premier instrument.

Un instrument ayant un réservoir cylindrique qui ne permette pas le retournement de l'index, s'il contient un index tête en avant, devient à volonté :

Un thermomètre de Rutherford à minimum;

Un thermomètre donnant le minimum et la plus grande oscillation ascendante;

Un thermomètre donnant le premier minimum dans la position verticale;

Un thermomètre déterminant le maximum par la longueur de la colonne liquide séparée;

Un thermomètre donnant le minimum et la plus grande oscillation montante, qui suivrait une température choisie à l'avance et supérieure à la température initiale;

Un thermomètre qui accuse les abaissements de température qui dépasseraient une limite déterminée;

Un thermomètre qui accuse les élévations de température qui dépasseraient une limite supérieure établie à l'avance;

Un thermomètre qui annoncerait que la température, *après* s'être élevée au-dessus d'un certain point, s'est abaissée au-dessous d'un autre point à peu près déterminé à l'avance;

Enfin un thermomètre qui donne le premier maximum au moyen d'un index qui tombe un peu après que le premier refroidissement a commencé.

Deuxième instrument.

Un instrument ayant un réservoir cylindrique comme le précédent, mais contenant un index pointe en avant, devient à volonté :

Un thermomètre à maximum de Doulcet;

Un thermomètre indiquant le premier maximum;

Un thermomètre donnant le maximum horizontalement au moyen d'un index poussé par un ménisque concave à la manière de l'index de Rutherford;

Un thermomètre donnant le maximum et la plus grande oscillation descendante;

Un thermomètre indiquant le minimum de la température par la longueur de la colonne liquide séparée;

Un thermomètre accusant les élévations de température qui franchissent une limite déterminée;

Enfin un thermomètre donnant le premier minimum au moyen d'un index qui tombe à la première élévation de la température.

Troisième instrument.

Un thermomètre à un seul index réversible peut donner successivement les indications qui appartiennent au premier et au second instrument.

L'introduction de l'index par la tête se fait naturellement; de plus, on arrive bientôt à l'introduire par la pointe, sans avoir besoin de suivre des yeux l'index, en se servant du procédé que j'ai décrit.

Au lieu des deux instruments à réservoir cylindrique, on peut n'avoir qu'un seul instrument à réservoir sphérique; la facilité qu'on a en outre de mettre dans ce dernier instrument l'index dans un sens ou dans l'autre n'est pas sans utilité.

En effet, d'une part, l'index introduit par la tête permet d'*obtenir de la manière la plus facile des bulles de longueur convenable*. On peut toujours, après que la bulle est produite, retourner l'index en lui faisant traverser la bulle au moyen de secousses sur la paume de la main. L'index peut faire la navette d'un côté à l'autre de la bulle sans la détruire, pour peu que la colonne liquide séparée soit longue de 10 à 15 millimètres.

D'autre part, l'index mis la pointe en avant *rassemble par refroidissement le liquide en une seule colonne de la manière la plus convenable*. Si le premier refroidissement ne suffit pas, on réchauffe un peu et on amène la pointe de l'index contre la bulle d'air, un second refroidissement continue ou achève le rassemblement du liquide.

Ce moyen de rassembler le liquide est utilisé par M. Baudin lorsqu'il construit les thermomètres à index. Ce procédé est plus commode que l'emploi de secousses multipliées ou de la force centrifuge. Il ne déplace pas le zéro de l'instrument comme le ferait le contact d'une source énergique de chaleur.

Quatrième instrument.

Un thermomètre qui pèse à peu près 100 grammes avec son étui en fer-blanc et

contenant deux index en forme d'épingle à pointe émoussée peut donner ***deux ou trois indications successives sans l'intervention de l'observateur,*** et il remplace, dans tous les cas, les instruments précédents. Il donne les indications suivantes.

Indications qui se rapportent aux minima.

1° Le minimum absolu;

2° Le premier minimum;

3° Le minimum qui suit une certaine température;

4° La plus grande oscillation montante.

Outre ces indications qui se traduisent en nombres, on peut savoir :

1° Si la température, pendant un intervalle de temps donné, a subi une oscillation ascendante;

2° Si elle s'est abaissée au-dessous d'un certain point;

3° Si elle s'est abaissée au-dessous d'un certain point, après avoir préalablement dépassé un point déterminé.

Indications qui se rapportent aux maxima.

1° Le maximum absolu;

2° Le premier maximum;

3° Le maximum qui suit une certaine température;

4° La plus grande oscillation descendante.

Outre ces indications numériques, on peut savoir :

1° Si la température a subi une oscillation descendante pendant un certain intervalle de temps;

2° Si elle s'est élevée au-dessus d'un point déterminé en l'absence de l'observateur.

Un thermomètre pouvant servir à tous ces usages, et gradué avec le soin que M. Baudin apporte à la graduation de tous ses instruments, coûte 12 francs. La graduation est faite en degrés; on évalue les fractions à vue.

Il faut remarquer que cet instrument peut servir aux voyageurs aussi bien qu'aux observateurs sédentaires. Il suffit d'un peu de chaleur pour le remettre en place; la chaleur des mains suffit généralement.

Pourvu que l'instrument ne soit pas brisé, il ne peut lui arriver aucun dérangement qu'on ne puisse réparer facilement en peu de temps.

Cinquième instrument.

Thermomètre à minimum pour les lieux inaccessibles à l'observateur.

Les indications les plus importantes parmi celles que je viens d'énumérer peuvent être obtenues dans la position verticale de l'instrument, sans qu'il soit nécessaire de le maintenir dans une immobilité complète.

L'instrument peut être descendu dans les lieux inaccessibles à l'observateur ; il suffit qu'il soit préservé des chocs violents. On peut le descendre dans les puits forés, les trous de sonde, les couches d'eau profondes, ou l'abandonner aux branches d'un arbre en le préservant seulement des oscillations trop fortes.

Les deux thermomètres qui donnent le premier minimum sont des thermomètres verticaux; mais ils supposent que la température, au moment de la mise en expérience, soit décroissante, sinon ils ne peuvent en aucune façon tenir, jusqu'à un certain point, lieu du thermomètre à minimum.

Le thermomètre à marteau de M. Baudin, et l'un des thermomètres de M. Walferdin, donnent les minima dans une position verticale. J'ai donné plus haut l'idée d'un thermomètre servant au même usage, lorsque j'ai décrit un thermomètre à minimum dans lequel une bulle d'air sépare une longue colonne liquide variable, suivant que la température s'est plus ou moins abaissée.

Près de la boule du thermomètre est soudé à l'intérieur du tube un index en forme d'épingle, dont la tête seule est soudée au tube; la pointe de cet index est dirigée vers le haut du thermomètre placé dans la position ordinaire. Au-dessus de lui est une bulle de 3 à 4 millimètres de longueur séparant une longue colonne liquide du reste de l'alcool.

La colonne liquide diminuera lorsque la bulle viendra se faire traverser par l'index soudé, et restera invariable lorsqu'une élévation de la température l'aura dégagée de l'index. Ainsi le minimum se traduit par une modification persistante de la colonne liquide séparée. Au-dessus d'elle reste abandonné dans le tube un index qui a servi à produire la bulle et à la déplacer dans la colonne liquide. Cet index, qui a la pointe en avant, servira après chaque expérience à allonger la colonne liquide raccourcie par l'index au moment du minimum. Il suffit pour cela de chauffer le thermomètre pour faire tomber l'index mobile, et de chauffer encore lorsque l'index est arrivé contre la bulle; puis on met l'instrument dans une position renversée, et on laisse un peu refroidir pour dégager l'index. Il tombe jusqu'au ménisque du liquide, qu'une secousse lui fait traverser; cela fait, on remet l'instrument en expérience. Cet instrument donnera de lui-même l'indi-

cation du minimum de la température. Il n'a pas besoin d'être immobile ; un aéronaute pourrait le suspendre au dehors de sa nacelle.

Le thermomètre donne une indication qu'on traduit en nombres, soit en portant, à partir de la pointe de l'index, une longueur égale à la colonne liquide séparée, soit en amenant dans un bain réfrigérant la bulle d'air à se faire traverser par l'index, absolument comme elle l'était au moment du minimum, et prenant la température du bain.

Le premier procédé, sans être rigoureux, est assez approché, et il suffit dans le plus grand nombre des cas.

Outre son usage spécial, ce cinquième instrument peut servir comme le premier instrument, puisqu'il contient un index mobile qui ne peut se retourner.

On peut avoir dans le tube deux index tournés en sens contraires comme dans le thermomètre qui donne à la fois le maximum et le minimum ; l'index soudé remplace l'arrêt dont il a été question dans ce Mémoire. Ce seul instrument donne la plupart des indications énumérées précédemment.

Sixième instrument.

Thermomètre à maxima successifs.

Imaginons que vers le milieu du thermomètre un index, ayant la pointe tournée vers la boule, soit soudé au tube par sa tête : la colonne d'alcool continue viendra, par suite d'une élévation de la température, contre la pointe de cet index ; si le thermomètre est dans une position renversée, l'index sépare une quantité d'alcool grandissant à mesure que la température s'élève.

Cet instrument peut indiquer plusieurs maxima successifs.

Dans la position verticale ordinaire, c'est un indicateur des abaissements de température qui franchissent une limite déterminée par la position de l'index. L'usage en est des plus simples. On fait l'instrument très-court, et, par suite, peu fragile.

De même, on conçoit un instrument donnant une série de minima successifs ; mais il faudrait supposer un partie liquide séparée du reste de l'alcool par une très-longue bulle d'air. Cet instrument n'aurait point une grande précision, parce qu'une longue bulle d'air introduit par ses variations une source d'erreurs proportionnelles à sa longueur.

Si la résistance qu'offre au déplacement dans un tube une colonne liquide pouvait être regardée comme constante, on concevrait des thermomètres à air où les index, donnant les maxima et minima successifs, auraient leur rôle à remplir.

Je n'ai pas fait construire ces espèces de thermomètres différentiels ; ils ne pourraient avoir d'utilité que dans des circonstances trop particulières.

Septième instrument.

On peut ajouter au thermomètre précédent un index ayant la pointe en avant et placé au-dessus de l'index soudé.

Ainsi complété, cet instrument indique, comme le précédent, si la température s'est abaissée au-dessous d'une limite fixe; l'index mobile est alors relégué bien haut dans le tube.

Mais il indiquera, quand on le voudra, si la température s'élève au-dessus d'une limite supérieure qu'on règle à volonté.

Après une expérience, il n'y aura qu'à porter l'instrument à la température limite qu'on aura choisie et à le mettre dans la position renversée, l'index arrivera bientôt au ménisque; après un léger refroidissement, l'instrument placé dans la position verticale ordinaire ne pourra subir une température supérieure à la limite assignée sans qu'il en résulte une chute pour l'index mobile. Cet instrument est d'un usage simple et tout à fait pratique.

Pour la surveillance du chauffage des magnaneries, deux instruments, l'un indiquant si une limite inférieure, l'autre si une limite supérieure a été franchie, ne seraient peut-être pas inutiles.

Applications de la combinaison des indications précédentes.

Quand la température est déjà décroissante, aujourd'hui, vers 5 heures du soir par exemple, on met en expérience :

1° Un instrument donnant le premier minimum;

2° Un instrument qui donne le minimum qui suivra une température de demain et la plus grande oscillation suivante : c'est le troisième des thermomètres que j'ai décrits;

3° Un thermomètre à deux bulles donnant la plus grande oscillation descendante.

Dans les circonstances ordinaires, on aura des indications suffisantes pour déterminer les deux maxima et les deux minima qui se seront produits pendant une absence de 48 heures.

En effet, le minimum qui aura lieu demain sera noté par le premier instrument; le minimum du jour suivant par le second instrument : en même temps, ce second instrument donnera le maximum qui suit ce second minimum, puisque la distance de ces deux points est la plus grande oscillation montante que l'instrument ait subie depuis que l'index a commencé à fonctionner.

Quant au maximum de demain, il sera donné par le thermomètre à deux bulles; en effet, sa distance au minimum suivant est la plus grande oscillation descendante de la température pendant l'intervalle considéré.

Si l'on ajoute aux trois instruments dont il vient d'être question un instrument donnant le maximum absolu et un instrument donnant le minimum absolu, en même temps que la plus grande oscillation constante, ces trois nouvelles indications serviront à vérifier les quatre indications données par les instruments qui donnent les quatre limites atteintes pendant une période de deux jours.

Voici une seconde combinaison. Quand la température est déjà croissante, vers onze heures du matin, par exemple, qu'on mette en expérience :

1° Un instrument donnant le premier maximum;

2° Un instrument qui donne le minimum et la plus grande oscillation montante.

Après une absence de trente-six heures environ, on pourra déterminer les deux maxima et le minimum qui ont eu lieu.

Cette combinaison de deux instruments est assez simple pour être facilement utilisée.

J'indiquerai enfin une troisième combinaison, aussi simple que la précédente.

Vers cinq heures du soir, la température s'abaissant, on met en expérience :

1° Un instrument qui donne le premier minimum;

2° Un instrument qui donne le maximum et la plus grande oscillation descendante; c'est l'instrument à deux bulles.

On pourra déterminer les deux maxima et le minimum qui se seront produits pendant une absence d'environ quarante heures.

Ces curieuses combinaisons d'indications pourraient être utiles dans certains cas. On saurait, après une absence de deux jours, à quel jour appartiennent le maximum et le minimum notés par le thermomètre à maximum et à minimum. Et en outre on aurait les indications qui appartiennent à l'autre jour, d'une manière moins satisfaisante, il est vrai, que si toutes les indications étaient obtenues par un même instrument. Des appareils à indications continues peuvent seuls, il me semble, permettre d'avoir les indications de plusieurs jours aussi bien qu'on a les indications d'une seule journée.

Les combinaisons précédentes supposent qu'il n'y ait chaque jour qu'un maximum et un minimum de la température. Il y a de petites oscillations aussi nombreuses que les changements de direction du vent, et par suite un nombre égal de maxima et de minima, de sorte que la courbe qui représenterait la marche de la température aurait une forme générale modifiée par des sinuosités secondaires.

On peut faire en sorte que les oscillations, dont l'étendue est inférieure à un

degré ou à une fraction déterminée de degré, ne fixent pas l'index du premier maximum et du premier minimum.

De cette manière, les instruments ne s'inquiètent pas des maxima et des minima secondaires; ils donnent les indications principales, et généralement celles-ci consistent, comme je l'ai supposé, en un seul maximum et un seul minimum pour chaque jour.

C'est par la longueur des bulles d'air qu'on règle à volonté l'étendue des oscillations négligées.

Des combinaisons pareilles à celles dont on vient de voir l'usage permettraient de constater, à certains jours, et peut-être assez régulièrement sous certains climats, une variation secondaire importante, soit au moment du maximum, soit au moment du minimum.

Dans les nuits sereines, le passage de nuages étendus arrêterait le refoidissement, et un minimum, qui peut n'être pas le minimum définitif de la nuit, serait produit. L'instrument donnant le premier minimum ne s'accorderait pas alors avec l'instrument qui donne le minimum. Ce dernier peut donner la plus grande oscillation montante en même temps que le minimum : il peut se faire que ce soit une troisième donnée sur la marche de la température pendant la nuit, et cela arrivera généralement, s'il y a eu plus d'une oscillation dans la marche ascendante ou descendante de la température.

Je n'ai pas besoin d'insister davantage sur l'emploi des nouvelles indications que les thermomètres à bulle d'air fournissent, soit en météorologie, soit dans l'étude des températures qui se produisent dans des lieux inaccessibles à l'observateur. Il est clair que de nouvelles indications peuvent ajouter quelque chose à la connaissance des maxima et des minima.

Je ferai remarquer que le thermomètre à la fois à maximum et à minimum est une combinaison du thermomètre à minimum de Rutherford et du même thermomètre renversé; ce dernier donne le maximum sans exiger une longue colonne liquide pour la marche de son index, à cause de la forme particulière de son index qui diffère à peine de celle de l'index du thermomètre de M. Doulcet. Il peut servir en météorologie.

Dans les *observations courantes*, on ne peut attendre le refroidissement qui remet en place l'index du maximum. Pour éviter cette perte de temps, on associe sur un même support un thermomètre de Rutherford et un thermomètre à bulle d'air donnant le maximum, et l'on donne à la colonne liquide séparée une assez grande longueur.

Les index ne sortent pas du liquide, et une *seule inclinaison du support des deux instruments les remet en place après chaque observation*.

La longueur qu'il faut donner à la partie liquide séparée est la distance de deux points de repère gravés sur la tige de l'instrument.

Cette association de deux instruments pourrait servir aux observations courantes de la météorologie.

Les instruments peuvent être transportés et mis en état par chaque observateur. Les voyages ne peuvent avoir aucune influence sur l'exactitude des indications de ces instruments.

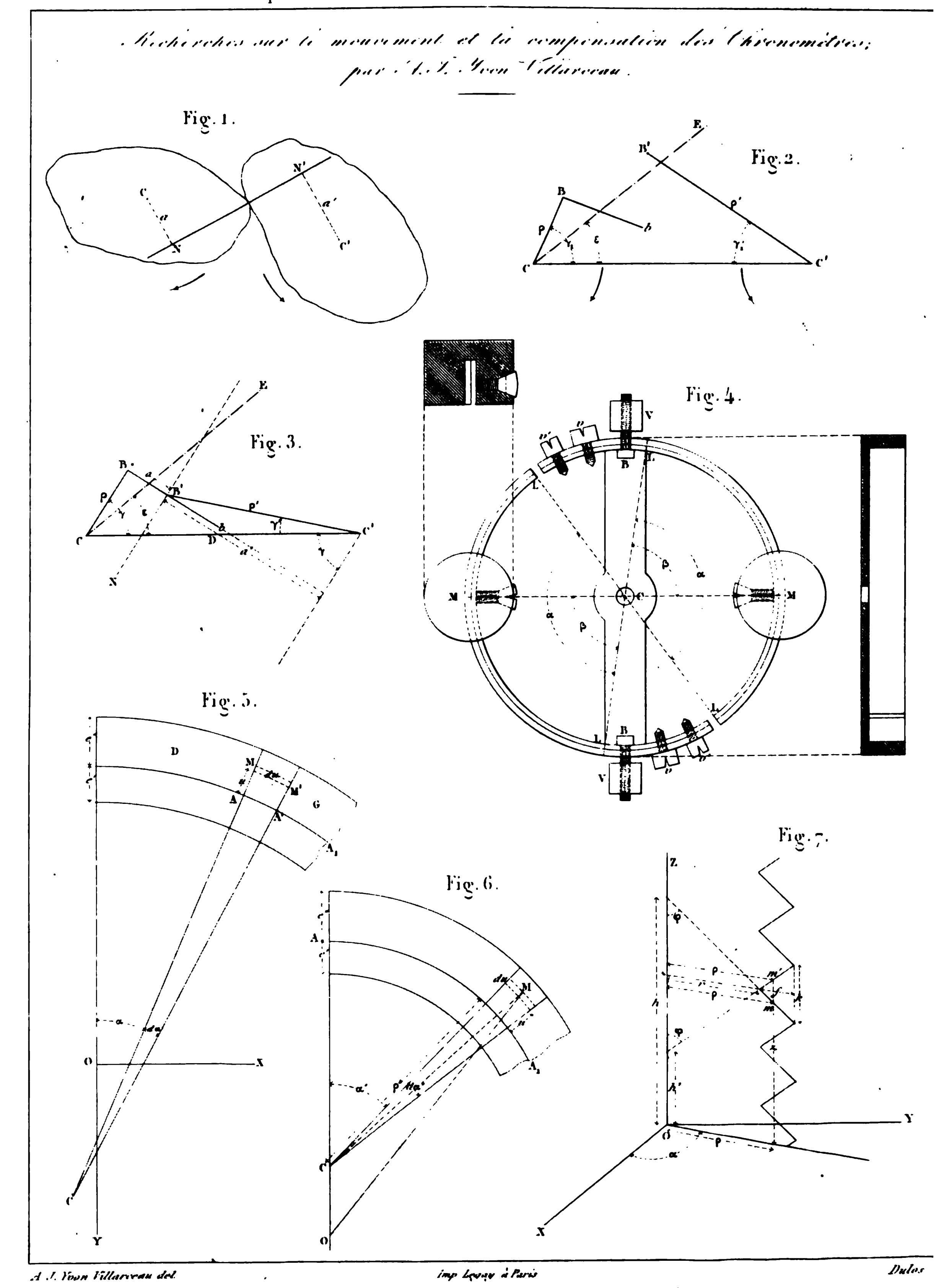
FIN DU TOME SEPTIÈME.

RECTIFICATIONS.

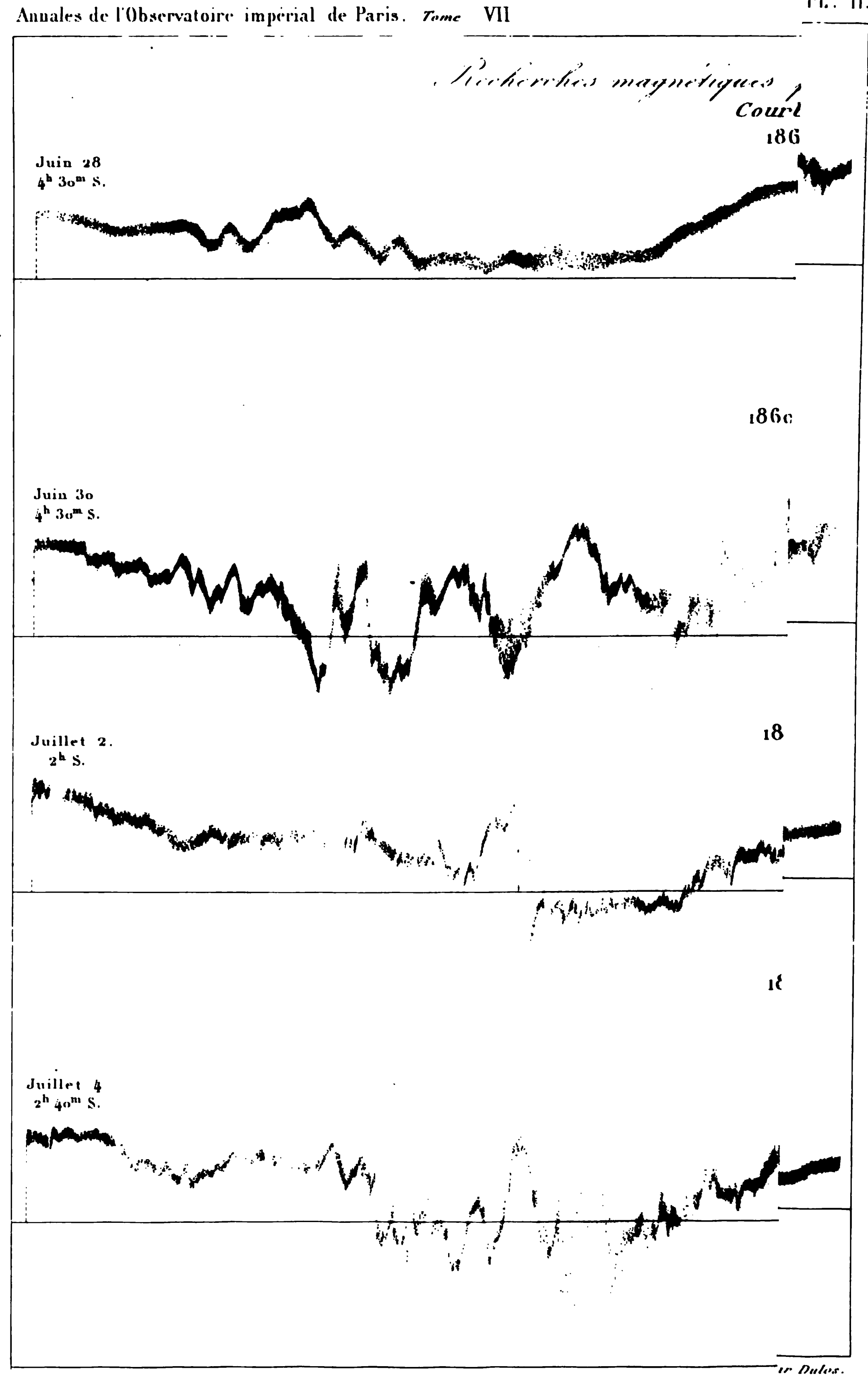
Tome V, page 19, ligne 3, en remontant: *au lieu de* 0,985, *lisez* 0,895.

Tome VI, pages 229, 230, 231 : *au lieu de* 1772, *lisez* 1672.

Tome VII, page 192 : *au lieu de* $a' > a$, *lisez* $a > a'$.



A. J. Yvon Villarceau del. — Imp. Lemercier à Paris — Dulos


Recherches magnétiques
Court
186
Juin 28
4h 30m S.
1860
Juin 30
4h 30m S.
18
Juillet 2.
2h S.
18
Juillet 4
2h 40m S.
Dulos.

t R. Charault.

OCT. 23.

1h 15m Soir.

OCT. 25.

3h 20m S.

OCT. 31.

3h S.

NOV. 4.

3h S.

NOV. 14.

2h S.

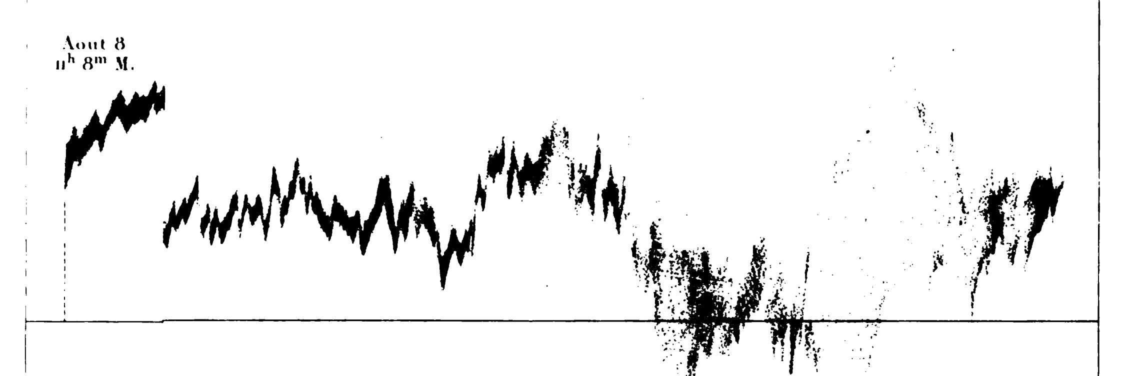
NOV. 22.

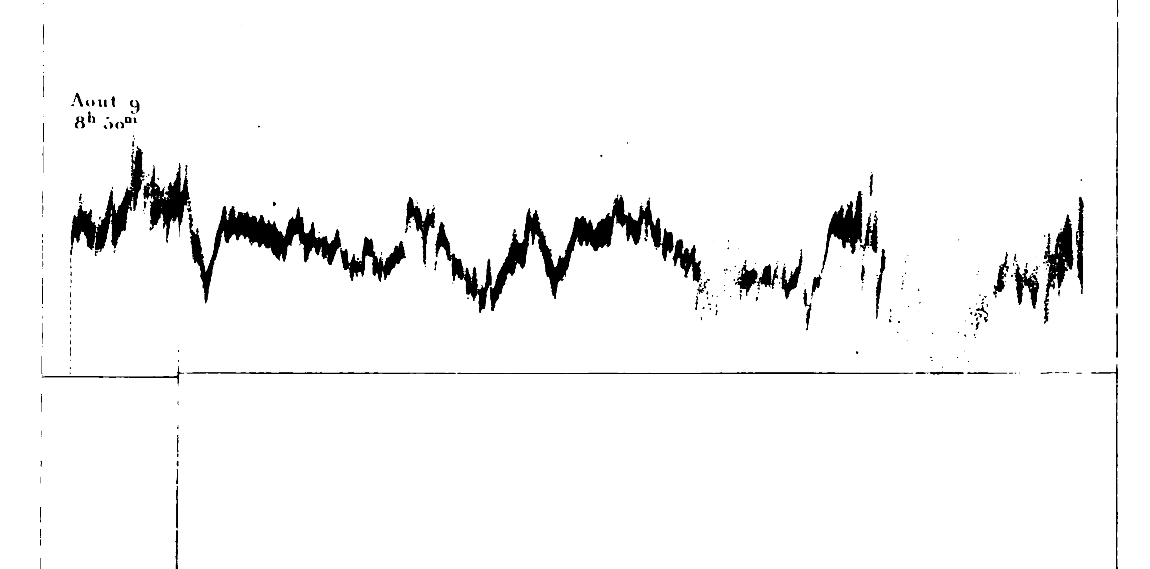
3h S.

Gravé par Dulos

...ains et R. Charault.

...son.

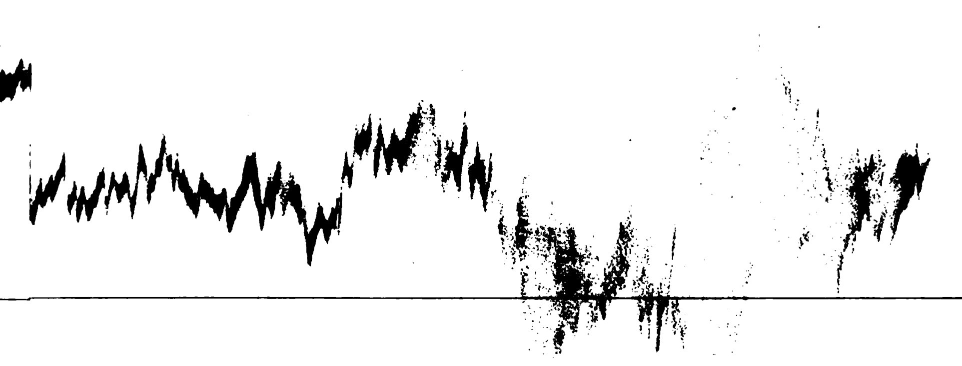


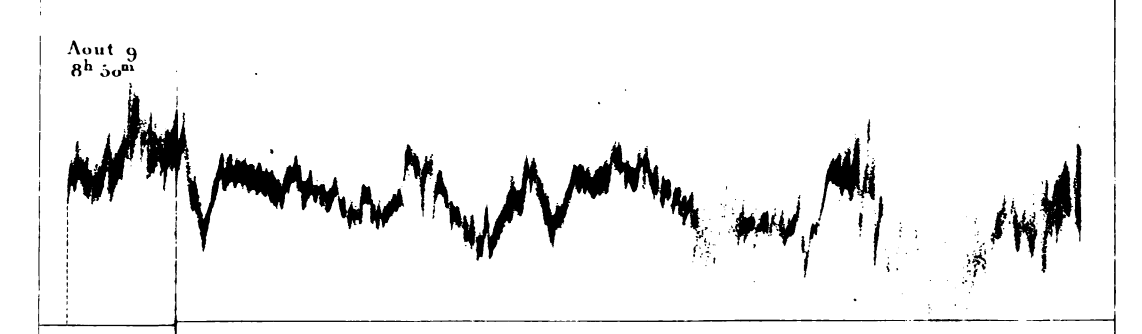


Gravé par Dulos

…ains et R. Charault.

…son.





Gravé par Dulos



...er R. Charault.

... 18.

Oct. 19 $2^h 30^m$ M.

Fig. 1.

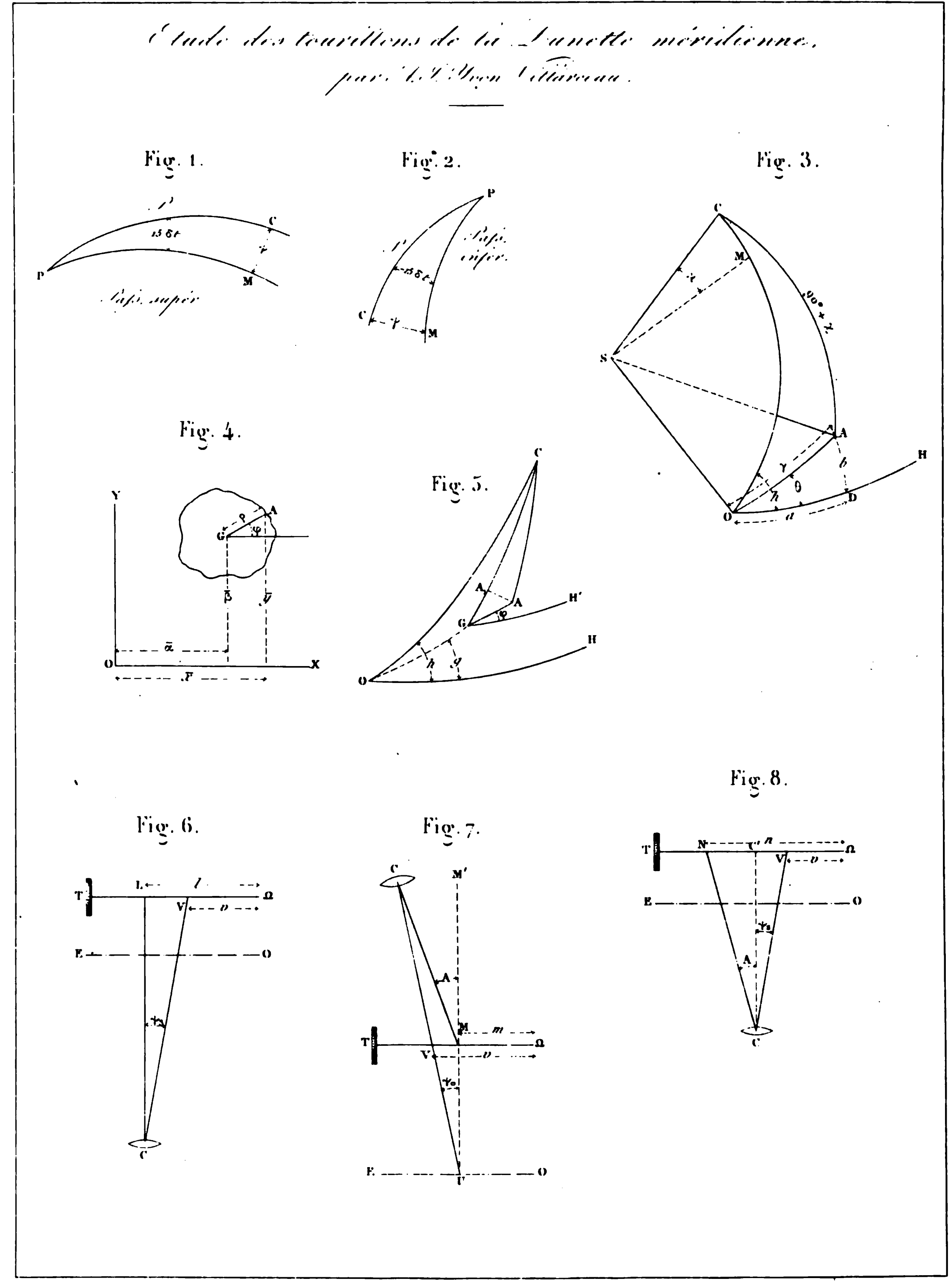
Fig. 2.

Fig. 3.

Fig. 4.

Fig. 5.

Gravé par Dulos.



Lepage imp. r. de la Bucherie 2 Paris. Mallet-Bachelier éditeur. Gravé par Dulos

